Corrigé du Devoir 1

Exercice 1 La preuve est par induction sur les formules. La propriété est évidente pour les formules sans quanteur.

Soient $\phi_1(\bar{x})$ et $\phi_2(\bar{y})$ deux formules telles que

$$\phi_1(\bar{x}) \Leftrightarrow Q_1 z_1 \cdots Q_n z_n \psi_1(\bar{z}, \bar{x}), \quad \phi_2(\bar{y}) \Leftrightarrow Q'_1 t_1 \cdots Q'_m t_m \psi_2(\bar{t}, \bar{y}),$$

où ψ_1 et ψ_2 sont sans quanteur. Quitte à renommer les variables, on peut supposer $\bar{x} \cap \bar{z} = \emptyset$, $\bar{y} \cap \bar{t} = \emptyset$, $(\bar{z} \cup \bar{t}) \cap (\bar{x} \cup \bar{y}) = \emptyset$.

⋄ (Négation) $\neg\phi_1(\bar{x}) \Leftrightarrow \bar{Q}_1 z_1 \cdots \bar{Q}_n z_n \neg\psi_1(\bar{z}, \bar{x})$, où $\bar{\forall} = \exists$ et $\bar{\exists} = \forall$.

⋄ (Conjonction) On va utiliser la propriété suivante qui est facile à démontrer : si $\phi(x)$ et $\psi(\bar{z})$ sont deux formules telles que x n'apparaît pas dans $\bar{z}$, alors

$$\forall x \phi(x) \wedge \psi(\bar{z}) \Leftrightarrow \forall x(\phi(x) \wedge \psi(\bar{z})), \quad \exists x \phi(x) \wedge \psi(\bar{z}) \Leftrightarrow \exists x(\phi(x) \wedge \psi(\bar{z})).$$

Comme $(\bar{z} \cup \bar{t}) \cap (\bar{x} \cup \bar{y}) = \emptyset$ et en appliquant la propriété ci-dessus, la formule $Q_1 z_1 \cdots Q_n z_n \psi_1(\bar{z}, \bar{x}) \wedge Q'_1 t_1 \cdots Q'_m t_m \psi_2(\bar{t}, \bar{y})$ est équivalente à la formule

$$Q_1 z_1 \cdots Q_n z_n Q'_1 t_1 \cdots Q'_m t_m (\psi_1(\bar{z}, \bar{x}) \wedge \psi_2(\bar{t}, \bar{y})),$$

qui est une formule prénexe.

⋄ (Quantification existentielle) évidente.

Exercice 2 Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures dénombrables et soit $\mathcal{K}$ un va-et-vient entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Ecrivons $M = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $N = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons, par récurrence sur n, qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{K}$ telle que

(1) $\mathrm{Dom}(f_n) \subseteq \mathrm{Dom}(f_{n+1})$,
(2) $a_n \in \mathrm{Dom}(f_n)$, $b_n \in \mathrm{Im}(f_n)$.

Pour $n = 0$. Soit $\sigma \in \mathcal{K}$. Par la propriété du va, il existe $\sigma_1 \in \mathcal{K}$ prolongeant σ tel que $a_0 \in \mathrm{Dom}(\sigma_1)$. Par la propriété du vient, il existe $\sigma_2 \in \mathcal{K}$ prolongeant σ_1 tel que $b_0 \in \mathrm{Im}(\sigma_2)$. En posant $f_0 = \sigma_2$, les propriétés (1) et (2) sont vérifiées.

