Université Claude Bernard Lyon 1.
Master 2, théorie des modèles des groupes, 2006-2007.

Corrigé du Partiel

Exercice 1

1. On montre par induction sur les formules que pour tout $\bar{a} \in H$, pour toute formule $\psi(\bar{x})$, il existe une formule $\overline{\psi}(\bar{x})$ telle que $H \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow G \models \overline{\psi}(\bar{a})$.

$\diamond$ Si $\psi(\bar{x})$ est sans quanteurs, on prend la formule $\overline{\psi}(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x})$.

$\diamond$ Si $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$, on prend la formule $\overline{\psi}(\bar{x}) = \overline{\psi}_1 \wedge \overline{\psi}_2$. On fait de même pour les conjonctions et la négation.

$\diamond$ Si $\psi(\bar{x}) = \exists y \psi_1(\bar{x}, y)$, on prend la formule $\overline{\psi}(\bar{x}) = \exists y(\overline{\psi}_1(\bar{x}, y) \wedge \phi(y))$.

2. Soit $\pi : G \to G/H$ la surjection canonique. Par induction sur les formules on montre que pour tout $\bar{a} \in G$, pour toute formule $\psi(\bar{x})$, il existe une formule $\overline{\psi}(\bar{x})$ telle que $G/H \models \psi(\pi(\bar{a})) \Leftrightarrow G \models \overline{\psi}(\bar{a})$.

$\diamond$ Si $\psi(\bar{x})$ est sans quanteurs, on peut l'écrire

$$\psi(\bar{x}) = \bigvee_{1 \leq i \leq n} (\bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} w_{ij}(\bar{x}) = 1 \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} v_{ij}(\bar{x}) \neq 1).$$

Alors

$$G/H \models \psi(\pi(\bar{a})) \Leftrightarrow G \text{ vérifie } \bigvee_{1 \leq i \leq n} (\bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} w_{ij}(\bar{a}) \in H \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} v_{ij}(\bar{a}) \notin H),$$

et donc on prend la formule $\overline{\psi}(\bar{x}) = \bigvee_{1 \leq i \leq n}(\bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} \phi(w_{ij}(\bar{x})) \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq n_i} \neg\phi(v_{ij}(\bar{x})))$.

$\diamond$ Si $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$, on prend la formule $\overline{\psi}(\bar{x}) = \overline{\psi}_1 \wedge \overline{\psi}_2$. On fait de même pour les conjonctions et la négation.

$\diamond$ Si $\psi(\bar{x}) = \exists y \psi_1(\bar{x}, y)$, on prend la formule $\overline{\psi}(\bar{x}) = \exists y \overline{\psi}_1(\bar{x}, y)$.

3. Soit ψ un énoncé tel que $G/H \models \psi$. Alors $G \models \overline{\psi}$ et comme $G \equiv G'$, on a $G' \models \overline{\psi}$ et on obtient $G'/H' \models \psi$.

4. Comme $G \equiv \mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}^n$ est sans-torsion, G est sans-torsion. Comme G est de type fini $G \cong \mathbb{Z}^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Soit $H = 2\mathbb{Z}^n$. Alors H est définissable par la formule $\phi(x) := \exists y(x = y + y)$. Par conséquent $\mathbb{Z}^n/H \equiv \mathbb{Z}^m/H'$ où $H' = 2\mathbb{Z}^m$. Or $|\mathbb{Z}^n/H| = 2^n$, $|\mathbb{Z}^m/H| = 2^m$ et par conséquent $m = n$.

5.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) est évidente.

(b) $\Rightarrow$ (c). Soit X =Th(G). Pour toute partie finie $A \subseteq X$, il existe un groupe fini K_A tel que $K_A \models \wedge_{\psi \in A} \psi$. Soit $\overline{X}$ l'ensemble des parties finies de X. Pour chaque partie finie $A \subseteq X$ soit$\lceil A \rceil = \{Y \subseteq \overline{X} | A \subseteq Y\}$. Alors l'ensemble $F = \{Y \subseteq \overline{X} | \exists A \in \overline{X}, \lceil A \rceil \subseteq Y\}$ est un filtre et donc contenu dans un ultrafiltre U. D'après le théorème de Los, l'ultraproduit $\prod_{A \in \overline{X}} K_A/U$ est un modèle de Th(G).

(c) $\Rightarrow$ (b) est une conséquence du théorème de Los.

6. Supposons que H est définissable par $\phi(x)$. Alors pour tout énoncé ψ, tel que $H \models \psi$,

$$G \models \overline{\psi} \wedge \forall x \forall y(\phi(x) \wedge \phi(y) \Rightarrow \phi(xy^{-1})).$$

Par conséquent, il existe un groupe fini K tel que

$$K \models \overline{\psi} \wedge \forall x \forall y(\phi(x) \wedge \phi(y) \Rightarrow \phi(xy^{-1})).$$

D'où $\phi(x)$ définie aussi un sous-groupe dans K. Donc si H' est le sous-groupe définissable par ϕ dans K, alors $H' \models \psi$.

Quand H est normal la démonstration est analogue à la précédente : on rajoute l'énoncé qui exprime que H est normal et on utilise la question 2.

