

Chapitre 1

Exemples

Ce chapitre est consacré à des exemples qui illustrent certaines idées et notions dominantes de ce cours. Bien que la notation et la terminologie soient bien connues, nous essayerons de fixer nos choix pour certaines notions qui varient d'une source à une autre.

Dans un groupe l'élément neutre sera dénoté par 1. La notation exponentielle pour la conjugaison sera utilisée de la façon suivante : $x^y = y^{-1}xy$. Un sous-groupe *normal* est exactement ce qui est connu sous l'appellation de sous-groupe *distingué*. $\langle X \rangle$ est la notation utilisée pour la *sous-structure engendrée* par un sous-ensemble X d'une structure donnée. Les éléments non-triviaux d'un groupe G seront dénotés par G^\times .

Nous utiliserons la notation exponentielle pour l'action d'un groupe sur un ensemble. Donc si G est un groupe agissant sur un ensemble nonvide X , alors l'application $G \times X \rightarrow X$ qui définit cette action associera au couple (g, x) l'élément x^g de X . L'action sera dite *transitive* si pour tous $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $x^g = y$. Elle sera dite *libre* si pour $x \in X$ et $g \in G$, $x^g = x$ entraîne $g = 1$.

1.1 Chaînes denses sans extrémités

Nous considérons un ensemble E nonvide muni d'une *relation d'ordre*, en d'autres termes une relation binaire qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Nous utiliserons la notation habituelle des relations d'ordre : \leq et $<$.

Cette relation aura en plus la propriété qu'elle soit *dense* et *sans extrémités*, c'est à dire que

(Densité) pour tout $x, y \in E$, si $x < y$ alors il existe $z \in E$ tel que $x < z < y$

(Sans extrémités) il n'existe pas de plus grand ou plus petit élément dans E .

L'ensemble des nombres rationnels muni de la relation d'ordre usuelle est un exemple de chaîne dense sans extrémités. Nous soulignons aussi le fait qu'une chaîne dense est nécessairement infinie.

Soient maintenant (E_1, \leq_1) et (E_2, \leq_2) deux chaînes denses sans extrémités. Une application f de E_1 vers E_2 est un *homomorphisme* si pour tout $x, y \in E_1$, $x \leq_1 y$ entraîne $f(x) \leq_2 f(y)$. Si f est une bijection, nous dirons que c'est un *isomorphisme*. Voici notre premier théorème :

Théorème 1.1 *Deux chaînes denses sans extrémités qui sont dénombrables sont isomorphes.*

Preuve. Le raisonnement qui sera utilisé est dit la méthode de *va-et-vient*. En utilisant cette méthode nous construirons un isomorphisme entre deux chaînes denses sans extrémités.

Soient donc (E_1, \leq_1) et (E_2, \leq_2) deux chaînes denses sans extrémités dénombrables. Nous construirons un sous-ensemble de $E_1 \times E_2$ qui ne sera que le graphe d'un isomorphisme f de

E_1 sur E_2 . Le graphe de f (qui sera dénoté par la même lettre f) sera construit par récurrence comme une suite croissante des graphes des isomorphismes partiels sur des sous-ensembles finis.

Comme E_1 et E_2 sont supposées être dénombrables, il existe une énumération $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ de E_1 et une énumération $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ de E_2 . Par contre ces énumérations n'ont rien à faire avec \leq_1 et \leq_2 .

La récurrence est amorcée en posant (x_0, y_0) comme le premier isomorphisme partiel. Supposons maintenant qu'un isomorphisme partiel $\{(x_{i_1}, y_{j_1}), \dots, (x_{i_n}, y_{j_n})\}$ soit construit. Soit x_r l'élément ayant le plus petit indice (par rapport à l'énumération fixée pour E_1) dans $E_1 \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$. Nous trouverons une image pour x_r . Comme E_1 est un ensemble totalement ordonné, il existe trois possibilités pour la place de x_r par rapport aux éléments de l'ensemble $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$:

- (i) x_r est plus petit que tous les éléments de $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$;
- (ii) x_r est plus grand que tous les éléments de $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$;
- (iii) ni (i) ni (ii).

Supposons (i). Comme E_2 est un ensemble totalement ordonné sans extrémités, il contient un élément y_s strictement plus petit que tous les éléments de $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_n}\}$. Alors nous ajoutons (x_r, y_s) au graphe de notre isomorphisme partiel déjà construit. On procède d'une façon similaire pour (ii), quitte à utiliser la nonexistence d'un plus grand élément dans E_2 .

Dans le cas (iii), l'ensemble $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ s'écrit comme l'union disjointe de deux sous-ensembles nonvides I_0 et I_1 , tels que si $i_k \in I_0$, alors $x_{i_k} < x_r$, et si $i_k \in I_1$, alors $x_r < x_{i_k}$. L'ensemble $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ s'écrit comme l'union disjointe de deux sous-ensembles J_0 et J_1 suivant la décomposition de I , en d'autres termes, $j_k \in J_i$ ($i = 0, 1$) si et seulement si $i_k \in J_i$. Comme J_0 et J_1 sont des ensembles finis et que E_2 est une chaîne dense, nous pouvons trouver $y_s \in E_2$ tel que y_s soit strictement supérieur à tous les éléments dont les indices sont dans J_0 et strictement inférieur à tous ceux dont les indices sont dans J_1 . Alors nous ajoutons (x_r, y_s) au graphe déjà construit. C'était le *va*.

Maintenant le *vient*. Nous avons obtenu à la fin de l'étape *va* un nouveau graphe

$$\{(x_{i_1}, y_{j_1}), \dots, (x_{i_n}, y_{j_n}), (x_r, y_s)\}.$$

On applique le procédé de *va* dans le sens inverse pour obtenir le *vient*. En d'autres termes, on choisit un élément $y_t \in E_2 \setminus \{y_{j_1}, \dots, y_{j_n}, y_s\}$ tel que t soit le plus petit indice qui n'est pas dans $J \cup \{s\}$, et on essaye de lui attribuer un antécédent x_u dans $E_1 \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_m\}$ en considérant les divers cas qui sont des analogues de (i), (ii) et (iii).

Cette construction épuise les deux chaînes complètement puisqu'on trouve pour x_k une image au plus tard à la fin du k^e *va*, et y_k aura son antécédent pas plus tard qu'à la fin du k^e *vient*. La bonne définition de f et son injectivité découlent de la construction qui évite d'utiliser les éléments qui ont déjà apparu dans le graphe. Nous avons obtenu notre isomorphisme. \square

Notons en passant que cet argument ne marcherait pas si les chaînes n'étaient pas dénombrables. Pouvez-vous voir quelle partie de l'argumentation ci-dessus ne marcherait pas ?

1.2 Corps algébriquement clos

Un corps K est dit *algébriquement clos* si tout polynôme nonconstant à coefficients dans K a une racine dans K . Donc les corps algébriquement clos sont larges. En particulier, ils sont infinis (pourquoi?). On peut montrer que chaque corps a une extension algébriquement close. Donc d'une certaine manière ce sont des objets dans lesquels nous vivons quand nous sommes dans un corps mais parfois ils sont trop larges pour être visibles. Dans ce cours on les rencontrera plus d'une fois.

Il faut souligner que les raisonnements du théorème 1.1 étaient possibles parce que les chaînes denses sans extrémités sont larges d'un certain point de vue. Maintenant nous essayerons de prouver un résultat similaire à celui de la première section. Cette fois-ci le mot isomorphisme sera utilisé au sens usuel des isomorphismes des corps.

Théorème 1.2 Soient K et L deux corps algébriquement clos de même caractéristique et de degré de transcendance infini sur le corps premier. Soient $a \in K$ et $b \in L$ tels que les sous-corps engendrés par a et b soient isomorphes. Si $\alpha \in K$, alors il existe $\beta \in L$ et un isomorphisme $\langle a, \alpha \rangle \cong \langle b, \beta \rangle$ qui étend $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle$ et qui associe β à α .

Preuve. On pose $k = \langle a \rangle$ et $l = \langle b \rangle$. Par hypothèse il existe un isomorphisme entre k et l qui transforme a en b . Nous trouverons un élément $\beta \in L$ tel que $k(\alpha)$ et $l(\beta)$ soient isomorphes.

Il existe deux possibilités. La première est que α soit algébrique sur k . Alors α a un polynôme minimal $P[X] \in k[X]$. L'isomorphisme entre k et l transforme $P[X]$ en un polynôme irréductible $Q[X] \in l[X]$. Comme L est algébriquement clos, $Q[X]$ a un zéro β dans L . $Q[X]$ est le polynôme minimal de β sur l et $k(\alpha) \cong l(\beta)$.

La deuxième possibilité est que α soit transcendant sur k . Donc pour tout ensemble fini $\{P_1[X], \dots, P_s[X]\}$ de polynômes dans $k[X]$, $P_i[\alpha] \neq 0$. Comme L est de degré transcendance infini sur son corps premier et l est engendré par un ensemble fini, on peut trouver un β satisfaisant en même temps toutes les *inéquations* $Q[X] \neq 0$ avec $Q[X] \in l[X]$. Alors $k(\alpha) \cong l(\beta)$. \square

Donc il existe une certaine équivalence entre les parties finies des deux corps du théorème 1.2. Il faut souligner que nous n'avons fait aucune hypothèse sur le cardinal de K ni de L . De plus pour faire aboutir notre raisonnement il n'était pas nécessaire d'avoir un degré de transcendance infini. Mais si on voulait répéter une infinité de fois?...