Pour $n + 1$. Par la propriété du va, il existe $\sigma_1 \in \mathcal{K}$ prolongeant f_n tel que $a_{n+1} \in \mathrm{Dom}(\sigma_1)$. Par la propriété du vient, il existe $\sigma_2 \in \mathcal{K}$ prolongeant σ_1 tel que $b_{n+1} \in \mathrm{Im}(\sigma_2)$. En posant $f_{n+1} = \sigma_2$, on obtient les propriétés (1) et (2). Ceci achève la preuve de la construction de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $f : M \to N$, définit par $f(a_n) = f_n(a_n)$ et montrons que f est un isomorphisme. Par (1) et (2), f est bien définie et elle est surjective. Par la Proposition 1 du cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute formule $\phi(x_0, \cdots, x_n)$ on a

$$\mathcal{M} \models \phi(a_0, \cdots, a_n) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(f(a_0), \cdots, f(a_n)).$$

Par conséquent :

$\diamond$ pour tout symbole de constante c dans $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{M} \models c = a_n \text{ ssi } \mathcal{N} \models c = f(a_n),$$

et ce qui prouve $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$,

$\diamond$ pour tout symbole de fonction m-aire h,

$$\mathcal{M} \models h(a_{i_1}, \cdots, a_{i_m}) = a_j \text{ ssi } \mathcal{N} \models h(f(a_{i_1}), \cdots, f(a_{i_m})) = f(a_j),$$

ce qui prouve que pour tout $\bar{a} \in M^m$, $f(h^{\mathcal{M}}(\bar{a})) = h^{\mathcal{N}}(f(\bar{a}))$,

$\diamond$ De même pour les symboles de relations.

Donc f est bien un isomorphisme.

Exercice 3 Soit $\mathcal{L} = \{E\}$ où E est un symbole de relation binaire.

(1) Uune axiomatisation T de la théorie de la relation d'équivalence ayant une infinité de classes et dont toute classe est infinie peut être la suivante :

$\diamond$ E est une relation d'équivalence :

$$\forall x(xEx), \quad \forall x\forall y(xEy \Rightarrow yEx), \quad \forall x\forall y\forall z((xEy \wedge yEz) \Rightarrow xEz),$$

$\diamond$ toute classe est infinie : la suite d'énoncés suivants

$$\forall x \exists y_0 \cdots \exists y_n (\bigwedge_{0 \leq i,j \leq n, i \neq j} y_i \neq y_j \wedge \bigwedge_{0 \leq i \leq n} xEy_i), \quad n \in \mathbb{N},$$

$\diamond$ une infinité de classes : la suite d'énoncés suivants

$$\exists y_0 \cdots \exists y_n (\bigwedge_{0 \leq i,j \leq n, i \neq j} \neg y_i E y_j), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(2) Montrons que T a un unique modèle dénombrable (à isomorphisme près). Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles dénombrables de T. Soit $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (resp. $(J_i)_{i \in \mathbb{N}}$) la liste des classes d'équivalences de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$). Comme chaque I_i est infini et $\mathcal{M}$ est dénombrable, I_i est dénombrable; de même pour J_i. On peut choisir donc une bijection $f_i : I_i \to J_i$.

Soit $f : M \to N$ l'application définie par $f(x) = f_i(x)$ si $x \in I_i$. Alors f est bien définie et elle est surjective. Il n'est pas très difficile de vérifier que

$$\mathcal{M} \models xEy \text{ ssi } \mathcal{N} \models f(x)Ef(y).$$

Par conséquent f est un isomorphisme.

(3) Montrons que T est complète. Remarquons d'abord que T n'a que des modèles infinis. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles de T. D'après le théorème de Loïwenheim-Skolem descendant, $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) a une sous-structure élémentaire dénombrable $\mathcal{M}'$ (resp. $\mathcal{N}'$). Comme $\mathcal{M}' \models T$, $\mathcal{N}' \models T$, on a $\mathcal{M}' \cong \mathcal{N}'$. Par conséquent $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{N}'$, et comme $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}'$, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$, on obtient $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Exercice 4 On travaille dans le langage $\mathcal{L}_{gp} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$. Soit G un groupe infini simple. D'après le théorème de Loïwenheim-Skolem descendant, G a une sous-structure élémentaire dénombrable H. Il est claire que H est un sous-groupe de G. Il suffit de montrer que H est simple, et pour cela il suffit de montrer que la clôture normale de tout élément non trivial $a \in H$ est H tout entier.

