Résumé de la thèse / Projet de recherche

Grégoire Loeper

1 Activités antérieures à la thèse : étude théorique et numérique des écoulements géophysiques

Après un DEA d'analyse non-linéaire à Dauphine, j'ai effectué mon mémoire de DEA au Laboratoire de Météorologie Dynamique de L'ENS, sous la direction jointe de Claude Basdevant et Hector Teitelbaum, sur le thème de l'analyse de la perméabilité du vortex polaire arctique, et de ses implications dans les mécanismes de destruction de l'ozone stratosphérique.

J'ai ensuite effectué un séjour de recherche de 8 mois à UCLA en 97/98, au département Atmospheric Sciences, sous la direction de M. Ghil et K. Ide. L'objectif était d'exploiter un code de simulation de la circulation océanique forcée par le vent dans l'Atlantique Nord. Le modèle est le système quasi-géostrophique 2-d avec forcage et dissipation. L'équation suivie par la fonction de courant ψ est alors

$$\partial_t(\Delta\psi - F\psi) + J(\psi,\Delta\psi) + \beta\partial_x\psi = -R\Delta\psi + \nu\Delta^2\psi + \mathrm{curl}\tau,$$

où $J(\cdot,\cdot)$ désigne le déterminant Jacobien et correspond au terme d'advection, $\beta\psi_x$ vient de la variation de la force de Coriolis ('l'effet beta') et τ est le forçage du vent. Grâce à ce code on peut mettre en évidence les différentes biffurcations du système à mesure que la force du vent augmente : rupture de symétrie, biffurcation de Hopf, transistion vers le chaos. Une étude numérique et théorique approfondie a permis de travailler sur des critères d'instabilité permettant d'expliquer les différentes biffurcations observées sur ce type de système. J'ai établi des inégalités d'énergie qui quantifient le transfert d'énergie entre l'état moyen et les perturbations. Ces inégalités permettent ensuite d'obtenir des conditions de stabilité. Un article à ce sujet écrit en collaboration avec M. Ghil, K. Ide et E. Simonet (CNRS, INLN, Nice) sera prochainement soumis à publication.

2 Résumé de la thèse

Ma thèse consiste de manière générale en une étude de différentes équations aux dérivées partielles (EDP) de la mécanique des fluides (notammment géophysiques et cosmologiques) et de la physique des plasmas à la lumière du transport optimal. Les questions abordées ont été les suivantes :

1. Une approximation géométrique de l'équation d'Euler incompressible : étude des systèmes Euler/Vlasov-Monge-Ampère et du système Euler-Poisson.
2. Le problème de reconstruction en cosmologie : reconstruction d'écoulements solution du sytème Euler-Poisson gravitationnel à partir des données initiales et finales de densité.
3. Questions de régularité pour la factorisation polaire des applications : étude de la linéarisation de l'équation de Monge-Ampère.
4. Les équations semi-géostrophiques de la météorologie : solutions à valeurs dans les mesures, solutions fortes, questions d'unicité.
5. Turbulence électrique dans les plasmas : une limite diffusive.

2.1 Les systèmes Euler-Monge-Ampère et Vlasov-Monge-Ampère

L'équation d'Euler incompressible décrit le mouvement d'un fluide parfait incompressible dans un domaine Ω

$$\begin{aligned} &\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ &\nabla \cdot u = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Grâce à la célèbre interprétation dite d'Arnold ([1]), on sait que les solutions de ce système décrivent (formellement) les géodésiques pour la métrique L^2 sur le semi-groupe $G(\Omega)$ des applications de Ω dans lui-même préservant la mesure. On définit alors un système de géodésiques approchées : soit une application $\mathbf{X}$: $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \mapsto \mathbf{X}_t(x) \in \mathbb{R}^d$, (on suppose Ω borné) pour chaque t on définit $\pi_{\mathbf{X}_t}$ tel que

$$\|\mathbf{X}_t - \pi_{\mathbf{X}_t}\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{\mathbf{g} \in G(\Omega)} \|\mathbf{X}_t - \mathbf{g}\|_{L^2(\Omega)} = d(\mathbf{X}_t, G(\Omega)). \tag{2}$$