1.3 Un groupe dans un corps, un corps dans un groupe

Les corps, surtout ceux qui sont algébriquement clos, seront très visibles dans ce cours. En général, la *présence* d'un corps dans un groupe transforme l'objet quasi-impénétrable qu'est le groupe, en une structure avec des propriétés supplémentaires inconnues auparavant et qui sont utiles pour la compréhension de ce groupe. Pour le moment nous nous contentons d'un exemple où nous vérifierons cette présence que nous venons de citer.

Soit K un corps contenant au moins 3 éléments. G sera le groupe de matrices suivant :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & t \end{pmatrix} : t \in K^\times, u \in K_+ \right\}$$

muni de la loi usuelle de multiplication des matrices. Nous laissons aux soins des lecteurs la vérification du fait qu'il s'agit d'un groupe. Tout ce qui relève de la structure de groupe dans G , en d'autres termes, tout ce qui peut être exprimé en utilisant la loi interne de groupe peut être exprimé en utilisant les lois additive et multiplicative de K . Ceci n'est que la conséquence de notre hypothèse que la loi interne de groupe soit la multiplication des matrices qui est définie en utilisant le produit et la somme dans K . On peut donc dire que G est *définissable* dans K . Tout cela témoigne de la présence de G dans K .

Nous pouvons procéder dans le sens inverse aussi. G est le produit semidirect $G = U \rtimes T$ où

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in K_+ \right\} \quad \text{et} \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} : t \in K^\times \right\}$$

et l'action de T sur U est par conjugaison.

Notre condition sur le cardinal de K entraîne que T soit le centralisateur d'un de ses éléments non triviaux. U jouit de la même propriété. En plus le sous-groupe T est isomorphe au groupe multiplicatif (K^\times, \cdot) de K , et le sous-groupe U est isomorphe au groupe additif $(K, +)$.

A partir de toutes ces données nous pouvons définir une structure de corps L . L'ensemble de base du corps L sera celui du groupe U . L'addition dans L sera exactement la loi interne de groupe de U . En particulier, l'élément neutre du groupe additif de L est l'élément neutre de U . Quant à la multiplication, nous fixons d'abord un élément quelconque $u \in U^\times$. Nous utiliserons le fait que T agit sur U^\times transitivement et librement (pourquoi?). Donc pour tout $v \in U^\times$, il

existe un unique élément $t \in T$ tel que $u^t = v$. Maintenant si $u_1, u_2 \in U^\times$ et que $t_1, t_2 \in T$ tels que $u^{t_1} = u_1$ et $u^{t_2} = u_2$, alors le produit (dans L) $u_1 * u_2$ est défini comme $(u^{t_1})^{t_2} = u^{t_1 t_2}$. C'est un bon exercice maintenant de vérifier que $L = (U, \cdot, *, 1, u)$ est un corps isomorphe à K .

En conclusion, nous voyons que le corps K est présent dans G . Même si l'on oubliait la définition initiale de G , il serait possible de retrouver le corps de base à partir de la pure structure de groupe.

1.4 Conditions de chaîne dans les groupes

Nous dirons qu'un groupe G satisfait la *condition de chaîne descendante pour les centralisateurs* ou la *condition* \mathcal{M}_C si G ne contient pas de suite infinie descendante de la forme

$$C_G(X_1) > C_G(X_2) > C_G(X_3) > \dots$$

où les X_i sont des sous-ensembles de G . Remarquez qu'en considérant $X_1 \cup \dots \cup X_k$, on peut supposer que les X_i forment une suite croissante de sous-ensembles de G .

Evidemment, tous les groupes finis satisfont la propriété \mathcal{M}_C . On dit que c'est une *condition de finitude*. Mais la classe des groupes ayant cette propriété est plus large. Nous montrons que les *groupes linéaires* ont la propriété \mathcal{M}_C . Soient K un corps et V un K -espace vectoriel de dimension finie. $\text{GL}(V)$ dénotera le groupe d'automorphismes de K -espace vectoriel de V . Si on fixe une base de V , alors il est bien connu que $\text{GL}(V)$ a une représentation matricielle. On utilisera aussi la notation $\text{GL}_n(K)$ où n est la dimension de l'espace vectoriel. Un groupe linéaire est un groupe isomorphe à un sous-groupe de $\text{GL}_n(K)$ pour un certain corps K . En d'autres termes, c'est un groupe qui a une représentation matricielle fidèle sur un certain corps.

Théorème 1.3 *Soit K un corps et $n \geq 1$ un entier positif. Alors $\text{GL}_n(K)$ satisfait la condition \mathcal{M}_C .*

Preuve. Soit $G = \text{GL}_n(K)$ où K et n sont comme dans l'énoncé. Si $X \subseteq \text{GL}_n(K)$, alors $M \in C_G(X)$ si et seulement si $AM = MA$ pour toute matrice $A \in X$. En d'autres termes, on trouve les éléments de $C_G(X)$ en résolvant des équations matricielles dont les paramètres proviennent de X . Cela équivaut à la résolution des systèmes d'équations à n^2 inconnues dont les coefficients sont les coefficients des matrices dans X . Dans un tel système d'équations, il ne peut pas y avoir plus de n^2 équations qui soient indépendantes. Donc quelque soit la taille de X , il aura un sous-ensemble X_0 d'au plus n^2 éléments tel que $C_G(X) = C_G(X_0)$. Il découle de cette remarque que la longueur d'une quelconque suite descendante de centralisateurs dans G est bornée par n^2 . \square

Corollaire 1.4 *Les groupes linéaires ont la propriété \mathcal{M}_C .*

Preuve. La propriété \mathcal{M}_C est préservée par le passage aux sous-groupes (pourquoi?). Alors la conclusion découle du théorème 1.3. \square

Maintenant nous donnerons un exemple de groupe infini qui ne satisfait pas la condition \mathcal{M}_C . Nous investirons un peu plus d'effort qu'il n'est nécessaire pour aboutir à un groupe qui a d'autres propriétés intéressantes. Le groupe alterné sur un ensemble de n éléments, $\text{Alt}(n)$ (parfois A_n) est le groupe des *permutations paires* sur un ensemble à n éléments. Quitte à oublier quelques isomorphismes nous pouvons supposer que si $m \leq n$, alors $\text{Alt}(m) \leq \text{Alt}(n)$. Nous définissons

$$\text{Alt}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \text{Alt}(n).$$

$\text{Alt}(\mathbb{N})$ est un groupe puisqu'il est l'union d'une suite croissante de groupes. Considérons la suite croissante de sous-ensembles

$$X_i = \{(1, 2, 3), \dots, (i+1, i+2, i+3)\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $C_{\text{Alt}(\mathbb{N})}(X_i) > C_{\text{Alt}(\mathbb{N})}(X_{i+1})$. Pour voir cela il suffit de considérer les permutations paires dont les supports sont disjoints des éléments de X_i sans l'être de ceux des éléments de X_{i+1} . Bien sûr un raisonnement similaire montrerait que le groupe des permutations d'un ensemble infini ne satisfait pas la condition \mathcal{M}_C . Par contre $\text{Alt}(\mathbb{N})$ a d'autres propriétés intéressantes : c'est un groupe *simple* et *localement fini*. Rappelons qu'un groupe est simple s'il n'a pas de sous-groupe *normal* propre et nontrivial. La finitude locale est moins connue comme propriété. Elle implique que tout élément du groupe soit contenu dans un sous-groupe fini. C'est une autre condition de finitude. Essayez de vérifier ces deux propriétés de $\text{Alt}(\mathbb{N})$.

Chapitre 2

Notions de base

En théorie des modèles, sont étudiées diverses *structures* mathématiques par le biais de leurs *sous-ensembles définissables*. Bien que la notion de structure soit assez naturelle pour un mathématicien, il faut la décrire d'une façon rigoureuse pour les objectifs de ce cours. Une structure est un ensemble sous-jacent, appelé *univers* ou *ensemble de base*, muni d'une famille d'éléments distingués de l'univers, *les constantes*; d'une famille de relations sur l'univers et d'une famille de fonctions sur ce même univers. Une structure n'est donc pas qu'un ensemble. A titre d'exemple, un groupe est une structure où l'ensemble sous-jacent est exactement celui des éléments du groupe, dont la seule constante est l'identité et qui a une fonction binaire définissant la loi interne de groupe et une fonction unaire définissant l'inversion. Nous verrons que l'inclusion de la fonction inversion dans la structure de groupe n'est pas nécessaire. Bien sûr, nous pouvons distinguer d'autres constantes, fonctions, relations sur ce même univers de groupe. Ce serait un exemple de *structure additionnelle*.

La *signature* d'une structure est la donnée de trois familles d'indices pour indexer les trois familles susmentionnées et d'une fonction associant à chaque indice la constante, relation ou fonction correspondante aussi bien que le nombre de variables qui peuvent apparaître dans celles-ci. A une classe de structures avec une signature *fixée* est associé un *langage du premier ordre* qui est un ensemble de symboles et de règles syntaxiques pour mettre ensemble ces symboles afin d'arriver à des *formules du premier ordre*. Il est temps de préciser tout cela.