Soit $a \in H$ non trivial et soit $b \in H$. Comme G est simple, b est dans la clôture normale (dans G) de a. Donc

$$G \models \exists y_1 \cdots \exists y_n (b = y_1 a^{\varepsilon_1} y_1^{-1} \cdots y_n a^{\varepsilon_n} y_n^{-1}), \quad \text{où } \varepsilon_i = \pm 1. \tag{1}$$

Comme H est une sous-structure élémentaire de G, H vérifie la formule qui apparaît dans (1) et donc b est bien dans la clôture normale (dans H) de a.

Exercice 5 Soient $X \subseteq Y$ deux ensembles infinis et soit F_X (resp. F_Y) le groupe libre de base X (resp. Y). On considère F_X comme une sous-structure de F_Y dans le langage des groupes $\mathcal{L}_{gp} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$.

Montrons que $F_X \prec F_Y$. Pour cela, on montre par induction sur les formules que pour tout sous-ensemble infini $X \subseteq Y$, pour tout $\bar{a} \in F_X$, pour toute formule $\phi(\bar{x})$,

$$F_X \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow F_Y \models \phi(\bar{a}). \tag{1}$$

La propriété (1) est évidement vraie si $\phi(\bar{x})$ est une formule sans quanteur car F_X est une sous-strcuture de F_Y; elle reste aussi vraie par passage à la négation et aux conjonctions. Il reste à vérifier la quantification existentielle.

$\diamond$ Soit $\phi(\bar{x}, y)$ une formule telle que $F_X \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$. Alors il existe $b \in F_X$ tel que $F_X \models \phi(\bar{a}, b)$. Par induction $F_Y \models \phi(\bar{x}, b)$ et donc $F_Y \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$.

$\diamond$ Supposons que $F_Y \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$ et soit $b \in F_Y$ tel que $F_Y \models \phi(\bar{a}, b)$. Alors il existe $y_1, \cdots, y_n$ dans Y tel que b est dans le sous-groupe engendré par $X \cup \{y_1, \cdots, y_n\}$ et $X \cap \{y_1, \cdots, y_n\} = \emptyset$.

De même il existe une partie finie $X_0 \subseteq X$ telle que $\bar{a}$ est dans le sous-groupe engendré par X_0, et b dans le sous-groupe engendré par $X_0 \cup \{y_1, \cdots, y_n\}$.

Comme X est infini, on peut trouver $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq X \setminus X_0$.

Soit

$$T = X \setminus \{x_0, \cdots, x_n\} \cup \{y_1, \cdots, y_n\}.$$

Comme $\bar{a}, b \in F_T$, et $F_Y \models \phi(\bar{a}, b)$, d'après l'hypothèse d'induction, $F_T \models \phi(\bar{a}, b)$.

Soit $f : T \to X$ définie par

$$f(x) = x \text{ pour } x \in X \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}, \quad f(y_i) = x_i.$$

Alors f est une bijection, et d'après les propriétés des groupes libres, elle se prolonge en un isomorphisme $\bar{f} : F_T \to F_X$. Par conséquent

$$F_T \models \phi(\bar{a}, b) \Leftrightarrow F_X \models \phi(\bar{f}(\bar{a}), \bar{f}(b)).$$

Or, comme $\bar{a}$ est dans le sous-groupe engendré par $X_0 \subseteq X \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$, et $\bar{f}$ est l'identité sur $X \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$, on obtient $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{a}$. Finalement on obtient

$$F_X \models \phi(\bar{a}, \bar{f}(b)),$$

et donc $F_X \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$.

Remarques.

(1) Le problème de l'équivalence élémentaire des groupes libres a été posé par Tarski vers 1945 : si X et Y sont deux ensembles, $|X| \geq 2, |Y| \geq 2$, a-t-on $F_X \equiv F_Y$? Donc, le résultat de l'exercice répond à cette question dans le cas où X et Y sont ifninis. Ce résultat a été exposé par Vaught en 1955, lors d'un meeting à Pittsburgh, mais à ma connaissance aucune démonstration n'a été publiée. On trouve l'énoncé de son théorème dans : R. L. Vaught, *On the airthmetical equivalence of free algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), 174-175.

