ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2020-2021 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 3
Théorème d'arrêt (suite)

Exercice 1 : La ruine du joueur (version continue).

Soit B un mouvement brownien et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < 0 < b$. On définit :

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t = a \text{ ou } B_t = b\}.$$

1. Justifier que τ est un temps d'arrêt.
2. On admet que $\tau < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt, montrer que
   (a) $\mathbb{P}(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$
   (b) $\mathbb{E}[\tau] = |ab|$

* 3. Montrer que $\tau < +\infty$ presque sûrement.

Exercice 2 : Des inégalités de Doob.

1. En utilisant le théorème d'arrêt pour les sous-martingales, montrez que si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue et positive, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :
$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} M_s \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}[M_t]}{\lambda}.$$
   Indication : Considérer $T_\lambda = \inf\{t \geq 0,\ M_t = \lambda\}$ et appliquer le théorème d'arrêt à t et $t \wedge T_\lambda$.
2. En déduire que si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :
$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |N_s| \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[N_t^2\right]}{\lambda^2}.$$
   Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 3 : Intégrale du mouvement Brownien

Soit B un mouvement Brownien. Comme B est un processus continu presque sûrement, on peut définir son intégrale (au sens de Riemann) sur $[0, t]$, pour tout $t \geq 0$ que l'on note

$$X_t := \int_0^t B_s \,\mathrm{d}s.$$

On pose aussi $t_k = \frac{kt}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$ et

$$X_t^n := \sum_{k=1}^{n} B_{t_k}(t_k - t_{k-1}).$$

1. Justifier que X_t^n suit une loi normale et calculer son espérance et sa variance.
2. En déduire la loi de X_t.

   Indication : On se rapellera que la convergence p.s. implique la convergence en loi et qu'une suite de v.a de loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ telle que $\lim_{n\to\infty}(\mu_n, \sigma_n) = (\mu, \sigma)$ converge en loi vers une v.a de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Exercice 4 : Examen 2019

Soit B un mouvement Brownien, $\mu > 0$ et $x_0 > 0$. On considère le processus

$$X_t = x_0 + \mu t - B_t,$$

modélisant l'argent détenu par une personne au cours du temps. On considère aussi le temps d'atteinte,

$$\tau := \inf\{t \geq 0,\ X_t = 0\}$$

et on cherche à calculer la probabilité de ruine, c'est à dire $\mathbb{P}\left(\tau < +\infty\right)$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\left(e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}\right)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien.
2. En déduire que $M_t := e^{-2\mu X_t}$ est aussi une $\mathcal{F}_t$-martingale.
3. En appliquant le théorème d'arrêt, calculer $\mathbb{E}\left[M_{\tau\wedge t}\right]$.
4. On admet que $X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s}} +\infty$. Montrer que $M_{\tau\wedge t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s}} \mathbb{1}_{\tau<+\infty}$.
5. En déduire la probabilité de ruine $\mathbb{P}\left(\tau < +\infty\right)$.