Université Claude Bernard Lyon 1, 2006-2007.
Master 2, théorie des modèles des groupes.

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Montrer que $\mathbb{Q}$ se plonge dans toute ulrapuissance nonprincipal de $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 Montrer qu'un modèle de type fini définissable dans un modèle ω-saturé est fini.

Exercice 3 Soit $\mathcal{L}$ un langage et soit T une théorie de $\mathcal{L}$. Un modèle $\mathcal{M}$ de T est dit *existentiellement clos*, en abrégé e.c., si pour tout $\mathcal{N} \models T$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, et pour toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sans quanteurs, si $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$, où $\bar{a} \in \mathcal{M}$, alors $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$.

Nous supposons dans la suite que T a une axiomatisation $\forall\exists$.

1. Montrer que pour tout $\mathcal{M} \models T$, il existe $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \models T$ tel que pour toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sans quanteurs, s'il existe $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}' \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$, où $\bar{a} \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}' \models T$, alors $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$ [Indication : construire une chaîne de modèles et utiliser le fait que T est conservée par union de chaîne].

2. Montrer que pour tout $\mathcal{M} \models T$, il existe $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \models T$ qui est e.c. [Indication : en utilisant la question 1, construire une chaîne de modèles et utiliser le fait que T est conservée par union de chaîne].

3. Soit $\mathcal{M}$ un modèle e.c. de T. Montrer que pour toute formule sans quanteurs $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et pour tout $\bar{a} \in \mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models \forall \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$, alors il existe une formule sans quanteurs $\psi(\bar{z}, \bar{y})$ telle que $\mathcal{M} \models \exists \bar{z} \psi(\bar{z}, \bar{a})$ et $T \vdash \forall \bar{y}(\exists \bar{z} \psi(\bar{z}, \bar{y}) \Rightarrow \forall \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{y}))$.

Soit $T_\forall = \{\phi | \phi \text{ est un énoncé universel et } T \vdash \phi\}$.

4. Montrer que si $\mathcal{M}$ est un modèle e.c. de T alors $\mathcal{M}$ est un modèle e.c. de $T_\forall$.

5. Montrer que si $\mathcal{M}$ est un modèle de $T_\forall$ alors il existe un modèle $\mathcal{N} \models T$ tel que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

6. Montrer que si $\mathcal{M}$ est un modèle e.c. de $T_\forall$ alors $\mathcal{M}$ est un modèle e.c. de T.

On travaille dans la suite dans le langage des groupes $\mathcal{L}_{gp}$ et on considère la théorie des groupes notée T_{gp}. Un modèle e.c. de T_{gp} sera dit tout simplement un groupe e.c.

7. Montrer qu'un groupe e.c. est divisible (on admet le fait que tout groupe se plonge dans un groupe divisible).

8. Montrer qu'un groupe e.c. est simple (on admet le fait que tout groupe se plonge dans un groupe simple).