Il restait le problème de savoir si les groupes libres de rang fini $n \geq 2$ sont élémentairement équivalents. Appelons, pour chaque $n \geq 1$, F_n le groupe libre à n générateurs. Il n'est pas très difficile de voir que F_n et F_m, pour $n, m \geq 2$, satisfont les mêmes énoncés universels, car F_n contient une copie de F_m et vice-versa. En 1966, Makanin a démontré que F_n et F_m satisfont les mêmes énoncés postifs; ce sont les énoncés construit par induction sans inclure la négation. Ensuite en 1973 Sacerdote démontre que F_n et F_m satisfont les mêmes énoncés à deux alternances de quanteurs.

Plus récemment, la conjecture de Tarski a été résolue par la positive : la première annonce de sa résolution date de 1998 et est due à O. Kharlampovich et A. Myasnikov, la seconde en 2000, en utilisant des méthodes de la théorie géométriques des groupes, est due à Z. Sela.

(1) Le résultat de l'exercice est facilement généralisable à toute variété de groupes. En particulier on obtient pour les groupes libres n-résolubles (n-nilpotents) $R_X \prec R_Y$ (resp. $N_X \prec N_Y$), quand $X \subseteq Y$, X et Y sont infinis. L'histoire est toute autre dans le cas où X et Y sont finis : on sait que pour les deux classes, il n'y pas d'équivalence élémentaire entre les groupes libres de rang fini différents.

Exercice 6 Soit $\mathcal{L}$ le langage constitué d'un symbole de relation binaire E et d'un ensemble infini de symboles de constantes $\{c_0, \cdots, c_n, \cdots\}$.

Soit F une formule close de $\mathcal{L}$ exprimant que E s'interprète comme un ordre strict total dense sans extrémités. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n la formule $E(c_n, c_{n+1})$. On considère la théorie :

$$T = \{F\} \cup \{\phi_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

On désigne par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ les trois $\mathcal{L}$-structures dont l'ensemble de base est $\mathbb{Q}$, où E s'interprète comme l'ordre strict usuel, et où la suite de symboles de constantes $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est interprétée respectivement par les suites de rationnels :

$$\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

définies par

$$\alpha_n = n,\ \beta_n = \frac{-1}{n+1},\ \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(1) On va montrer que deux modèles dénombrables de T sont élémentairement équivalents; la conclusion que T est complète se fait comme dans l'exercice 3 (3), en utilisant le théorème de Loïwenheim-Skolem descendant.

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles dénombrables de T. Soit $\mathcal{L}'$ le langage constitué seulement du symbole de relation binaire E. On considère la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}'$ (resp. $\mathcal{N}'$) obtenue à partir de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) en ne gardant que l'interprétation de E; i.e. $\mathcal{M}'$ (resp. $\mathcal{N}'$) est le réduit de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) à $\mathcal{L}'$. Alors $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$ sont deux ordre denses sans extrémités, et donc $\mathcal{M}' \cong (\mathbb{Q}, <)$ et $\mathcal{N}' \cong (\mathbb{Q}, <)$. Un modèle dénombrable de T n'est rien d'autre que $(\mathbb{Q}, <)$ avec l'interprétation de la suite $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ comme étant une suite strictement croissante.

Soit $\mathcal{L}_n$ le langage $\{E\} \cup \{c_1, \cdots, c_n\}$. Soit $\mathcal{M}_n$ (resp. $\mathcal{N}_n$) le réduit de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) au langage $\mathcal{L}_n$. Avec la même méthode que celle utilisée dans le cours on peut construire un va-et-vient entre $\mathcal{M}_n$ et $\mathcal{N}_n$ (dont tout élément σ vérifie $\sigma(c_i^{\mathcal{M}_n}) = c_i^{\mathcal{N}_n}$). Par conséquent $\mathcal{M}_n \equiv \mathcal{N}_n$.