Supposant pour l'instant que ce problème ait une unique solution, on cherche $\mathbf{X}$ (on supprime l'indice t) solution du problème d'évolution suivant :

$$\partial_{tt}\mathbf{X} = \frac{1}{\varepsilon^2}(\pi_{\mathbf{X}} - \mathbf{X}). \tag{3}$$

De manière formelle, ce système devrait converger, pour des données bien préparées, vers une géodésique de $G(\Omega)$: en effet l'énergie du système donnée par

$$E = \frac{1}{2}\|\partial_t \mathbf{X}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon^2} d^2(\mathbf{X}, G(\Omega))$$

est conservée. Pour des données bien préparées, $\mathbf{X}$ restera donc à distance d'ordre ε de $G(\Omega)$, de plus l'accélération est orthogonale à $G(\Omega)$ en $\pi_{\mathbf{X}}$, ce qui caractérise une géodésique.

Le problème (2) a été résolu par Y. Brenier dans [4]. On définit $\rho = \mathbf{X}_{\#}dx$ la mesure image de la mesure de Lebesgue par l'application $\mathbf{X}$:

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, d\rho(y) = \int_{\Omega} f(\mathbf{X}(x))\, dx,$$

alors si ρ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la solution $\pi_{\mathbf{X}}$ du problème (2) existe et est unique, et on a la décomposition (polaire) suivante :

$$\pi_{\mathbf{X}} = \nabla\Psi \circ \mathbf{X} \tag{4}$$

avec $\Psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ convexe. Cette décomposition est connue sous le nom de factorsation polaire. De plus Ψ satisfait en un sens faible l'équation de Monge-Ampère

$$\det D^2\Psi = \rho_{\mathbf{X}} \tag{5}$$

avec la condition que $\nabla\Psi(x) \in \Omega$ pour ρ presque tout x. Ce probème est connu commme le "deuxième problème avec donnée au bord" pour l'équation de Monge-Ampère. Il fait le lien entre le transport optimal et les EDP elliptiques pleinement non linéaires.

2.1.1 Euler-Monge-Ampère

La formulation hydrodynamique de l'équation (3) est la suivante :

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho u) = 0 \tag{6}$$

$$\partial_t u + u\cdot\nabla u = \nabla\phi \tag{7}$$

$$\det(I + \varepsilon^2 D^2\phi) = \rho. \tag{8}$$

La fonction $|x|^2/2 + \varepsilon^2\phi$ est convexe et joue ici le rôle de Ψ dans (4). J'ai montré la convergence des solutions de ce système vers les solutions de l'équation d'Euler incompressible. Le résultat est le suivant : Pour (u_{ema}, ρ_{ema}) solution de (6, 7, 8), pour $\bar{u}$ une solution suffisament régulière de (1) et pour des données bien préparées, $u_{ema} - \bar{u} = O(\varepsilon)$, $\rho_{ema} - 1 = O(\varepsilon^2)$ en normes H^s pour s aussi grand que l'on veut. Ce résultat est valide sur l'intervalle de temps où $\bar{u}$ est régulière. Noter que la preuve de l'existence de solutions de (6, 7, 8) en temps indépendant de ε s'obtient en même temps que la convergence.

2.1.2 Lien avec la limite quasi-neutre du système Euler-Poisson

Formellement dans la limite $\varepsilon \to 0$, l'expression $\det(I + \varepsilon^2 D^2\phi) = \rho$ se linéarise en $\varepsilon^2 \Delta\phi = \rho - 1 + O(\varepsilon^4)$. En remplaçant ainsi (8) on obtient le système Euler-Poisson sans pression

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \tag{9}$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = \nabla \phi \tag{10}$$

$$\varepsilon^2 \Delta\phi = \rho - 1. \tag{11}$$

Ce système décrit le comportement d'un plasma sans collisions où les ions sont au repos, et le petit paramètre ε^2 vient de la permitivité électrique du vide. On s'attend donc à ce que dans la limite $\varepsilon \to 0$, les systèmes Euler-Poisson (EP) et Euler-Monge-Ampère (EMA) soient proches à un ordre plus élevé que ne le sont (EMA) et Euler incompressible (EI). (EP) apparait donc comme un correcteur pour (EMA) dans la limite incompressible ou quasi-neutre.