2.1 Langages du premier ordre, structures

Les symboles dans un langage \mathcal{L} du premier ordre se divisent en trois catégories :

1. Les symboles qui nomment les éléments de la signature fixée :
 - (i) Symboles de relation
 - (ii) Symboles de fonction
 - (iii) Symboles de constante
2. Symboles logiques
 - (i) Quanteurs : \forall, \exists
 - (ii) Connecteurs : \neg (*la négation*), \wedge (*la conjonction, "et"*), \vee (*la disjonction, "ou"*), \rightarrow (*l'implication*), \leftrightarrow (*l'équivalence*)
3. Variables et parenthèses

La première catégorie varie d'une signature à une autre tandis que les deux autres sont invariantes. Il existe un symbole de relation qui, bien qu'il ne soit pas nécessairement présent dans toutes les branches de la logique, sera toujours avec nous : l'égalité. Même si cela n'est pas mentionné, dans ce cours tout langage contiendra le symbole de la relation d'égalité.

L'*arité* d'un symbole est le nombre de variables concernées par ce symbole. En particulier, un symbole de constante peut être vu comme un symbole de fonction d'arité 0.

Le cardinal $|\mathcal{L}|$ d'un langage \mathcal{L} est défini comme le maximum de $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ et du cardinal de l'ensemble des symboles nommant les éléments de la signature.

Une structure \mathcal{M} qui correspond à un langage \mathcal{L} du premier ordre sera dite une \mathcal{L} -*structure*. Les symboles de \mathcal{L} sont interprétés dans \mathcal{M} de la façon suivante :

1. Pour chaque symbole de constante c dans \mathcal{L} , il existe un élément distingué $c^{\mathcal{M}}$ dans M , où M est l'ensemble sous-jacent de la structure \mathcal{M} .
2. Pour chaque symbole f de fonction n -aire dans \mathcal{L} , il existe dans \mathcal{M} une fonction $f^{\mathcal{M}}$ de M^n dans M .
3. Pour chaque symbole R de relation n -aire dans \mathcal{L} , il existe dans \mathcal{M} , une relation $R^{\mathcal{M}}$ sur M^n .

Essayons d'illustrer par un exemple le dernier paragraphe un peu trop formel. Si \mathcal{L} est un langage contenant $\{f_1, f_2, c_1\}$ où f_1 est une fonction binaire, f_2 est une fonction unaire et c_1 une constante, un groupe $\mathcal{G} = (G; \cdot, ^{-1}, 1)$ est une \mathcal{L} -structure où \cdot est l'interprétation $f_1^{\mathcal{G}}$, $^{-1}$ est $f_2^{\mathcal{G}}$ et 1 est $c_1^{\mathcal{G}}$. Dans ce qui suit, afin d'éviter d'alourdir la notation nous aurons tendance à utiliser soit la même notation pour les symboles et leurs interprétations soit la notation "naturelle" au cas où les symboles du langage sont introduits pour nommer des objets "naturels" d'un certain contexte, en l'occurrence $(\cdot, ^{-1}, 1)$ dans un groupe. Donc $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$ sera le langage des groupes. Notons que celui des monoïdes, $\{\cdot, 1\}$ serait suffisant pour exprimer tout ce qui est expressible dans $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$.

On peut bien sûr enrichir ce langage. A titre d'exemple, nous pouvons ajouter un symbole de relation R_1 binaire à $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$ que nous pouvons interpréter dans certains groupes comme une relation d'ordre. Les structures correspondantes seraient les groupes ordonnés.

Un autre exemple serait le langage des corps qui peut être décrit de la façon suivante : $\{+, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1\}$. Nous vous laissons le soin d'interpréter les symboles "naturellement".

2.2 Expansions, réduits ; extensions, sous-structures

A partir d'une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} , nous pouvons, sans changer l'ensemble sous-jacent, obtenir une \mathcal{L}^+ -structure \mathcal{M}^+ en ajoutant au langage \mathcal{L} des symboles qui seront interprétés par des fonctions, des relations ou des constantes sur M . Cette structure plus riche est une *expansion* de \mathcal{M} . Il faut souligner qu'une expansion de \mathcal{M} a le même ensemble sous-jacent M .

Dans le sens inverse il est possible de réduire une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} à une \mathcal{L}^- -structure \mathcal{M}^- en enlevant de \mathcal{L} certains symboles sans changer M . \mathcal{M}^- est un *réduit* de \mathcal{M} .

Une notion liée est celle de *sous-structure*. Si \mathcal{M} est une \mathcal{L} -structure avec M comme ensemble de base, et M contient un sous-ensemble nonvide N fermé sous l'action des fonctions de \mathcal{M} et qui contient toutes les constantes de \mathcal{M} , alors \mathcal{N} est une *sous-structure* de \mathcal{M} . Dans ce cas on dit aussi que \mathcal{M} est une *extension* de \mathcal{N} . Donc, quand il s'agit d'une sous-structure ou d'une extension, ce n'est pas le langage mais l'ensemble de base qui varie.

Exemples : 1. Soient \mathcal{L} le langage des corps tel qu'il était introduit dans la section précédente, $\mathcal{K} = (K, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$ en tant que \mathcal{L} -structure. Le groupe additif du corps \mathcal{K} , qui peut être vu comme une nouvelle structure $\mathcal{K}_1 = (K, +, -, 0)$, est un réduit de \mathcal{K} . Evidemment, le même groupe additif peut être vu comme un autre réduit de \mathcal{K} , $\mathcal{K}_2 = (K, +, 0)$. La différence provient des choix différents de langage. \mathcal{K} est une expansion de \mathcal{K}_1 et de \mathcal{K}_2 .

2. Nous gardons \mathcal{K} et \mathcal{L} du dernier exemple. Une \mathcal{L} -sous-structure de \mathcal{K} est un sous-corps de \mathcal{K} . Mais si le langage est réduit à $\mathcal{L}_1 = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ une \mathcal{L}_1 -sous-structure de \mathcal{K} est un anneau. Donc le choix de langage est important quand il s'agit des sous-structures.

2.3 Syntaxe

Nous introduisons les règles pour écrire des *formules du premier ordre* à partir des symboles d'un langage \mathcal{L} fixé.

Définition 2.1 Soit \mathcal{L} un langage. Un \mathcal{L} -terme est défini de la façon suivante :

1. Une variable est un terme.
2. Un symbole de constante est un terme.
3. Si t_1, \dots, t_n sont des termes et que f est un symbole de fonction n -aire, alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme.
4. Une expression est un \mathcal{L} -terme seulement si l'on peut démontrer cela en utilisant 1, 2 et 3.

Exemple intuitif : Les polynômes dans le langage des corps.

Définition 2.2 Soit \mathcal{L} un langage. Une formule atomique est définie de la façon suivante :

1. Si t_1 et t_2 sont deux termes, alors $t_1 = t_2$ est une formule atomique.
2. Si t_1, \dots, t_n sont des termes et que R est un symbole de relation n -aire, alors $R(t_1, \dots, t_n)$ est une formule atomique.

Définition 2.3 Soit \mathcal{L} un langage. On définit une \mathcal{L} -formule de la façon suivante :

1. Une formule atomique est une formule.
2. Si α et β sont des formules, alors $\alpha \wedge \beta$ et $\neg\alpha$ sont des formules.
3. Si α est une formule, alors $\forall x\alpha$ et $\exists x\alpha$, où x est une variable, est une formule.
4. Une expression est une \mathcal{L} -formule seulement si l'on peut démontrer cela en utilisant 1, 2 et 3.

Notons que les symboles logiques \vee , \rightarrow , \leftrightarrow n'apparaissent pas dans les définitions que nous venons de donner. C'est parce qu'ils sont expressibles en fonction des autres : $\alpha \vee \beta$ est $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, $\alpha \rightarrow \beta$ est $\neg\alpha \vee \beta$. Finalement, $\alpha \leftrightarrow \beta$ est $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ par. Soulignons aussi que $\forall x\alpha$ est équivalent à $\neg\exists x\neg\alpha$.

Une implication importante des règles que nous venons de définir est que dans une formule du premier ordre les quantifications se font sur les variables, et \wedge , équivalamment \vee , ne peut s'appliquer qu'à un nombre fini de formules.

Les notions suivantes seront fréquemment utilisées :

Définition 2.4 Les variables qui sont quantifiées sont appelées variables liées. Les variables non-quantifiées sont des variables libres. Une formule sans variable libre est un énoncé.

Exemples : 1. Dans le langage des groupes la formule suivante décrit tout élément qui commute avec tous les éléments du groupe :

$$\forall y(x.y = y.x)$$

Une autre façon d'écrire cela, tant que le langage le permet, serait

$$\forall y(y^{-1}.x.y = x)$$

Dans chacune de ces formules y est une variable liée tandis que x ne l'est pas.

La formule suivante est par contre un énoncé

$$\forall x\forall y(x.y = y.x)$$

Dans l'interprétation naturelle dans un groupe cet énoncé exprime que le groupe concerné est abélien.

2. Si p est un nombre premier, alors

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_p \text{ fois} = 0$$

est un énoncé dans le langage des corps qui énonce que la caractéristique est p .

3. Si $\mathcal{L} = \{<\}$ est un langage où $<$ est un symbole de relation binaire interprété comme une relation d'ordre strict,

$$\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow (x < z \wedge z < y))$$

exprime la densité de l'ordre.

2.4 Satisfaction d'une formule du premier ordre

La *satisfaction* d'une formule du premier ordre, que nous définirons dans cette section, est le lien entre les considérations syntaxiques et celles sémantiques. Intuitivement c'est la résolution d'un système d'équations fini en utilisant les éléments de l'ensemble sous-jacent d'une structure donnée. Elle fait fortement intervenir les structures dont elle dépend. Pour illustrer cette dépendance il suffit de considérer l'exemple de l'équation polynômiale $x^2 + x + 1 = 0$ qui n'est pas "satisfaite" dans \mathbb{R} mais qui l'est dans \mathbb{C} .