Toute énoncé de $\mathcal{L}$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de symboles de constantes $\{c_1, \cdots, c_n\}$. Donc si $\mathcal{M} \models \phi$ alors $\mathcal{M}_n \models \phi$ et donc $\mathcal{N}_n \models \phi$ et donc $\mathcal{N} \models \phi$ (et vice-versa). Ceci achève la preuve que deux modèles dénombrables sont élémentairement équivalents.

(2) Soit $\mathcal{M}$ un modèle dénombrable de T. Alors $\mathcal{M}$ peut être vu comme étant $(\mathbb{Q}, <)$ muni d'une suite infinie a_n strictement croissante avec a_n est l'interprétation de c_n. Trois cas peuvent se présenter.

Cas 1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Dans ce cas $\mathcal{M} \cong \mathfrak{A}$. Comme les deux intervalles $]-\infty, c_0[$ (resp. $]c_n, c_{n+1}[$) et $]-\infty, 0[$ (resp. $]n, n+1[$) sont des ordres denses sans extrémités, il existe un isomorphisme f_- (resp. f_n) entre eux. En définissant $f : \mathcal{M} \to \mathfrak{A}$ par

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{pour } x = c_n, \\ f_-(x), & \text{pour } x \in]-\infty, c_0[, \\ f_n(x), & \text{pour } x \in]c_n, c_{n+1}[. \end{cases}$$

on obtient un isomorphisme.

Cas 2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée de limite rationnelle ℓ. Dans ce cas, $\mathcal{M} \cong \mathfrak{B}$. Comme dans le cas 1, il existe des isomorphismes

$$f_- :]-\infty, c_0[\to]-\infty, -1[, \quad f_n :]c_n, c_{n+1}[\to]\frac{-1}{n+1}, \frac{-1}{n+2}[, \quad f_\ell :]\ell, +\infty[\to]0, +\infty[.$$

En définissant $f : \mathcal{M} \to \mathfrak{B}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{n+1}, & \text{pour } x = c_n, \\ f_-(x), & \text{pour } x \in]-\infty, c_0[, \\ f_n(x), & \text{pour } x \in]c_n, c_{n+1}[, \\ 0, & \text{pour } x = \ell, \\ f_\ell(x), & \text{pour } x \in]\ell, +\infty[. \end{cases}$$

on obtient un isomorphisme.

Cas 3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée de limite irrationnelle ℓ. Dans ce cas, $\mathcal{M} \cong \mathfrak{C}$. Comme dans les cas précédents, il existe des isomorphismes

$$f_- :]-\infty, c_0[\to]-\infty, 1[, \quad f_n :]c_n, c_{n+1}[\to]\gamma_n, \gamma_{n+1}[, \quad f_\ell :]\ell, +\infty[\to]e, +\infty[.$$

En définissant $f : \mathcal{M} \to \mathfrak{C}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \gamma_n, & \text{pour } x = c_n, \\ f_-(x), & \text{pour } x \in]-\infty, c_0[, \\ f_n(x), & \text{pour } x \in]c_n, c_{n+1}[, \\ f_\ell(x), & \text{pour } x \in]\ell, +\infty[. \end{cases}$$

on obtient un isomorphisme.

Pour illustrer la méthode de va-et-vient, on peut aussi construire un va-et-vient entre $\mathcal{M}$ et l'une des structures $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; l'exercice 2 permet de conclure. Appelons, pour simplifier, une $\mathcal{L}$-sous-structure *simple* de $\mathcal{M}$, une $\mathcal{L}$-sous-structure $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ telle que $N \setminus \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ est fini (Remarquons que comme $\mathcal{N}$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathcal{M}$, l'interprétation de c_n est a_n et donc $a_n \in N$). Pour la cas 1, soit

$$\mathcal{K}(\mathfrak{A}) = \{\sigma | \sigma \text{ est un isomorphisme partiel de } \mathcal{M} \text{ dans } \mathfrak{A},$$

