Université Claude Bernard Lyon 1.
Master Recherche. Théorie des modèles des groupes (2006-2007).

Contrôle Continu
Mardi 21 novembre 2006, de 9h à 12h

Les notes du cours sont autorisées. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 On travaille dans le langage usuel des groupes $\mathcal{L}_{gp} = \{., ^{-1}, 1\}$.

I. Soit $\phi(x)$ une formule du langage $\mathcal{L}_{gp}$.

1. Montrer que pour tout énoncé ψ, il existe un énoncé $\overline{\psi}$, tel que pour tout groupe G, si $\phi(x)$ définie un sous-groupe H dans G, alors

$$H \models \psi \Leftrightarrow G \models \overline{\psi}.$$

2. Montrer que pour tout énoncé ψ, il existe un énoncé $\overline{\psi}$, tel que pour tout groupe G, si $\phi(x)$ définie un sous-groupe H normal dans G, alors

$$G/H \models \psi \Leftrightarrow G \models \overline{\psi}.$$

3. Soit G (resp. G') un groupe et supposons que $\phi(x)$ définie un sous-groupe normal H (resp. H') dans G (resp. G'). Déduire que si $G \equiv G'$ alors $G/H \equiv G'/H'$.

4. Montrer que si G est un groupe de type fini et $G \equiv \mathbb{Z}^n$, alors $G \cong \mathbb{Z}^n$.

II. Un groupe G est dit *pseudofini* s'il vérifie la propriété suivante : si ψ est un énoncé de $\mathcal{L}_{gp}$ qui est vrai dans tous les groupes finis, alors $G \models \psi$.

5. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour tout groupe G :

(a) G est un groupe pseudofini,

(b) pour tout énoncé ψ, si $G \models \psi$, alors il existe un groupe fini K tel que $K \models \psi$,

(c) il existe un ensemble I et un ultrafiltre U sur I et une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes finis tels que $G \equiv \prod_{i \in I} G_i/U$.

6. Montrer que si G est un groupe pseudofini et H est un sous-groupe définissable (sans paramètres) de G, alors H est pseudofini. Montrer que si H est normal alors G/H est aussi pseudofini [Indication : utiliser les questions 1 et 2].

7. Montrer que si G est un groupe pseudofini et $f : G \to G$ est une application définissable injective (resp. surjective) alors f est surjective (resp. injective).

Exercice 2 Soit $\mathcal{L}$ un langage. Un énoncé ϕ est un énoncé $\forall\exists$, s'il équivalent à un énoncé de la forme $\forall \bar{x} \exists \bar{y} \phi_0(\bar{x}, \bar{y})$, où $\phi_0(\bar{x}, \bar{y})$ est un énoncé sans quanteurs. D'une manière analogue, on définit les énoncés $\exists\forall$.

1. Montrer que si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux énoncés $\forall\exists$, alors $\phi_1 \vee \phi_2$ est aussi un énoncé $\forall\exists$.

Une théorie T est dite avoir une $\forall\exists$-axiomatisation, s'il existe une théorie T' constituée d'énoncés $\forall\exists$ telle que

$$\text{pour tout modèle } \mathcal{M},\ \mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T'.$$

Dans la suite on fixe une théorie T consistante de $\mathcal{L}$.

2. Montrer que si T a une $\forall\exists$-axiomatisation, alors pour toute chaîne $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ de modèles de T, $\bigcup_{i\in I}\mathcal{M}_i$ est aussi modèle de T.

Dans la suite nous supposons que si $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ est une chaîne de modèles de T, $\bigcup_{i\in I}\mathcal{M}_i$ est aussi modèle de T. Soit

$$\Gamma = \{\phi \mid \phi \text{ est un énoncé } \forall\exists \text{ et } T\vdash\phi\}.$$

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de Γ.

3. Montrer que pour tout énoncé $\exists\forall$, ψ , si $\mathcal{M}\models\psi$, alors il existe un modèle $\mathcal{N}$ de T tel que $\mathcal{N}\models\psi$.

4. Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{N}$ de T tel que pour tout énoncé $\exists\forall$, ψ, si $\mathcal{M}\models\psi$ alors $\mathcal{N}\models\psi$.

5. Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{N}_1$ tel que $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_1\equiv\mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est un modèle vérifiant les conclusions de la quesstion 4 et tel que pour toute formule universelle à paramètres dans $\mathcal{M}$ qui est vraie dans $\mathcal{M}$ est vraie dans $\mathcal{N}_1$.

6. Montrer qu'il existe un modèle $\mathcal{M}_1$ tel que $\mathcal{N}_1\subseteq\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}\prec\mathcal{M}_1$, où $\mathcal{N}_1$ est un modèle vérifiant les conclusions de la question 5.

7. Montrer qu'il existe deux chaînes de modèles $(\mathcal{M}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\mathcal{N}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes

(a) $\mathcal{M}=\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_i\prec\mathcal{M}_{i+1}$ pour tout $i\in\mathbb{N}$,
(b) $\mathcal{N}_i\models T$, $\mathcal{N}_i\equiv\mathcal{N}_{i+1}$ pour tout $i\in\mathbb{N}$,
(c) $\mathcal{M}_i\subseteq\mathcal{N}_{i+1}\subseteq\mathcal{M}_{i+1}$ pour tout $i\in\mathbb{N}$.

8. Soit $\mathcal{M}^*=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{M}_i=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{N}_i$. Montrer que $\mathcal{M}^*\models T$ et en déduire que $\mathcal{M}\models T$. Conclure que T est $\forall\exists$-axiomatisable.