J'ai tout d'abord montré pour (EP) un résultat de convergence vers (EI) en norme H^s, s grand, pour des données bien préparées : pour (u_{ep}, ρ_{ep}) solution de (EP), $\bar{u}$ solution de (EI) on a $u_{ep} - \bar{u} = O(\varepsilon)$, $\rho_{ep} - 1 = O(\varepsilon^2)$. C'est la limite dite 'quasi-neutre'.

J'ai ensuite justifié rigoureusement l'asymptotique (EMA) vers (EP) et j'obtiens le résultat suivant (toujours pour des données bien préparées) :
$u_{ema} - u_{ep} = O(\varepsilon^2)$, $\rho_{ema} - \rho_{ep} = O(\varepsilon^3)$.

2.1.3 Vlasov-Monge-Ampère

Le système Vlasov-Monge-Ampère est lié au système Euler-Monge-Ampère de la même manière que Vlasov-Poisson et Euler-Poisson sont liés, l'un étant la version cinétique de l'autre. Il s'écrit comme suit :

$$\partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f + \nabla\phi \cdot \nabla_\xi f = 0 \tag{12}$$

$$\det(I + \varepsilon^2 D^2 \phi) = \rho, \tag{13}$$

avec $\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,\xi) d\xi$. Dans [6], en collaboration avec Y. Brenier (CNRS, UNSA), nous avons obtenu pour ce système, l'existence globale de solutions faibles renormalisées (au sens de [13]), l'existence locale de solutions fortes, la convergence vers la solution d'Euler incompressible pour des données bien préparées, et la correction asymptotique vers Euler Poisson. Ces résultats sont valables pour des solutions faibles, et dans une norme plus faible : on obtient

$$\int f(t,x,\xi) |\xi - \bar{u}(t,x)|^2 \, d\xi dx = O(\varepsilon^2)$$

$$\int f(t,x,\xi) |\xi - u_{ep}(t,x)|^2 \, d\xi dx = O(\varepsilon^3),$$

toujours avec $\bar{u}$ solution de (EI) et u_{ep} solution de (EP). De même cette estimation est valide tant que la solution de (EI) est suffisament régulière.

2.2 Le problème de reconstruction en cosmologie

Je me suis également intéressé dans ma thèse ([17], Chap. 6) à un problème variationnel lié au transport optimal, motivé par une application immédiate à un problème de cosmologie : le problème de reconstruction (cf. [14]). Le problème est de retrouver l'histoire de la répartition de matière dans l'univers en connaissant la densité initiale et actuelle. Il peut donc s'interpréter comme un cas particulier de reconstruction d'un écoulement à partir de données incomplètes. En admettant qu'aux échelles considérées l'Univers soit décrit par le sytème Euler-Poisson gravitationnel, il s'agit de trouver une solution à ce dernier, non pas connaissant la densité et vitesse initiales (problème de Cauchy), mais en connaissant les densités initiale et finale (problème de reconstruction). Une première approche s'appuyant sur l'approximation de Zel'dovich, néglige l'effet de la gravité (en coordonnées comobiles du moins) et permet de traiter le problème comme un problème de transport optimal avec coût quadratique. Ce travail a fait l'objet d'un article écrit en collaboration ([5]). J'ai traité dans ma thèse le problème complet, en prenant en compte les effets non-linéaires dus à la gravité. On montre alors que la solution s'obtient en résolvant un problème variationnel lié au transport optimal :

$$\inf_{\rho,u} \int_{\mathbb{T}^d} \int_{[0,T]} \rho \frac{|u|^2}{2} + \mathcal{F}(\rho)\, dt dx \tag{14}$$

$$\mathcal{F}(\rho) = \frac{1}{2}|\nabla p|^2, \;\; p = \Delta^{-1}(\rho - 1), \tag{15}$$

où l'on minimise parmi les paires (densité, vitesse) (ρ, u) satisfaisant

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \tag{16}$$

$$\rho(t=0) = \rho_0, \qquad \rho(t=T) = \rho_T. \tag{17}$$

Le résultat est alors le suivant : pour ρ_0 et ρ_T dans L^{p_0}, p_0 dépendant de la dimension d, on a existence et unicité du minimiseur. Ce minimiseur est solution faible de

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = -\rho \nabla p,$$

couplé à (15, 16, 17). De plus $u = \nabla_x \phi$ pour un certain ϕ et on la borne *inconditionnelle* (i.e. indépendante de ρ_0, ρ_T) suivante :

$$\forall \tau \in]0, T/2], \; \|\rho\|_{L^\infty([\tau, T-\tau] \times \mathbb{T}^d)} \leq C_\tau.$$