Nous définissons d'abord la *valeur* d'un terme :

Définition 2.5 Soient \mathcal{L} un langage et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure avec ensemble de base M . Si t est un terme à n variables (dénnoté par $t = t(x_1, \dots, x_n)$) et $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n) \in M^n$, alors la valeur $t[\bar{m}]$ est définie de la façon suivante :

1. Si t est la variable x_i , alors $t[\bar{m}] = m_i$.
2. Si t est un symbole de constante c , alors $t[\bar{m}] = c^{\mathcal{M}}$.
3. Si $t = f(t_1, \dots, t_k)$ où f est une fonction et les t_i sont des termes, $t[\bar{m}] = f^{\mathcal{M}}(t_1[\bar{m}], \dots, t_k[\bar{m}])$.

En particulier les valeurs d'un terme sont des éléments de M .

Définition 2.6 Soient \mathcal{L} un langage et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure avec ensemble de base M . Si $\phi(\bar{x})$ est une formule dont les variables libres sont parmi $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, on définit récursivement la satisfaction de ϕ de la façon suivante :

1. Si ϕ est de la forme $t_1 = t_2$ où t_1 et t_2 sont deux termes, alors $\mathcal{M} \models (t_1 = t_2)[\bar{m}]$ si et seulement si $t_1[\bar{m}] = t_2[\bar{m}]$.
2. Si ϕ est de la forme $R(t_1, \dots, t_n)$ où R est un symbole de relation n -aire, alors $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ si et seulement si $(t_1[\bar{m}], \dots, t_n[\bar{m}])$ sont dans la relation $R^{\mathcal{M}}$.
3. Si ϕ est de la forme $\neg\alpha$, alors $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ si et seulement si il n'est pas le cas que $\mathcal{M} \models \alpha[\bar{m}]$ ($\mathcal{M} \not\models \alpha[\bar{m}]$).
4. Si ϕ est de la forme $\alpha \wedge \beta$, alors $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \alpha[\bar{m}]$ et $\mathcal{M} \models \beta[\bar{m}]$.
5. Si ϕ est de la forme $\forall y \theta(y, \bar{x})$, alors $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \theta[m', \bar{m}]$ pour tout $m' \in M$.

Un énoncé ψ , n'ayant pas de variables libres, est vrai ($\mathcal{M} \models \psi$) ou faux ($\mathcal{M} \not\models \psi$). Donc pour tout uple \bar{m} extrait de M et tout énoncé ψ , $\mathcal{M} \models \psi[\bar{m}]$ si ψ est vrai et $\mathcal{M} \not\models \psi[\bar{m}]$ si ψ est faux.

Lemme 2.7 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{L} -structures. On suppose que $M \subseteq N$. Alors on a les conclusions suivantes :

1. Soit $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in M^k$. Si $\phi(x_1, \dots, x_k)$ est une formule sans quanteurs, alors $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ si et seulement si $\mathcal{N} \models \phi[\bar{m}]$.
2. Si $\phi(x)$ est une formule sans quanteurs et que $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x)$, alors $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x)$.
3. Si $\phi(x)$ est une formule sans quanteurs et que $\mathcal{N} \models \forall x \phi(x)$, alors $\mathcal{M} \models \forall x \phi(x)$.

Preuve. Exercice \square

Définition 2.8 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et Φ un ensemble d'énoncés écrits dans \mathcal{L} . Si pour tout $\phi \in \Phi$, $\mathcal{M} \models \phi$, alors on dit que \mathcal{M} est un modèle de Φ . Nous écrirons dans ce cas $\mathcal{M} \models \Phi$.

Si Φ est un ensemble d'énoncés et que σ est un énoncé tel que pour toute structure \mathcal{M} , $\mathcal{M} \models \sigma$ chaque fois que $\mathcal{M} \models \Phi$, alors on dira que σ est une conséquence de Φ . Dans ce cas, on écrira $\Phi \vdash \sigma$.

Exemples : 1. Si \mathcal{A} est une structure de groupe abélien, alors

$$\mathcal{A} \models \forall x \forall y (x.y = y.x)$$

2. Nous vous laissons le soin de trouver l'interprétation de l'énoncé suivant dans un groupe :

$$\forall x (x^2 = 1) \vdash \forall x \forall y (x.y = y.x)$$

2.5 Morphismes entre deux structures d'un même langage

Cette section a pour but de définir rigoureusement dans le contexte de la théorie des modèles la notion de morphisme. Nous avons déjà rencontré un cas particulier de cette notion dans le premier chapitre dans le contexte des chaînes denses sans extrémités.

Définition 2.9 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{L} -structures avec ensembles de base M et N respectivement. Une application ν de M vers N est dite un homomorphisme si elle satisfait les conditions suivantes :

1. Si f est un symbole de fonction n -aire de \mathcal{L} , alors pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$,

$$\nu(f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(\nu(a_1), \dots, \nu(a_n)).$$

2. Si R est un symbole de relation n -aire dans \mathcal{L} , alors pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \text{ implique } (\nu(a_1), \dots, \nu(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}.$$

3. Si c est un symbole de constante, alors $\nu(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$.

Nous soulignons qu'un homomorphisme est défini entre deux structures d'un même langage. Par contre il n'est pas nécessaire qu'il soit expressible dans ce langage.

Un *plongement* est un homomorphisme injectif. Un *isomorphisme* est un homomorphisme bijectif. Un *endomorphisme* est un homomorphisme d'une structure vers elle-même. Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif.

Nous avons déjà étudié des exemples d'isomorphisme dans le premier chapitre bien que cela fût démontré sans faire mention des notions de ce chapitre. Nous donnons d'autres exemples.

Exemples : 1. Si $\mathcal{L} = \{., ^{-1}, 1\}$ est le langage des groupes, un homomorphisme entre deux structures est un homomorphisme de groupes au sens usuel. Nous pouvons légèrement changer ces données en prenant comme langage $\mathcal{L}' = \{., c\}$ avec $.$ une fonction binaire et c un symbole de constante et obtenir un isomorphisme (de groupes) entre les deux structures

$$\mathcal{R}_1 = (\mathbb{R}, +, 0) \text{ et } \mathcal{R}_2 = (\mathbb{R}, ., 1)$$

donné par la fonction exponentielle.

2. On fixe $\mathcal{L} = \{<\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire. $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ est une \mathcal{L} -structure. L'application ν de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q} définie par $f(x) = x - 1$ est un automorphisme de \mathcal{Q} .

Maintenant nous ajoutons à \mathcal{L} un symbole de relation unaire P dont l'interprétation sera l'ensemble des rationnels positifs. En d'autres termes, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{P\}$ et $\mathcal{Q}^+ = (\mathbb{Q}, <, \mathbb{Q}^+)$. L'application ν n'est plus un automorphisme de cette nouvelle structure.

Nous finissons cette section en démontrant une proposition dont l'énoncé est naturel mais la preuve est quelque peu fastidieuse. Rappelons, avant d'énoncer la proposition, que si M est un ensemble et que ν est une application de M vers un autre ensemble, pour un k -uplet $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k)$ extrait de M , $\nu(\bar{m}) = (\nu(m_1), \dots, \nu(m_k))$.

Proposition 2.10 *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{L} -structures. Si ν est un homomorphisme de \mathcal{M} vers \mathcal{N} , alors nous avons les conclusions suivantes :*

1. *Si $t(x_1, \dots, x_k)$ est un terme de \mathcal{L} , alors pour tout $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in M^k$, $\nu(t[\bar{m}]) = t[\nu(\bar{m})]$.*
2. *Si ν est un homomorphisme de \mathcal{M} vers \mathcal{N} , alors pour toute formule atomique $\phi(x_1, \dots, x_k)$ et tout $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k)$, si $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ alors $\mathcal{N} \models \phi[\bar{n}]$.*
3. *Si ν est un plongement de \mathcal{M} vers \mathcal{N} , alors pour toute formule atomique $\phi(x_1, \dots, x_k)$ et tout $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k)$, $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ si et seulement si $\mathcal{N} \models \phi[\bar{n}]$.*
4. *Si ν est un isomorphisme, alors pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_l)$ du premier ordre $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ ($\bar{m} = (m_1, \dots, m_l)$) si et seulement si $\mathcal{N} \models \phi[\nu(\bar{m})]$.*

En particulier, deux \mathcal{L} -structures qui sont isomorphes satisfont les mêmes énoncés.

Preuve. La preuve fera usage d'une récurrence basée sur la nature inductive des définitions des sections 2.3 et 2.5. Les définitions syntaxiques de la section 2.3 permettent de définir la complexité d'une formule du premier ordre. Cela peut se faire d'une façon formelle mais nous nous limitons à la définir comme la longueur (le nombre de symboles utilisés) d'une formule.

Commençons par le premier point. Soit t un terme. Par la définition 2.1 1, t peut être une variable x . Sa valeur par la définition 2.5 1 sera obtenue en remplaçant x par un élément m de M . Donc, $\nu(t[m]) = \nu(m) = t[\nu(m)]$. Si t est un symbole de constante c , sa valeur est son interprétation $c^{\mathcal{M}}$ dans M . Par la définition d'un homomorphisme, $\nu(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}} = t[\nu(c^{\mathcal{M}})]$. Si f est un symbole de fonction k -aire et que $t = f(t_1, \dots, t_k)$, alors

$$\begin{aligned} \nu(t[\bar{m}]) &= \nu(f^{\mathcal{M}}(t_1[\bar{m}], \dots, t_k[\bar{m}])) \text{ la définition 2.5 3} \\ &= f^{\mathcal{N}}(\nu(t_1[\bar{m}]), \dots, \nu(t_k[\bar{m}])) \text{ la définition 2.9 1} \\ &= f^{\mathcal{N}}(t_1[\nu(\bar{m})], \dots, t_k[\nu(\bar{m})]) \text{ hypothèse de récurrence} \\ &= t[\nu(\bar{m})] \text{ la définition 2.5 3} \end{aligned}$$

Cela finit la preuve du premier point.

