Université Claude Bernard Lyon 1.
Master 2, théorie des modèles des groupes, 2006-2007.

Examen
Mercredi 13 juin 2007, de 14h à 17h

Les notes du cours sont autorisées.

Exercice 1 Soit $\mathcal{L}$ un langage et T une théorie de $\mathcal{L}$. On dit que T est λ-*catégorique*, où λ est un cardinal infini, si tous les modèles de T de cardinal λ sont isomorphes.

(1) (Critère de Vaught) Montrer que si $\lambda \geq |\mathcal{L}|$ et si T est λ-catégorique et n'a que des modèles infinis alors T est complète.

(2) Soit T, dans la langage des groupes $\mathcal{L}_{gp} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$, la théorie des groupes dont tout élément est d'ordre 2.

(i) Donner une axiomatisation de T.

(ii) Montrer que T est λ-catégorique pour tout cardinal infini λ mais que T n'est pas complète.

(iii) Montrer qu'il existe $T \subseteq T'$ telle que T' est complete et dont les modèles sont les modèles infinis de T.

Exercice 2 Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $\phi(x)$ une formule de $\mathcal{L}$ et $\lambda \geq \max(|\mathcal{M}|, |L|)$.

(1) Supposons que l'ensemble $\{a \in M | \mathcal{M} \models \phi(a)\}$ est ifnini. Montrer qu'il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ telle que que l'ensemble $\{a \in N | \mathcal{N} \models \phi(a)\}$ est de cardinal λ.

(2) Montrer que $\mathcal{M}$ a une extension élémentaire $\mathcal{N}$ telle que pour toute formule $\psi(x; \bar{y})$, pour tout uple $\bar{b}$ de N, l'enemble $\{a \in N | \mathcal{N} \models \psi(a; \bar{b})\}$ est ou bien fini ou bien de cardinalité λ.

Exercice 3 Montrer qu'un groupe infini simple a un sous-groupe infini dénombarble simple.

Exercice 4 On travaille dans le langage des groupes $\mathcal{L}_{gp} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$.

(1) Montrer que pour tout element non trivial $x \in \mathbb{Z}$, il existe un homomorphisme $f : \mathbb{Z} \to G$ tel que $f(x) \neq 1$ et où G est un groupe abélien fini.

(2) Montrer que tout énoncé existentiel qui est satisfait dans un groupe abélien est satisfait dans un groupe abélien fini.

(3) Soit G un groupe tel qu'il existe une théorie existentielle T qui est satisfaite dans un groupe abélien et tel que G se plonge dans tout groupe abélien qui satisfait T. Montrer que G est une somme directe de groupes abéliens finis [Indication : utiliser le fait qu'un sous-groupe d'une somme directe de groupes abéliens finis est aussi une somme directe de groupes abéliens finis].