Les méthodes développées se généralisent à toute une classe de problèmes du même type dès lors que $\mathcal{F}$ est une fonctionnelle convexe en ρ. Noter que le cas $\mathcal{F}(\rho) = \rho^\gamma$ donne la dynamique des gaz mais avec pression négative, cette application est rencontrée dans des problèmes de grandes déviations pour les matrices aléatoires. Ces techniques peuvent également être utilisées pour la reconstruction d'écoulements incompressibles à partir de données lagrangiennes, comme il a été noté dans [7], et peuvent donc fournir une approche nouvelle pour l'assimilation de données.

2.3 Régularité de la factorisation polaire pour des applications dépendant du temps

Comme on l'a vu plus haut, toute application $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ se factorise en

$$\mathbf{X} = \nabla\Phi \circ \mathbf{g} \tag{18}$$

avec Φ convexe et $\mathbf{g}$ préservant la mesure de Lebesgue de Ω. L'étude de la régularité des termes de cette décomposition en fonction de la régularité de $\mathbf{X}$ et de $\rho_\mathbf{X} = \mathbf{X}_\# dx$ a fait l'objet de nombreux travaux, notamment ceux de Caffarelli et Urbas. L'étude de la régularité quand l'application dépend d'un paramètre (le "temps") apparait naturellement dans les applications pratiques du transport optimal, par exemple dans l'étude des équations semi-géostrophiques.

J'ai obtenu des résultats à partir d'estimations sur la linéarisation de l'équation de Monge-Ampère. En effet, si $\Phi(t)$ est comme dans (18) pour tout t, alors $\partial_t\Phi$ est solution d'un problème elliptique dégénéré venant de la linéarisation de (5).

Sous la seule hypothèse que ρ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathbf{X}, \partial_t\mathbf{X}$ sont bornées dans $L^\infty(\Omega)$ j'obtiens que $\partial_t\nabla\Phi, \partial_t\mathbf{g}$ sont des mesures bornées sur Ω. De plus $\sup_{x\in\Omega} |\Phi(t_1,x) - \Phi(t_2,x)| \leq c|t_2 - t_1|^\alpha$ pour un certain $\alpha > 0$.

Si de plus $\rho \geq \lambda > 0$ sur Ω' ouvert convexe, alors je montre également que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, $\sup_{x\in\omega} |\nabla\Phi(t_1,x) - \nabla\Phi(t_2,x)| \leq c|t_2 - t_1|^\beta$ pour un certain $\beta > 0$.

2.4 Les équations semi-géostrophiques de la météorologie

Les équations semi-géostrophiques sont un modèle utilisé en météorologie pour décrire la formation des fronts. Elles sont obtenues à partir des équations d'Euler 3-d incompressible à travers une succession d'approximations liées aux ordres de grandeurs rencontrés dans le contexte géophysique. L'étude de ces équations a reçu une attention grandissante ces dernières années, notamment sous l'impulsion de M. Cullen [10]. Le système se formule ainsi :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \tag{19}$$

$$u = [\nabla \Psi - x]^\perp \tag{20}$$

$$\det D^2 \Psi = \rho, \tag{21}$$

où (21) s'entend au sens $\nabla \Psi_{\#} \rho = \mathbf{1}_\Omega \mathcal{L}^3$, et pour tout $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = (-v_2, v_1, 0)$.

Mes résultats sur le sujet concernent tout d'abord l'existence de solutions à données mesures : en effet, le terme non-linéaire dans (19) n'est pas défini dans ce cas, et il faut employer une nouvelle formulation pour étendre le concept de solution aux mesures. Cette formulation est stable pour la topologie faible$-*$ et cohérente avec les solutions faibles classiques ([2],[9]).

J'ai également prouvé l'existence de solutions fortes localement en temps ainsi que l'unicité des solutions fortes ([17], Chap. 5). De plus les résultats sur la linéarisation de la factorisation polaire ([17], Chap. 4) permettent de définir la vitesse dans l'espace physique, ce qui n'était pas connu auparavant.