Démontrons le point 4 en utilisant le premier point et la récurrence sur la complexité d'une formule du premier ordre. Les points 2 et 3 et la découverte des raisons d'être de leurs hypothèses sont laissés au lecteur. Si ϕ est de la forme, $t_1 = t_2$ où t_1 et t_2 sont des termes et $\mathcal{M} \models (t_1 = t_2)[\bar{m}]$, alors par la définition 2.6 1, $t_1[\bar{m}] = t_2[\bar{m}]$. Alors, $\nu(t_1[\bar{m}]) = \nu(t_2[\bar{m}])$, et on conclut en utilisant le premier point. Si ϕ est de la forme $R(t_1, \dots, t_k)$ où R est un symbole de relation et $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_k)[\bar{m}]$, alors par la définition 2.6 1, $(t_1[\bar{m}], \dots, t_k[\bar{m}]) \in R^{\mathcal{M}}$. Il découle de la définition 2.9 2 que $(\nu(t_1[\bar{m}]), \dots, \nu(t_k[\bar{m}])) \in R^{\mathcal{N}}$. Donc par récurrence, $(t_1[\nu(\bar{m})], \dots, t_k[\nu(\bar{m})]) \in R^{\mathcal{N}}$ et la conclusion suit de la définition 2.6 2.

Si ϕ est de la forme $\neg\alpha$, alors par la définition 2.6 3, $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ si et seulement si \bar{m} ne satisfait pas α . Par récurrence $\mathcal{M} \models \alpha[\bar{m}]$ équivaut à $\mathcal{N} \models \alpha[f(\bar{m})]$. En utilisant la définition 2.6 3 nous concluons que $\mathcal{N} \models \neg\alpha[f(\bar{m})]$.

Le cas des conjonctions est réglé en utilisant les définitions. Donc nous passons à la quantification et supposons que ϕ soit de la forme $\forall y \theta(y, x_1, \dots, x_l)$ ayant variables libres parmi les x_i . Par la définition 2.6 5, $\mathcal{M} \models \forall y \theta(y, x_1, \dots, x_l)[\bar{m}]$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \theta[m', \bar{m}]$ pour tout $m' \in M$. Par récurrence, cela équivaut à $\mathcal{N} \models \theta[\nu(m'), \nu(\bar{m})]$ pour tout $m' \in M$. Or ν est une surjection par hypothèse, donc $\mathcal{N} \models \theta[n', \nu(\bar{m})]$ pour tout $n' \in N$. Maintenant on applique la définition 2.6 5 pour conclure. La définition 2.3 et les équivalences des formules qui la suivent montrent que la preuve du deuxième point est finie. \square

2.6 Théories du premier ordre et notions liées

Dans cette section nous définirons certaines notions importantes qui sont utilisées dans la suite et qui lient diverses notions et idées des sections précédentes.

Définition 2.11 Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux \mathcal{L} -structures où \mathcal{L} est un langage du premier ordre. \mathcal{A} et \mathcal{B} sont dits élémentairement équivalentes si elles sont modèles d'exactly les mêmes énoncés. On écrit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

La proposition 2.10 montre que deux structures isomorphes sont élémentairement équivalentes. L'implication inverse est fautive en général. Par contre on peut démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.12 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{A} et \mathcal{B} deux \mathcal{L} -structures finies. Alors $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ si et seulement si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Preuve. Une direction de l'équivalence découle de la proposition 2.10. Nous procédons à démontrer l'autre direction. Donc, \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux structures finies élémentairement équivalentes dont les ensembles de base sont dénotés par A et B respectivement. Les hypothèses impliquent que $|A| = |B|$ (pourquoi?). En particulier il suffit de trouver un plongement de \mathcal{A} dans \mathcal{B} . Nous construirons un tel plongement en faisant des "va" successifs.

Soit $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ une énumération des éléments de A . On commence avec a_1 et on considère toutes les formules du premier ordre à au plus une variable libre dans le langage \mathcal{L} qui sont satisfaites par a_1 . En d'autres termes ce sont les énoncés, et les formules à exactement une variable libre satisfaites par a_1 . Comme A est un ensemble fini, on peut supposer que c'est un ensemble fini de formules. Ces éléments seront notés $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ (comme nous l'avons déjà remarqué, il se peut que certains d'entre eux ne contiennent pas de variable libre). Alors $\mathcal{A} \models \bigwedge_{i=1}^n \phi[a_1]$. Donc en particulier $\mathcal{A} \models \exists x \bigwedge_{i=1}^n \phi(x)$. Comme $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \models \exists x \bigwedge_{i=1}^n \phi(x)$. Alors on choisit un élément $b_1 \in B$ tel que $\mathcal{B} \models \exists x \bigwedge_{i=1}^n \phi[b_1]$.

Pour l'étape de récurrence on procède d'une façon similaire au dernier paragraphe. Supposons qu'une bijection dont le graphe est $\{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$ soit établie. On considère toutes les formules $\phi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ à au plus $k+1$ variables libres telles que $\mathcal{A} \models \phi[a_1, \dots, a_k, a_{k+1}]$. On peut supposer qu'il en existe un nombre fini, ϕ_1, \dots, ϕ_n . Alors $\mathcal{A} \models \bigwedge_{i=1}^n \phi[a_1, \dots, a_k, a_{k+1}]$. Il en découle que

$$\mathcal{A} \models \exists x \left(\bigwedge_{i=1}^n \phi(x_1, \dots, x_k, x) \wedge \bigwedge_{j=1}^k (x \neq x_j) \right) [a_1, \dots, a_k].$$

Par récurrence,

$$\mathcal{B} \models \exists x \left(\bigwedge_{i=1}^n \phi(x_1, \dots, x_k, x) \wedge \bigwedge_{j=1}^k (x \neq x_j) \right) [b_1, \dots, b_k].$$

On choisit un b_{k+1} témoignant cette satisfaction dans B .

La finitude des ensembles force ce procédé à aboutir et cela donne le plongement. \square

La notion suivante généralise l'équivalence élémentaire :

Définition 2.13 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{L} -structures telles que \mathcal{M} soit une sous-structure de \mathcal{N} . Nous dirons que \mathcal{M} est une sous-structure élémentaire de \mathcal{N} , ou que \mathcal{N} est une extension élémentaire de \mathcal{M} si pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_k)$ de \mathcal{L} et $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k) \in M^k$, $\mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]$ si et seulement si $\mathcal{N} \models \phi[\bar{m}]$. Dans ce cas, nous écrirons $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. Si $M \subset N$, on préférera $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Nous remarquons un fait qui sera utilisé sans mention. C'est que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ implique $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Proposition 2.14 (Test de Tarski) Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{L} -structures. On suppose que \mathcal{M} soit une sous-structure de \mathcal{N} . Alors $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ si et seulement si pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_k, y)$ et $(m_1, \dots, m_k) \in M^k$, quand $\mathcal{N} \models \exists y \phi(m_1, \dots, m_k, y)$, alors il existe un élément $m \in M$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(m_1, \dots, m_k, m)$.

Preuve. La nécessité de la condition est claire. La suffisance est un exercice (voir la preuve de la proposition 2.10). \square

Maintenant nous introduisons des notions qui suivent celles de la définition 2.8.

Définition 2.15 Soit \mathcal{L} un langage du premier ordre.

1. Un ensemble Θ d'énoncés dans \mathcal{L} est dit consistant, si Θ a un modèle. Remarquons que si σ est un énoncé, il n'est pas possible que $\Theta \vdash \sigma$ et $\Theta \vdash \neg\sigma$ à la fois quand Θ est consistant. En outre, dans le cas où $\Theta \vdash \sigma$ et $\Theta \vdash \neg\sigma$, nous dirons que Θ est contradictoire.
2. Une théorie du premier ordre T dans \mathcal{L} est un ensemble consistant d'énoncés qui contient toutes ses conséquences. T est engendré par un sous-ensemble A de T si toutes les conséquences de T sont aussi celles de A . On dit que A est un ensemble d'axiomes ou que A est une axiomatisation de T .
3. Une théorie T du premier ordre est dite complète si elle est maximale, équivalamment si pour tout énoncé σ dans \mathcal{L} , $\sigma \in T$ ou $\neg\sigma \in T$.

Parfois nous parlerons du cardinal d'une théorie du premier ordre. Il ne s'agira que du cardinal de son langage.

Lemme 2.16 Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux modèles d'une théorie complète T dans un langage \mathcal{L} , alors $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Preuve. Soit σ un énoncé vrai dans \mathcal{A} . Par complétude de T , soit $T \vdash \sigma$, soit $T \vdash \neg\sigma$. Comme $\mathcal{A} \models T$ et que $\mathcal{A} \models \sigma$, nécessairement $T \vdash \sigma$. Or $\mathcal{B} \models T$ aussi. Alors, par définition de \vdash , $\mathcal{B} \models \sigma$. \square

Dans la théorie des modèles on s'intéresse plutôt à des théories complètes. En général il n'est pas très facile de conclure si une théorie est complète. Il a fallu parfois des théorèmes profonds pour décider de la complétude d'une théorie. Le va-et-vient s'avérera un outil efficace. Par contre il existe une méthode simple mais utile pour trouver des théories complètes.

