Université Claude Bernard Lyon 1, 2006-2007.
Master 2, théorie des modèles des groupes.

Devoir 1

A rendre le 25 octobre

Exercice 1 Montrer que toute formule est équivalente à une formule prénexe; c'est-à-dire à une formule de la forme $Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\phi$ où les Q_i sont des quanteurs et ϕ une formule sans quanteur.

Exercice 2 Montrer que deux structures dénombrables qui se correspondent par va-et-vient sont isomorphes.

Exercice 3 Soit $\mathcal{L} = \{E\}$ où E est un symbole de relation binaire.

(1) Donner une axiomatisation T de la théorie de la relation d'équivalence ayant une infinité de classes et dont toute classe est infinie.

(2) Combien de modèles de cardianl $\aleph_0$ possède T ?

(3) T est-elle complète ?

Exercice 4 Montrer qu'un groupe infini simple a un sous-groupe infini dénombarble simple.

Exercice 5 Soient $X \subseteq Y$ deux ensembles infinis et soit F_X (resp. F_Y) le groupe libre de base X (resp. Y). On considère F_X comme une sous-structure de F_Y dans le langage des groupes $\mathcal{L}_{gp} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$. Montrer que F_X est une sous-structure élémentaire de F_Y.

Exercice 6 Soit $\mathcal{L}$ le langage constitué d'un symbole de relation binaire E et d'un ensemble infini de symboles de constantes $\{c_0, \cdots, c_n, \cdots\}$.

Soit F une formule close de $\mathcal{L}$ exprimant que E s'interprète comme un ordre strict total dense sans extrémités. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n la formule $E(c_n, c_{n+1})$. On considère la théorie :

$$T = \{F\} \cup \{\phi_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

On désigne par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ les trois $\mathcal{L}$-structures dont l'ensemble de base est $\mathbb{Q}$, où E s'interprète comme l'ordre strict usuel, et où la suite de symboles de constantes $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est interprétée respectivement par les suites de rationnels :

$$\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

définies par

$$\alpha_n = n,\ \beta_n = \frac{-1}{n+1},\ \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(1) Montrer que T est complète.

(2) Montrer que tout modèle de T est isomorphe à l'une des trois $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$.

(3) Montrer que T est modèle-complète.

(4) Montrer que tout modèle dénombrable de T admet une extension élémentaire isomorphe à $\mathfrak{B}$ et une extension élémentaire isomorphe à $\mathfrak{C}$.