Université Claude Bernard Lyon 1.
Master 2, théorie des modèles des groupes, 2006-2007.

Examen
Jeudi 4 janvier, de 08h30 à 11h30

Les notes du cours sont autorisées.

Exercice 1 Soit G un groupe de rang de Morley fini. Supposons que G a un sous-groupe définissable infini et de type fini. Montrer que G a un sous-groupe H vérifiant les propriétés suivantes :

(1) H est définissable et connexe,

(2) H est normal et de type fini,

(3) tout sous-groupe de G définissable connexe et de type fini est contenu dans H.

[Indication : utiliser le théorème des indécomposables. On admet le fait suivant : un sous-groupe d'indice fini dans un groupe de type fini est de type fini.]

Exercice 2 Rappelons qu'une formule $\phi(\bar{x})$ est dite universelle si elle est de la forme

$$\forall \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y}),$$

où $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ est une formule sans quanteurs. Si G et H sont deux groupes qui satisfont les mêmes énoncés universels, on écrit $G \equiv_\forall H$. Monter que si A, B, C, D sont des groupes tels que $A \equiv_\forall C$ et $B \equiv_\forall D$ alors $A \times B \equiv_\forall C \times D$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{L}$ un langage contenant au moins un symbole de constante c. Soient T une théorie (consistante) de $\mathcal{L}$ et $\phi(\bar{x})$ une formule de $\mathcal{L}$. On considère les propriétés suivantes :

(i) Il existe une formule sans quanteurs $\varphi(\bar{x})$ telle que $T \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$.

(ii) Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux modèles de T, $\mathcal{K}$ est une $\mathcal{L}$-structure telle que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$ alors pour tout $\bar{a} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$.

1. Montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$.

2. Supposons que $T \cup \{\exists \bar{x} \phi(\bar{x})\}$ et $T \cup \{\exists \bar{x} \neg \phi(\bar{x})\}$ sont consistantes. Soit

$$\Gamma(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) | \psi(\bar{x}) \text{ est sans quanteurs, } T \vdash \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x}))\}$$

Supposons que (ii) est satisfaite. Montrer que $T \cup \Gamma(\bar{d}) \vdash \phi(\bar{d})$ où $\bar{d}$ est une suite de nouveaux symboles de constantes.

3. Montrer que $(ii) \Rightarrow (i)$.

Exercice 4 On désigne par T la théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion dans le langage $\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$.

1. Soient G et H deux modèles de T tels que $G \subseteq H$ et $\phi(\bar{x}, y)$ une formule sans quanteurs. Montrer que pour tout $\bar{a} \in G$, si $H \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$ alors $G \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$.

2. On admet la propriété suivante : si A est un groupe abélien sans torsion, alors il existe un groupe abélien divisible sans torsion et un plongement $f : A \to H$ tels que pour tout groupe abélien divisible sans torsion H' et pour tout plongement $f' : A \to H'$ il existe un plongement $g : H \to H'$ tel que $g \circ f = f'$.

Montrer que pour toute formule existentielle $\psi(\bar{x})$, il existe une formule $\varphi(\bar{x})$ sans quanteurs telle que $T \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$ [Indication : utiliser la question 1 et l'exercices 3].

3. Montrer que T a l'élimination des quanteurs.