Définition 2.17 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure. $\text{Th}(\mathcal{M})$ est l'ensemble de tous les énoncés qui sont vrais dans \mathcal{M} .

Lemme 2.18 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure. Alors $\text{Th}(\mathcal{M})$ est une théorie complète. En plus, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ si et seulement si $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{N})$.

Preuve. Exercice \square

La complétude impose des restrictions aux cardinaux des modèles d'une théorie :

Lemme 2.19 Soit T une théorie complète. Si T a un modèle infini, alors tous ses modèles sont infinis.

Preuve. Exercice \square

Exemples : 1. Nous considérons le langage \mathcal{L} contenant un seul symbole, $<$, une relation binaire. Les énoncés

$$\begin{aligned} & \forall x (\neg(x < x)) \\ & \forall x \forall y (x < y \rightarrow \neg(y < x)) \\ & \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \end{aligned}$$

$$\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow (x < z \wedge z < y))$$

$$\forall x \exists y (x < y)$$

$$\forall x \exists y (y < x)$$

disent que $<$ est une chaîne dense sans extrémités. Donc, toute chaîne dense sans extrémités est un modèle de ces énoncés. Définissons T l'ensemble des conséquences de ces énoncés. T est une théorie. Nous verrons que c'est une théorie complète : la théorie des chaînes denses sans extrémités.

2. En utilisant le langage des corps nous pouvons écrire les énoncés du premier ordre qui expriment le fait d'être un corps. Donc c'est un ensemble consistant, et l'ensemble de toutes ses conséquences T est une théorie du premier ordre, celle des corps. Cette théorie est incomplète par le lemme 2.19 puisqu'elle a à la fois des modèles finis et infinis. On peut ajouter à T une infinité d'énoncés servant à exprimer que ses modèles sont infinis (comment ?) et obtenir une nouvelle théorie T_{inf} . T_{inf} n'est pas complète non plus. Pourquoi ?

3. Nous avons déjà remarqué que si $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ alors $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. L'implication réciproque est fautive en général. Nous donnons un exemple. On considère le langage \mathcal{L} contenant un symbole de fonction binaire $+$. Alors, $(\mathbb{Z}, +)$ et $(2\mathbb{Z}, +)$ sont deux \mathcal{L} -structures isomorphes. Donc $(\mathbb{Z}, +) \equiv (2\mathbb{Z}, +)$ par la proposition 2.10. Par contre, $(\mathbb{Z}, +) \models \exists x (x + x = y)[2]$ bien que ce ne soit pas le cas pour $(2\mathbb{Z}, +)$.

4. Illustrons le phénomène de l'exemple 3 dans une structure relationnelle. Cette fois-ci notre langage sera $\mathcal{L} = \{<\}$, $<$ étant un symbole de relation binaire que l'on interprétera comme une relation d'ordre. $(\mathbb{Z}, <)$ et $(2\mathbb{Z}, <)$ sont des \mathcal{L} -structures isomorphes, et $(2\mathbb{Z}, <)$ est une sous-structure de $(\mathbb{Z}, <)$. Nous considérons la formule $\phi(x, y)$ définie par $\exists z (x < z \wedge z < y)$.

$$(\mathbb{Z}, <) \models \phi(x, y)[0, 2]$$

mais

$$(2\mathbb{Z}, <) \models \neg \phi(x, y)[0, 2]$$

Chapitre 3

Compacité, saturation et types

“Ce malheureux Théorème de Compacité est entré par la petite porte, et on dirait que cette modestie originelle lui cause encore du tort dans les manuels de logique. C’est à mon avis un résultat beaucoup plus essentiel, primordial (et donc moins sophistiqué), que le Théorème de Complétude de Gödel...” Bruno Poizat, CTM, p.78

3.1 Théorème de compacité

Dans cette section nous énoncerons plusieurs versions équivalentes du théorème de compacité sans en donner une preuve. La preuve (ou les preuves), quoique très intéressante pour d’autres objectifs, ne l’est pas du point de vue de notre cours. Par contre le théorème est l’un des plus fondamentaux dans la théorie des modèles et il est surprenant de voir ses applications simples mais cruciales dans les contextes les moins attendus.

Théorème 3.1 (Théorème de compacité) *Un ensemble d’énoncés est consistant si et seulement si chacun de ses sous-ensembles finis est consistant.*

Remarquons que le lien entre ce théorème et la notion topologique de compacité n’est pas seulement restreint à une similarité de terminologies. En effet, un coup d’oeil attentif à l’énoncé indiquera combien ce théorème ressemble à une caractérisation de la notion de compacité en topologie.

Nous donnons des versions équivalentes du théorème de compacité qui seront aussi utiles :

Théorème 3.2 *Soit Φ un ensemble d’énoncés.*

1. *Si Φ est contradictoire, alors Φ a un sous-ensemble fini qui est contradictoire.*
2. *Si ϕ est une conséquence de Φ , alors il existe un sous-ensemble fini de Φ dont ϕ est conséquence.*

Preuve. L’équivalence de ces énoncés au théorème 3.1 est un simple exercice laissé aux soins du lecteur. \square

Nous donnons deux applications. La première est plutôt algébrique.

Proposition 3.3 *Il n’existe pas de théorie T du premier ordre (dans le langage des groupes) telle que $\mathcal{G} \models T$ si et seulement si \mathcal{G} est un groupe périodique, en d’autres termes un groupe dont tous les éléments sont d’ordre fini.*

Preuve. Nous faisons un raisonnement par l’absurde. Supposons qu’une telle théorie T existe. Soit \mathcal{L} le langage des groupes que nous augmentons à \mathcal{L}^+ en y ajoutant un symbole de constante c . Nous augmentons T à $T^+ = T \cup \{c^n \neq 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Un sous-ensemble fini T_0 de T^+ est l’union d’un nombre fini d’énoncés de T et d’un ensemble du type $\{c^{n_1} \neq 1, \dots, c^{n_k} \neq 1\}$. Si p est un

nombre premier, alors le groupe cyclique C_p d'ordre p est un modèle de T et en particulier de $T \cap T_0$. Si $p \geq \max(n_1, \dots, n_k)$ (d'autres p marcheraient aussi mais ce choix, qui est d'ailleurs, nous suffit), alors C_p est un modèle de T_0 parce qu'on peut interpréter c par un quelconque élément nontrivial de C_p . En d'autres termes, T_0 est consistante. Donc, T^+ a un modèle \mathcal{H}^+ et l'élément $c^{\mathcal{H}^+}$ est d'ordre infini. Maintenant nous pouvons réduire notre langage à \mathcal{L} , et la \mathcal{L} -structure réduite \mathcal{H} que l'on obtient est un modèle de T qui contient un élément d'ordre infini. C'est une contradiction. \square

La deuxième application concerne les nombre naturels.

Proposition 3.4 *Soit \mathcal{L} le langage qui ne contient qu'un seul symbole de relation binaire $<$. Dans ce langage, nous considérons la structure $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ où $<$ est l'ordre usuel des nombres naturels. Alors il existe une structure élémentairement équivalente à \mathcal{N} avec une suite infinie $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ et décroissante.*

Preuve. Comme deux structures élémentairement équivalentes ont la même théorie complète (le lemme 2.18), il suffit de considérer les modèles de $\text{Th}(\mathcal{N})$. On pose $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ et on augmente $\text{Th}(\mathcal{N})$ à T^+ en y ajoutant l'ensemble $\{c_{i+1} < c_i : i \in \mathbb{N}\}$. Un sous-ensemble fini T_0 de T^+ est l'union d'un sous-ensemble fini de $\text{Th}(\mathcal{N})$ et d'un ensemble de la forme $\{c_{i_1+1} < c_{i_1}, \dots, c_{i_m+1} < c_{i_m}\}$. Maintenant on peut interpréter ces c_j par $N - j$ dans \mathbb{N} , N étant le maximum de ces indices. \mathcal{N} est donc un modèle de T_0 . Par compacité, T^+ a un modèle \mathcal{P}^+ qui est aussi un modèle de chaque sous-ensemble de T^+ . Les interprétations des c_i dans \mathcal{P}^+ forment la chaîne descendante cherchée. Maintenant en réduisant \mathcal{P}^+ à une \mathcal{L} -structure, ce qui ne change rien à l'ensemble de base, on obtient un modèle \mathcal{P} de $\text{Th}(\mathcal{N})$ contenant la même chaîne descendante infinie. \square

3.2 Théorème de Löwenheim-Skolem

Dans cette section nous étudierons des théorèmes qui permettent de démontrer l'existence des extensions ou des sous-structures élémentaires d'une structure donnée. Le premier résultat est le théorème de Löwenheim-Skolem qui a deux parties dont nous ne démontrerons que la moitié qui dépend de la compacité.

Théorème 3.5 (Théorème de Löwenheim-Skolem) *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure infinie.*

1. *Si $A \subseteq M$, alors M a une sous-structure élémentaire \mathcal{M}_0 de cardinal égal à $\max(|A|, |\mathcal{L}|)$.*
2. *Si $\kappa \geq |M|$, alors il existe une extension élémentaire de \mathcal{M} de cardinal exactement κ .*

Preuve. Nous ne démontrerons que le deuxième point dont la preuve utilise la compacité avant d'être réduit au premier point. La preuve du premier point est plutôt un exercice en arithmétique des cardinaux.