7. Si f est une application définissable par $\phi(x, y)$ et injective alors tout groupe fini vérifie l'énoncé

$$\forall x \exists y \phi(x, y) \wedge \forall z \forall z'(\phi(x, z) \wedge \phi(x, z') \Rightarrow z = z') \wedge \forall x \forall x' \forall y(\phi(x, y) \wedge \phi(x', y) \Rightarrow x = x')$$

$$\Rightarrow \forall z \exists x \phi(x, z),$$

qui exprime que si f est une application injective alors elle est surjective. L'énoncé reste donc vrai dans G.

Quand f est surjective on procède de la même façon.

Exercice 2

1. Si $\phi_1 = \forall \bar{x} \exists \bar{y} \varphi_1(\bar{x}, \bar{y})$ et $\phi_2 = \forall \bar{z} \exists \bar{t} \varphi_2(\bar{z}, \bar{t})$ sont deux énoncés $\forall\exists$ alors $\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2$ est équivalent à l'énoncé

$$\exists \bar{x} \exists \bar{z} \forall \bar{y} \forall \bar{t} \neg\varphi_1(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \neg\varphi_2(\bar{z}, \bar{t}),$$

qui est un énoncé $\exists\forall$ et dont la négation est équivalent à $\phi_1 \vee \phi_2$.

2. On peut supposer directement que T est une théorie $\forall\exists$. Si $\phi \in T$, alors $\phi := \forall \bar{x} \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ où φ est une formule sans quanteurs. Soit $\bar{a} \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$. Alors il existe i tel que $\bar{a} \in \mathcal{M}_i$. Comme $\mathcal{M}_i \models T$ et donc $\mathcal{M}_i \models \psi$, il existe $\bar{b} \in \mathcal{M}_i$ tel que $\mathcal{M}_i \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$. Comme φ est sans quanteurs on obtient $\bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$. Donc pour tout $\bar{a} \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$, il existe $\bar{b} \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ tel que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$ et donc $\bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i \models \phi$.

3. Soit $T' = T \cup \{\psi\}$. Si T' n'est pas consistante alors $T \vdash \neg\psi$ avec $\neg\psi$ est un énoncé $\forall\exists$ et donc $\neg\psi \in \Gamma$ et $\mathcal{M} \models \neg\psi$; contradiction avec $\mathcal{M} \models \psi$.

4. Soit $T' = T \cup \{\psi | \psi$ est un énoncé $\exists\forall$, $\mathcal{M} \models \psi\}$. D'après la question 1, une théorie finie de T' est de la forme $T \cup \{\psi\}$ où ψ est un énoncé $\exists\forall$ tel que $\mathcal{M} \models \psi$. D'après la question 3, T est finiment consistante et par compacité T est consistante.

5. Soit $Diag_\forall(\mathcal{M})$ le "diagramme universel" de $\mathcal{M}$ (dans le langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$):

$$Diag_\forall(\mathcal{M}) = \{\phi(\bar{a}) | \phi(\bar{x}) \text{ est universelle}, \bar{a} \in \mathcal{M}, \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}.$$

Soit $T' = Th(\mathcal{N}) \cup Diag_\forall(\mathcal{M})$. Il faut et il suffit de montrer que T' est consistante. Si T' n'est pas finiment consistante, $Th(\mathcal{N}) \vdash \neg\psi(\bar{a})$ où $\psi(\bar{a}) \in Diag_\forall(\mathcal{M})$. Par conséquent $Th(\mathcal{N}) \vdash \forall \bar{x} \neg\psi(\bar{x})$ et $\forall \bar{x} \neg\psi(\bar{x})$ est un énoncé $\forall\exists$. Or $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$ et d'après la propriété vérifiée par $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$ et par conséquent $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}) \in Th(\mathcal{N})$. Contradiction.

6. Soit $Diag(\mathcal{N}_1)$ le diagramme simple de $\mathcal{N}_1$:

$$Diag(\mathcal{N}_1) = \{\phi(\bar{a}) | \phi(\bar{x}) \text{ est sans quanteurs}, \bar{a} \in \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_1 \models \phi(\bar{a})\}$$

et soit $Th(\mathcal{M}|\mathcal{M})$ le diagramme complet de $\mathcal{M}$ (dans le langage $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$).

Soit $T' = Diag(\mathcal{N}_1) \cup Th(\mathcal{M}|\mathcal{M})$. Il faut et il suffit de montrer que T' est finiment consistante. Si T' n'est pas finiment consistante, $\phi(\bar{b}) \vdash \neg\psi(\bar{a}, \bar{b})$ où $\psi(\bar{a}, \bar{b}) \in Diag(\mathcal{N}_1)$, $\phi(\bar{b}) \in Th(\mathcal{M}|\mathcal{M})$ et $\bar{a} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$.

Par conséquent $\phi(\bar{b}) \vdash \forall\bar{x}\neg\psi(\bar{x}, \bar{b})$. Donc $\mathcal{M} \models \forall\bar{x}\neg\psi(\bar{x}, \bar{b})$ et par conséquent $\mathcal{N}_1 \models \forall\bar{x}\neg\psi(\bar{x}, \bar{b})$. Or $\mathcal{N}_1 \models \exists\bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{b})$. Contradiction.

7. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et en utilisant les questions 4, 5 et 6.

8. Comme T est conservée par union de chaînes, $\mathcal{M}^* \models T$. Comme $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}^*$ on obtient $\mathcal{M} \models T$.

Conclusion : tout model $\mathcal{M}$ de Γ est modèle de T. La réciproque est vraie. Comme Γ est une théorie $\forall\exists$, on obtient que T a une $\forall\exists$-axiomatisation.