2.5 Turbulence dans les plasmas et modélisation du chauffage dans les tokamaks

Ce travail, a paraitre dans [19], a été réalisé en collaboration avec A. Vasseur (CNRS, UNSA), dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire Dieudonné de l'UNSA et le CEA Cadarache. On étudie le comportement d'un plasma bidimensionnel soumis simultanément à un fort champ magnétique transverse (limite gyrocinétique) et à un fort champ éléctrique turbulent. L'application en vue est l'étude des tokamaks, et notamment la phase de chauffage du plasma par un champ éléctrique. L'équation étudiée est alors :

$$\partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f + \left(\frac{\xi^\perp}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} E^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \cdot \nabla_\xi f = 0.$$

Sous des hypothèses de décorrélation du champ éléctrique, et en s'appuyant sur des techniques développées dans [21], on trouve alors que f tend faiblement vers sa gyromoyenne $\mu(t,x,e) = \frac{1}{2\pi\sqrt{e}} \int_{|\xi|^2 = e} f(t,x,\xi)\, d\xi$, et que μ satisfait l'équation de diffusion

$$\partial_t \mu + \partial_e (a(e) \mu(e)) = 0$$

où $a(e)$ est une fonction explicite des coefficients de corrélation de E.

3 Activités de recherche postérieures à la thèse

3.1 Un problème elliptique dégénéré : la linéarisation de l'équation de Monge-Ampère

Dans la suite de ma thèse (paragraphe 2.3), je me suis intéressé à l'équation de Monge-Ampère linéarisée : pour u solution de $\det D^2u = \rho$, on cherche v solution de l'équation

$$\nabla \cdot (M(x)\nabla v) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}), \tag{22}$$

M étant la comatrice de la Hessienne D^2u, et $\mathbf{q}$ un champ de vecteurs borné mesurable. Au vu des résultats de régularité connus pour l'équation de Monge-Ampère (voir [8]) , un cadre naturel pour les applications est celui où la condition habituelle d'ellipticité sur M est remplacé par la condition suivante : $M + M^{-1} \in L^p_{loc}$ pour un certain p. Dans ce cas, l'équation (22) est donc une EDP elliptique dégénérée, J'ai obtenu dans [18] que dans le cas où $\mathbf{q} \in L^\infty$, et la densité ρ est proche en norme L^∞ d'une fontion continue positive, alors v satisfait une inégalité de Harnack, ce qui entraine $v \in C^\alpha$ pour un certain $\alpha \in]0,1[$. Ce résultat utilise des travaux à la fois sur les EDP elliptiques de type divergence (solutions faibles au sens des distributions) et non-divergence (solutions de viscosité).

3.2 Les équations semi-géostrophiques, questions d'unicité pour les systèmes de transport couplés

Dans le prolongement de ma thèse (paragraphe 2.4), j'ai travaille sur l'analyse asymptotique du modèle semi-géostrophique, notamment sur la justification rigoureuse de sa dérivation à partir des équations d'Euler incompressible. En effet pour $\bar{u}$ solution de (1) et (ρ_{sg}, u_{sg}) solution de (19, 20, 21), en dimension 2, on s'attend à trouver que pour des petites données, $\bar{u} - u_{sg} = o(\bar{u})$ dans la limite $\bar{u} \to 0$. J'ai justifié rigoureusement cette limite, dans le cadre de solutions faibles et dans le cadre de solutions régulières (dans ce cas on obtient au passage un résultat d'existence quasi-global pour les solutions fortes).

J'ai également obtenu une méthode originale permettant de prouver l'unicité des solutions fortes dans un cadre plus large que ce qui avait été fait dans ma thèse. Cette méthode nouvelle utilise le transport optimal, et peut être utilisée dans d'autres situations : par exemple, elle fournit une nouvelle preuve de l'unicité des solutions de l'équation d'Euler 2-d avec tourbillon borné (Théorème de Youdovitch). Ces nouveaux résultats ont été soumis à publication ([16]).

La méthode utilisée pour prouver l'unicité est la suivante (dans le cas Euler-

2d) : on considère le système couplé

$$\partial_t X = \nabla\Psi^{\perp}(t,X),$$
$$\Delta\Psi = \rho, \ \ \rho = X(t,\cdot)_{\#}\rho_0$$

où ρ désigne la vorticité, et la dernière relation signifie que la vorticité ρ est simplement transportée par le champ de vitesse. La méthode permet d'obtenir une inégalité de type Gronwall pour $Q = \|X_1 - X_2\|_{L^2}$ où X_1, X_2 sont deux solutions. Le problème est de contrôler $\|\nabla\Psi_1 - \nabla\Psi_2\|_{L^2}$ en fonction de Q. C'est ici que le transport optimal et la régularité elliptique fournissent une méthode originale, qui de plus reste valide si l'on remplace l'opérateur Δ par un autre opérateur elliptique, notamment un opérateur pleinement non-linéaire et donc en particulier pour l'opérateur de Monge-Ampère et les équations semi-géostrophiques.