La preuve de 2 fait usage d'une méthode fréquemment utilisée en théorie des modèles et des idées réminiscentes des propositions de la dernière section. D'abord on ajoute au langage \mathcal{L} un symbole de constante c_m pour chaque $m \in M$. Ces symboles seront utilisés pour nommer les éléments de M correspondants. Dans ce nouveau langage élargi on considère tous les énoncés vrais dans \mathcal{M} , et on dénote cette théorie par $\text{Th}((\mathcal{M}, m)_{m \in M})$ (sous peu nous simplifierons cette notation). Donc $\phi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k})$ est un tel énoncé si et seulement si $\mathcal{M} \models \phi[(m_1, \dots, m_k)]$. $\text{Th}((\mathcal{M}, m)_{m \in M})$ est une théorie complète.

On augmente le langage encore plus en y ajoutant un ensemble de symboles de constantes $\{a_i : i \in I\}$ où I est de cardinal κ . On considère l'ensemble $T^+ = \text{Th}((\mathcal{M}, m)_{m \in M}) \cup \{a_i \neq a_j : i \neq j, i, j \in I\}$. Nous montrerons que c'est un ensemble consistant d'énoncés en utilisant la compacité. Un sous-ensemble fini T_0 de T^+ contient un sous-ensemble fini d'énoncés de $\text{Th}((\mathcal{M}, m)_{m \in M})$ et un ensemble fini d'énoncés de la forme $\{a_{i_1} \neq a_{j_1}, \dots, a_{i_k} \neq a_{j_k}\}$. Comme les a_i n'interviennent pas dans $\text{Th}((\mathcal{M}, m)_{m \in M})$ et que M est un ensemble infini, nous voyons

que $\mathcal{M} \models T_0$ en interprétant les $\{a_{i_1}, a_{j_1}, \dots, a_{i_k}, a_{j_k}\}$ de façon à satisfaire T_0 et le reste des a_i par ce qui nous plaît. Par compacité T^+ est consistante. Nous prenons un modèle de T^+ et nous le considérons dans le langage réduit \mathcal{L} . Appelons cette \mathcal{L} -structure \mathcal{N} . Son ensemble de base contient tous les éléments nommés par les a_i . Donc, $|N| \geq \kappa$.

Les éléments de \mathcal{N} qui interprètent les constantes c_m témoignent de l'existence d'une sous-structure de \mathcal{N} qui est isomorphe à \mathcal{M} . Donc, nous pouvons supposer que \mathcal{M} est une sous-structure de \mathcal{N} . En plus, comme $(\mathcal{M}, m)_{m \in M}$ et $(\mathcal{N}, m)_{m \in M}$ sont des modèles de la théorie complète $\text{Th}((\mathcal{M}, m)_{m \in M})$, $(\mathcal{M}, m)_{m \in M} \equiv (\mathcal{N}, m)_{m \in M}$. Ces deux observations nous permettront de montrer que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. Soient donc $\phi(x_1, \dots, x_r)$ une formule et (m_1, \dots, m_r) un r -uplet extrait de M . Alors, les équivalences suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\models \phi[m_1, \dots, m_r] \text{ si et seulement si} \\ (\mathcal{M}, m)_{m \in M} &\models \phi(c_{m_1}, \dots, c_{m_r}) \text{ si et seulement si} \\ (\mathcal{N}, m)_{m \in M} &\models \phi(c_{m_1}, \dots, c_{m_r}) \text{ si et seulement si} \\ \mathcal{N} &\models \phi[m_1, \dots, m_r] \end{aligned}$$

Cela montre que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$.

Cette méthode s'appelle la *méthode des diagrammes* en théorie des modèles et son idée centrale est de constater qu'une extension élémentaire de \mathcal{M} n'est qu'un modèle de $\text{Th}((\mathcal{M}, m)_{m \in M})$ (voir le lemme 3.10).

Finalement, il nous faut montrer l'existence d'une structure de cardinal exactement κ . Les éléments nommés par les c_i forment un sous-ensemble de cardinal κ et M est de cardinal au plus κ . Donc, $A = M \cup \{c_i : i \in I\}$ est de cardinal κ , et on applique le point 1 à A et \mathcal{N} . \square

Nous donnons un corollaire de ce théorème qui sert à voir que certaines théories sont complètes.

Corollaire 3.6 *Soit T une théorie dont tous les modèles sont infinis. On suppose en plus qu'il existe un cardinal κ tel que tous les modèles de T de cardinal κ soient isomorphes (on dit que T est κ -catégorique). Alors T est complète.*

Preuve. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux modèles de T . Nous montrerons que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Par le théorème de Löwenheim-Skolem il existe un modèle \mathcal{A}_1 et un autre \mathcal{B}_1 tous les deux de cardinal κ tels que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1$ et que $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_1$. Par hypothèse $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_1$, et en particulier, $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{B}_1$. La conclusion suit. \square

Remarquons que ce résultat n'est pas aussi utile qu'il peut en avoir l'air puisque la plupart du temps avant de pouvoir l'appliquer le va-et-vient aura déjà prouvé la complétude. Par contre si vous avez déjà rencontré certains théorèmes d'algèbre classique, vous pouvez vous en servir pour rendre le corollaire 3.6 plus utile. Les connaissances que nous avons acquises nous donnent le corollaire suivant en utilisant le corollaire 3.6.

Nous avons présenté une axiomatisation de la théorie des chaînes denses sans extrémités est complète dans la section 2.6. Maintenant nous pouvons conclure de sa complétude. En d'autres termes, cette théorie est exactement $\text{Th}((\mathbb{Q}, <))$.

Corollaire 3.7 *La théorie des chaînes denses sans extrémités est complète.*

Preuve. Elle est catégorique en cardinal dénombrable ou ω -catégorique comme cela se dit dans le jargon "chic". \square

Passons à un résultat qui fera usage encore une fois de la méthode des diagrammes.

Proposition 3.8 *Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux structures élémentairement équivalentes. Alors elles ont une extension élémentaire commune.*

Preuve. Comme dans la preuve du théorème de Löwenheim-Skolem, nous ajoutons au langage des symboles de constantes c_m pour chaque $m \in M$ et c_n pour chaque $n \in N$. Nous allons montrer que l'ensemble $\text{Th}(M, m) \cup \text{Th}(N, n)$ (nous allégeons un peu la notation) est consistant en utilisant la compacité. Un sous-ensemble fini de cette union contient des énoncés de la forme $\phi(c_{m_1}, \dots, c_{m_r})$ et $\psi(c_{n_1}, \dots, c_{n_s})$. Comme $\text{Th}(M, m)$ et $\text{Th}(N, n)$ sont complètes, elles contiennent les conjonctions finis de leurs énoncés aussi. Donc, nous pouvons supposer qu'un sous-ensemble fini T_0 que nous fixons de $\text{Th}(M, m) \cup \text{Th}(N, n)$ contient exactement un énoncé de chaque type susmentionné.

De la définition de $\text{Th}(M, m)$ et de $\text{Th}(N, n)$ il découle que $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$ et $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$. Comme $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$ aussi. Il en découle que $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \exists \bar{y} (\phi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{y}))$. Donc, $\mathcal{M} \models T_0$. Par compacité $\text{Th}(M, m) \cup \text{Th}(N, n)$ est consistant. On peut conclure comme dans la preuve du théorème de Löwenheim-Skolem qu'un modèle de $\text{Th}(M, m) \cup \text{Th}(N, n)$ considéré dans le langage de \mathcal{M} (et de \mathcal{N}) est une extension élémentaire de ces deux structures, ou plus précisément contient deux sous-structures élémentaires isomorphes à \mathcal{M} et \mathcal{N} respectivement. \square

Corollaire 3.9 *Si $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$ est une famille de structures deux à deux élémentairement équivalentes, les structures de cette famille ont une extension élémentaire commune.*

Preuve. Pour chaque sous-ensemble fini $\{\mathcal{M}_{i_1}, \dots, \mathcal{M}_{i_k}\}$, la proposition 3.8 assure l'existence d'une extension élémentaire commune. En utilisant cela, on peut appliquer la compacité à $\cup_{i \in I} \text{Th}(\mathcal{M}_i)$ (comment?). Il faut bien sûr introduire des ensembles disjoints de symboles de constantes pour tous les M_i . \square

3.3 Paramètres

La méthode des diagrammes met en relief une technique qui était aussi utilisée dans les deux premières applications de la compacité que nous avons démontrées : l'enrichissement d'un langage en ajoutant des constantes. Ce sera une technique fréquemment utilisée dans ce qui suit et nous introduisons la notion de *paramètre* dans cette section.

Nous commençons avec un langage \mathcal{L} et une théorie T dans ce langage. Soit \mathcal{M} un modèle de T et $A \subseteq M$. Nous augmentons le langage \mathcal{L} à \mathcal{L}_A en ajoutant un symbole de constante c_a pour tout $a \in A$. Nous avons donc formé une \mathcal{L}_A -structure $\mathcal{M}_A = (\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ qui est une expansion de \mathcal{M} . Nous considérons maintenant la théorie $\text{Th}(\mathcal{M}_A)$ des énoncés qui sont vrais dans la structure \mathcal{M}_A . C'est ce qui était fait dans la preuve du théorème de Löwenheim-Skolem en posant $A = M$. A est un ensemble de *paramètres*.

Soit maintenant $\phi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ une formule de \mathcal{L} . Si $a_1, \dots, a_l \in A$, nous noterons par

$$\phi(x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_l)$$

la formule à *paramètres* a_1, \dots, a_l ce qui n'est que la formule

$$\phi(x_1, \dots, x_k, c_{a_1}, \dots, c_{a_l})$$

de \mathcal{L}_A .