$$\text{Dom}(\sigma) \text{ est une } \mathcal{L}\text{-sous-structure simple de } \mathcal{M}\},$$

pour le cas 2, soit

$$\mathcal{K}(\mathfrak{B}) = \{\sigma | \sigma \text{ est un isomorphisme partiel de } \mathcal{M} \text{ dans } \mathfrak{A},$$

$$\sigma(\ell) = 0, \ \text{Dom}(\sigma) \text{ est une } \mathcal{L}\text{-sous-structure simple de } \mathcal{M}\},$$

et pour la cas 3, soit

$$\mathcal{K}(\mathfrak{C}) = \{\sigma | \sigma \text{ est un isomorphisme partiel de } \mathcal{M} \text{ dans } \mathfrak{A},$$

$$x < \ell \Rightarrow \sigma(x) < e, \ \mathrm{Dom}(\sigma) \text{ est une } \mathcal{L}\text{-sous-structure simple de } \mathcal{M}\},$$

Alors $\mathcal{K}(\mathfrak{A})$, $\mathcal{K}(\mathfrak{B})$ et $\mathcal{K}(\mathfrak{C})$ ne sont pas vides et ce sont des va-et-vient pour les cas 1, 2 et 3 respectivement.

(3) Pour montrer que T est modèle complète on montre par induction sur les formules, que pour tout formule $\phi(\bar{x})$, il existe $\psi(\bar{x})$ sans quanteur, telle que

$$T \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi(\bar{x})). \tag{1}$$

La propriété (1) est vraie pour les formules sans quanteur et elle est stable par négation et par conjonction. Il reste la quantification existentielle.

Soit $\phi(x_1, \cdots, x_n, y)$ une formule sans quanteur et cherchons une formule sans quanteur $\psi(\bar{x})$ telle que

$$T \vdash \forall \bar{x}(\exists y \phi(\bar{x}, y) \Leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

On peut écrire

$$\phi(\bar{x}, y) = \bigvee_{1 \le i \le n} \phi_i(\bar{x}, y),$$

où ϕ_i est une conjonction de formules atomiques et de négation de formules atomiques. Sans perte de généralité, on peut se restreindre au cas ou ϕ est elle même conjonction de formules atomiques et de négation de formule atomiques. Donc

$$\phi(\bar{x}, y) = \bigwedge_{i \in I, j \in J} x_i < x_j \wedge \bigwedge_{k \in K} x_k < y \wedge \bigwedge_{l \in L} y < x_l$$

$$\wedge \bigwedge_{i \in I', j \in J'} \neg x_i < x_j \wedge \bigwedge_{k \in K'} \neg x_k < y \wedge \bigwedge_{l \in L'} \neg y < x_l.$$

Mais il est claire que l'existence d'un y qui vérifie la formule $\phi(\bar{x}, y)$ dépend seulement de l'ordre de la suite $x_1, \cdots, x_n$. Ceci achève la preuve de (1).

(4) Comme T est modèle complète, pour montrer que tout modèle dénombrable de T admet une extension élémentaire isomorphe à $\mathfrak{B}$ et une extension élémentaire isomorphe à $\mathfrak{C}$, il suffit de montrer que $\mathfrak{C}$ a une sous-structure, modèle de T, isomorphe à $\mathfrak{B}$, et que $\mathfrak{B}$ a une sous-structure, modèle de T, isomorphe à $\mathfrak{A}$ et une sous-structure, modèle de T, isomorphe à $\mathfrak{C}$.

La sous-structure $]-\infty, e[\cup [3, +\infty[$ de $\mathfrak{C}$, est un modèle de T qui est isomorphe à $\mathfrak{B}$. La sous-structure $]-\infty, 0[$ de $\mathfrak{B}$, est un modèle de T qui est isomorphe à $\mathfrak{A}$. La sous-structure $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ de $\mathfrak{B}$, est un modèle de T qui est isomorphe à $\mathfrak{C}$.