Concernant ces dernières, noter que l'unicité des solutions faibles reste un problème ouvert.

3.3 Régularité du transport optimal sur les variétés riemanniennes

La question ici est celle de la régularité des solutions de l'équation de type Monge-Ampère qui apparait lorsque l'on traite le problème de transport optimal avec coût quadratique sur une variété Riemannienne ([20]). En effet cette équation beaucoup plus complexe que dans le cas euclidien fait intervenir des quantités qui dépendent de la géométrie globale de la variété, notamment du cut-locus ([11]). En collaboration avec P. Delanoë (CNRS, UNSA), nous avons déjà obtenu [12], sur la sphère, une estimation C^1, étape préliminaire à des estimations sur les dérivées d'ordre supérieur. Ces travaux représentent pour moi un important champ d'investigation, qui reste à ce jour inexploré.

3.4 Résolution numérique de l'équation de Monge-Ampère

La résolution numérique des systèmes que j'ai étudiés pendant ma thèse fait partie des mes principaux objectifs. Lors de mon séjour à UCLA (98), et dans [15] je me suis intéressé à la simulation numérique pour le modèle quasi-géostrophique, et je développe à présent des méthodes pour des sytèmes similaires, mais plus non-linéaires où l'équation de Monge-Ampère remplace l'équation de Poisson.

Nous avons developpé un code, en collaboration avec Francesca Rapetti (UNSA), permettant de résoudre l'équation de Monge-Ampère liée au transport optimal dans le cas périodique. La méthode, basée sur un algorithme de type Newton donne de très bons résultats, puisque elle permet de résoudre une équation pleinement non-linéaire au prix d'un nombre fini de systèmes linéaires, donc à un coût optimal. Elle s'applique également à d'autres EDP elliptiques pleinement non-linéaires.

3.5 Contractivité des lois de conservation pour les distances de Wasserstein

En collaboration avec Francois Bolley (ENS Lyon) et Yann Brenier (CNRS, UNSA), nous avons étudié les propriétés de contractivité des lois de conservation pour la métrique de Wasserstein. Pour l'équation

$$u : (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to u(t,x) \in \mathbb{R} \tag{23}$$

$$\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0, \tag{24}$$

nous abordons le cas des solutions croissantes, entre 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$; cette propriété est conservée lors de l'évolution par l'équation (24). La dérivée en espace d'une telle solution est donc une mesure de probabilité. Nous montrons alors que la distance de Wasserstein d'ordre p, pour tout $p \geq 1$, entre les dérivées de deux solutions entropiques décroit avec le temps. Noter que pour le cas particulier $p = 1$, on retrouve par cette méthode un résultat ancien de Kružkov. Ce résultat a fait l'objet d'un article soumis à publication [3]. Un problème intéressant serait maintenant de trouver une extension possible de ce résultat en dimension ≥ 2 où à d'autres sytèmes.

3.6 Problèmes variationnels liés au transport optimal

On s'interesse aux minimiseurs du problème

$$\inf_{\rho,u} \int_{\mathbb{T}^d} \int_{[0,T]} \rho \frac{|u|^2}{2} + \mathcal{F}(\rho)\, dtdx,$$

$\mathcal{F}$ donnée par (15), et sous les contraintes (16, 17). Dans la continuité des résultats énoncés au paragraphe 2.2, j'envisage les développements suivants :

a- La question de la régularité des solutions du problème de minimisation : quand on supprime le deuxième terme de l'intégrande, on retrouve la formulation continue ([2]) du problème de transport optimal avec coût quadratique, et le problème de régularité revient à traiter la régularité des solutions de l'équation de Monge-Ampère, qui est déja un problème complexe. Ici le problème est qu'en général, pour des fonctionnelles $\mathcal{F}$ non linéaires, on ne dispose pas d'une formule implicite telle que l'équation de Monge-Ampère pour déterminer la vitesse à $t = 0, T$. En opérant une discrétisation en temps du système, on peut cependant obtenir un système d'équations elliptiques satisfaites par la solution. Il s'agirait donc d'étudier la régularité des solutions de *systèmes* d'EDP elliptiques.

