Université Claude Bernard Lyon 1, 2006-2007.
Master 2, théorie des modèles des groupes.

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Une application $f : M^n \to M^m$ est dite définissable si son graphe est un ensemble définissable dans M^{n+m}.

(1) Montrer que si $f : M^n \to M^m$ et $g : M^m \to M^p$ sont définissables alors $g \circ f$ est définissable.

(2) Montrer que si $f : M^n \to M^m$ est définissable, alors son image est définissable.

Exercice 2 Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subseteq M$. On dit que $b \in M$ est *algébrique* sur A s'il existe une formule $\phi(x; \bar{y})$ et $\bar{a} \in A$ telle que $\mathcal{M} \models \phi(b; \bar{a})$ et $\{y \in M | \mathcal{M} \models \phi(y; \bar{a})\}$ est fini. On définit $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$ ou $\mathrm{acl}(A)$ s'il n'y a pas d'ambiguité, comme étant l'ensemble des éléments de M algébriques sur A.

(1) Soit $x \in \mathrm{acl}(A)$. Montrer qu'il existe $x_1, \cdots, x_n$ tels que si τ est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ et $\tau(a) = a$ pour tout $a \in A$, alors $\tau(x) = x_i$ pour un certain i.

(2) Montrer que $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

(3) Montrer que si $x \in \mathrm{acl}(A)$ alors $x \in \mathrm{acl}(A_0)$ où A_0 est un sous-ensemble fini de A.

(4) Montrer que $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$.

(5) Montrer que si $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, alors $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{acl}_{\mathcal{N}}(A)$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{L}$ le langage des corps et soit ϕ un énoncé dans $\mathcal{L}$. Montrer que si ϕ est vrai dans tout corps de caractéristique 0 alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que ϕ est vrai dans tout corps de cacartéristique $p \geq m$.

Exercice 4 Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $\phi(x)$ une formule de $\mathcal{L}$ et $\lambda \geq \max(|\mathcal{M}|, |L|)$.

(1) Supposons que l'ensemble $\{a \in M | \mathcal{M} \models \phi(a)\}$ est ifnini. Montrer qu'il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ telle que que l'ensemble $\{a \in N | \mathcal{N} \models \phi(a)\}$ est de cardinal λ.

(2) Montrer que $\mathcal{M}$ a une extension élémentaire $\mathcal{N}$ telle que pour toute formule $\psi(x; \bar{y})$, pour tout uple $\bar{b}$ de N, l'enemble $\{a \in N | \mathcal{N} \models \psi(a; \bar{b})\}$ est ou bien fini ou bien de cardinalité λ.

Exercice 5 Montrer que tout groupe de type fini élémentairement équivalent à $\mathbb{Z}^n$ lui est isomorphe.

Exercice 6 Soit $\mathcal{L}$ un langage et T une théorie de $\mathcal{L}$. On dit que T est λ-*catégorique*, où λ est un cardinal infini, si tous les modèles de T de cardinal λ sont isomorphes.

(1) (Critère de Vaught) Montrer que si $\lambda \geq |\mathcal{L}|$ et si T est λ-catégorique et n'a que des modèles infinis alors T est complète.

(2) Soit T, dans la langage des groupes $\mathcal{L}_{gp} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$, la théorie des groupes dont tout élément est d'ordre 2.

(i) Donner une axiomatisation de T.

(ii) Montrer que T est λ-catégorique pour tout cardinal infini λ mais que T n'est pas complète.

(iii) Montrer qu'il existe $T \subseteq T'$ telle que T' est complete et dont les modèles sont les modèles infinis de T.