ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2020-2021 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 2

Mouvement Brownien, Martingales et Théorème d'arrêt

---

1 Martingales

Exercice 1 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On définit le processus stochastique $(Y_t)_{t\geq 0}$ par $Y_t = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$. Montrez que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Exercice 2 : Martingales du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à B. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t \rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique t est le mouvement brownien.

Exercice 3 : Somme de deux mouvements Browniens indépendants.

Soient B^1 et B^2 deux mouvements Browniens indépendants et soit $\rho \in]0,1[$ une constante.

1. Montrez que $(\rho B_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} B_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi un mouvement Brownien.
2. En déduire que $B^1 B^2$ est une martingale.
   Indication : Que peut-on dire du processus $\left(\left(\frac{B_t^1 + B_t^2}{\sqrt{2}}\right)^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$?

2 Théorème d'arrêt

<u>Exercice 4</u> : La ruine du joueur (version continue).

Soit B un mouvement brownien et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < 0 < b$. On définit :

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t = a \text{ ou } B_t = b\}.$$

1. Justifier que τ est un temps d'arrêt.
2. En appliquant le théorème d'arrêt, montrer que
   (a) $P(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$
   (b) $\mathbb{E}(\tau) = |ab|$

<u>Exercice 5</u> : Des inégalités de Doob.

1. En utilisant le théorème d'arrêt pour les sous-martingales, montrez que si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue et positive, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq t} M_s \geq \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[M_t\right]}{\lambda}.$$

2. En déduire que si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |N_s| \geq \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[N_t^2\right]}{\lambda^2}.$$

   Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.