b- Généraliser, comme il a été dit au paragraphe 2.2, à d'autres fonctionnelles $\mathcal{F}$ que l'énergie gravitationnelle, notamment des fonctionnelles de la forme ρ^γ, et de la forme $\rho(x)V(x)$ pour un potentiel donné V, ce dernier cas offrant peut-être une approche simplifiée pour le problème de régularité. Dans ce dernier cas la question de la régularité des solutions est proche du cas Riemannien du paragraphe 3.3.

c- Faire le lien entre ces problèmes de minimisation et la théorie KAM faible développée (entre autres) par Fathi et Mather. En effet ces questions sont toutes reliées avec la théorie des équations d'Hamilton-Jacobi couplées avec une équation de transport. Ce couplage est intéressant aussi dans la mesure où il apparait dans les problèmes de limite semi-classique. Ce sujet se situe donc à la jonction de nombreux domaines très actifs.

d- L'implémation d'algorithmes (type Lagrangien augmenté par exemple, cf [2]) permettant de résoudre numériquement les problèmes de type (14) en vue des applications. Ce objectif est la suite logique du travail effectué dans [5] où l'on résolvait numériquement le problème de reconstruction en négligeant la gravité.

Références

[1] V. I. Arnold and B. A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics*, volume 125 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[2] J.-D. Benamou and Y. Brenier. A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem. *Numer. Math.*, 84(3) :375–393, 2000.

[3] F. Bolley, Y. Brenier, and G. Loeper. Contractive metrics for scalar conservation laws. in preparation.

[4] Y. Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(4) :375–417, 1991.

[5] Y. Brenier, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee, and A. Sobolevskii. Reconstruction of the early universe as a convex optimization problem. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2(346) :501–524, 2003.

[6] Y. Brenier and G. Loeper. A geometric aprroximation of the euler equations : the Vlasov-Monge-Ampère system. *Geom. Funct. Anal.*, to appear.

[7] Y. Brenier and M. Roesch. Reconstruction d'écoulements incompressibles à partir de données lagrangiennes. In *Actes du 29ème Congrès d'Analyse Numérique : CANum'97 (Larnas, 1997)*, volume 3 of *ESAIM Proc.*, pages 11–22 (electronic). Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 1998.

[8] L. A. Caffarelli. Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation. *Ann. of Math. (2)*, 131(1) :135–150, 1990.

[9] M. Cullen and W. Gangbo. A variational approach for the 2-dimensional semi-geostrophic shallow water equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 156(3) :241–273, 2001.

[10] M. J. P. Cullen and R. J. Purser. Properties of the Lagrangian semigeostrophic equations. *J. Atmospheric Sci.*, 46(17) :2684–2697, 1989.

[11] P. Delanoë. Gradient rearrangement for diffeomorphisms of a compact manifold. to appear in Diff. Geom. Appl.

[12] P. Delanöe and G. Loeper. Gradient estimates for potentials of invertible gradient-mappings on the sphere. preprint Nice, 2004.

[13] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3) :511–547, 1989.

[14] U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee, and A. Sobolevski. A reconstruction of the initial conditions of the universe by optimal mass transportation. *Nature*, 2002.

[15] M. Ghil, K. Ide, G. Loeper, and E. Simonet. Instability energetics for the ocean wind-driven circulation. in preparation.

[16] G. Loeper. Measure valued and classical solutions for the semi-geostrophic equations. in preparation.

[17] G. Loeper. *Applications de l'équation de Monge-Ampère à la modélisation des fluides et des plasmas*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 2003.

[18] G. Loeper. On the regularity of the polar factorisation for time dependent maps. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, to appear.

[19] G. Loeper and A. Vasseur. Electric turbulence in a plasma subject to a strong magnetic field. *Asympt. Anal.*, 40(1) :51–65, 2004.

[20] R. J. McCann. Polar factorization of maps on Riemannian manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 11(3) :589–608, 2001.

[21] F. Poupaud and A. Vasseur. Classical and quantum transport in random media. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, to appear.