Avec ces nouvelles notions et notations, nous pouvons énoncer le lemme suivant dont la preuve est contenue dans celle du théorème de Löwenheim-Skolem :

Lemme 3.10 $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ si et seulement si $M \subseteq N$ et $(\mathcal{M}, m)_{m \in M} \equiv (\mathcal{N}, m)_{m \in M}$.

3.4 Saturation

Dans cette section nous introduisons la notion de *structure saturée* qui est intuitivement une structure "riche" dans laquelle on peut résoudre simultanément beaucoup d'équations. Nous commençons par étendre la notion de consistance qui n'était définie que pour des ensembles d'énoncés.

Définition 3.11 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, T une théorie complète dans \mathcal{L} et $\Phi(x_1, \dots, x_k)$ un ensemble de formules à variables libres parmi x_1, \dots, x_k . Nous dirons que $\Phi(x_1, \dots, x_k)$ est consistant avec T s'il existe un modèle $\mathcal{M} \models T$ dans lequel tous les éléments de $\Phi(x_1, \dots, x_k)$ sont simultanément satisfaits par un k -uple $(m_1, \dots, m_k) \in M^k$.

Lemme 3.12 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, T une théorie complète dans \mathcal{L} et $\Phi(x_1, \dots, x_k)$ un ensemble de formules à variables libres parmi x_1, \dots, x_k . $\Phi(x_1, \dots, x_k)$ est consistant avec T si et seulement si chacun de ses sous-ensembles finis est consistant avec T .

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de compacité à l'ensemble d'énoncés

$$T \cup \{\exists x_1 \dots x_k (\phi_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \phi_m(\bar{x})) : \phi_i \in \Phi\}$$

□

La discussion de la dernière section montre que la définition 3.11 et le lemme 3.12 restent valables quand on ajoute des paramètres puisque dans ce cas on considère une théorie avec de nouvelles constantes.

Définition 3.13 Soit \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure. \mathcal{M} est dite ω -saturée si tout ensemble $\Phi(x; A)$ de formules à paramètres dans $A \subseteq M$ avec A fini, et consistant avec $\text{Th}((\mathcal{M}, a)_{a \in A})$, est satisfait simultanément par un élément de M .

Au lieu de dire que les formules d'un ensemble sont satisfaites simultanément nous dirons qu'elles sont *réalisées*. Un n -uple qui réalise un ensemble de formules Φ est une *réalisation* de Φ . On dit qu'une \mathcal{L} -structure \mathcal{A} réalise Φ si A^n contient une réalisation de Φ . Si ce n'est pas le cas alors on dit que \mathcal{A} *omet* Φ .

Lemme 3.14 Soit \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure. \mathcal{M} est ω -saturée si et seulement si tout ensemble $\Phi(x_1, \dots, x_n; A)$ de formules à paramètres dans $A \subseteq M$ avec A fini, et consistant avec $\text{Th}((\mathcal{M}, a)_{a \in A})$, est réalisé par un élément de M^n ($n \geq 1$).

Preuve. Exercice □

Nous montrerons l'existence des extensions élémentaires ω -saturées. Nous commençons par un lemme qui est plus fort que ce qui est nécessaire pour le théorème d'existence mais qui sera utile plus tard aussi.

Lemme 3.15 Soient \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et $A \subseteq M$. Si $\Phi(x; A)$ est un ensemble de formules consistant avec $\text{Th}((\mathcal{M}, a)_{a \in A})$, alors il existe une extension élémentaire \mathcal{N} de \mathcal{M} , telle que $|M| = |N|$, dans laquelle les formules de $\Phi(x; A)$ sont réalisées.

Preuve. Nous considérons, dans le langage augmenté $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c_m : m \in M\} \cup \{c\}$, l'ensemble d'énoncés $T^+ = \text{Th}((\mathcal{M}, m)_{m \in M}) \cup \{\phi_1(c) \wedge \dots \wedge \phi_k(c) : \phi(x) \in \Phi(x; A)\}$. Chaque sous-ensemble fini de T^+ est consistant par l'hypothèse sur $\Phi(x; A)$ car $(\mathcal{M}, m)_{m \in M}$ en serait un modèle avec un choix convenable pour l'élément nommé par c . Donc T^+ est consistant. Un modèle \mathcal{N}^+ de T^+ donne \mathcal{N} après avoir réduit le langage à \mathcal{L} . $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ et \mathcal{N} satisfait toutes les formules de $\Phi(x; A)$. En utilisant le théorème de Löwenheim-Skolem, nous pouvons choisir \mathcal{N} telle que $|N| = |M|$. □

Théorème 3.16 Toute structure a une extension élémentaire ω -saturée.

Preuve. Soit \mathcal{M} une structure. Nous notons A un sous-ensemble fini de M . Soit $\Phi(x; A)$ un ensemble de formules consistant avec $\text{Th}((\mathcal{M}, a)_{a \in M})$. Par le lemme 3.15 $\Phi(x; A)$ est satisfait dans une extension élémentaire $\mathcal{M}_{\Phi(x; A)}$ de \mathcal{M} . Par le corollaire 3.9, ces extensions élémentaires ont une extension élémentaire commune que nous allons dénoter par \mathcal{M}_0 .

On procède maintenant à la construction d'une suite d'extensions élémentaires

$$\mathcal{M}_0 \preceq \mathcal{M}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{M}_n \preceq \dots$$

La méthode appliquée à \mathcal{M} pour obtenir \mathcal{M}_0 s'applique à chaque \mathcal{M}_i pour trouver \mathcal{M}_{i+1} . L'union de cette suite croissante est une extension élémentaire ω -saturée de \mathcal{M} (pourquoi?). □

Théorème 3.17 *Si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont deux structures dénombrables, élémentairement équivalentes et ω -saturées alors $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.*

Preuve. Nous utiliserons la méthode de va-et-vient pour obtenir un isomorphisme entre deux structures \mathcal{M} et \mathcal{N} comme dans l'énoncé. La proposition 2.12 nous permet de supposer que les deux structures sont infinies. Nous énumérons les deux structures : $\mathcal{M} = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{N} = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$. Nous construirons une bijection par récurrence.

Dans la première étape, nous considérons l'ensemble Φ des formules à au plus une variable satisfaites par a_0 . Pour chaque fragment fini $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ de cet ensemble, $\mathcal{M} \models \exists x \bigwedge_{i=1}^k \phi_i(x)$. Comme $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, $\mathcal{N} \models \exists x \bigwedge_{i=1}^k \phi_i(x)$. Comme \mathcal{N} est ω -saturé, il existe $b \in N$ qui satisfait toutes les formules dans Φ . (a_0, b) est ajouté au graphe de l'isomorphisme.

Supposons maintenant que le graphe soit $\{(a_{i_1}, b_{j_1}), \dots, (a_{i_m}, b_{j_m})\}$. Soit a un élément de M dont l'image n'a pas encore été trouvée (on peut par exemple choisir comme nous l'avons fait dans la preuve du théorème 1.1 l'élément avec le plus petit indice dans $M \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}$). On considère l'ensemble $\Phi_{(a, a_{i_1}, \dots, a_{i_m})}$ de formules à au plus $m + 1$ variables satisfaites par $(a, a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$. Pour tout sous-ensemble fini $\{\phi_1(x, x_1, \dots, x_m), \dots, \phi_k(x, x_1, \dots, x_m)\}$ de $\Phi_{(a, a_{i_1}, \dots, a_{i_m})}$,

$$\mathcal{M} \models \exists x \left(\bigwedge_{e=1}^k \phi_e(x, a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \wedge \bigwedge_{f=1}^m (x \neq a_{i_f}) \right)$$

L'isomorphisme déjà construit montre que

$$\mathcal{N} \models \exists x \left(\bigwedge_{e=1}^k \phi_e(x, b_{j_1}, \dots, b_{j_m}) \wedge \bigwedge_{f=1}^m (x \neq b_{j_f}) \right)$$

Comme N est ω -saturé, l'ensemble

$$\Phi_{(x, b_{j_1}, \dots, b_{j_m})} = \{\phi(x, c_{b_{j_1}}, \dots, c_{b_{j_m}}) : \mathcal{M} \models \phi(a, a_{i_1}, \dots, a_{i_m})\}$$

est satisfait par un élément b dans $N \setminus \{b_{j_1}, \dots, b_{j_m}\}$. Nous ajoutons (a, b) au graphe de l'isomorphisme en construction. Le va de l'étape de récurrence est terminé. Un raisonnement symétrique donne le vient (voir le vient du théorème 1.1). Cette construction se termine et à la fin nous obtenons un isomorphisme (voir la fin du théorème 1.1). \square

La preuve du théorème 3.17 est très réminiscente de celle du théorème 1.1. Cela n'est pas une coïncidence. Les chaînes denses sont des structures ω -saturées comme nous montrerons maintenant. D'abord une définition qui suit Poizat mais avec une variation :

Définition 3.18 *Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{L} -structures. Nous dirons que \mathcal{M} et \mathcal{N} sont ∞ -équivalentes si pour tout $(a_1, \dots, a_k) \in M^k$, $(b_1, \dots, b_k) \in N^k$ qui satisfont les mêmes formules et pour tout $a \in M$ (resp. $b' \in N$), il existe $b \in N$ (resp. $a' \in M$) tel que (a_1, \dots, a_k, a) et (b_1, \dots, b_k, b) (resp. (a_1, \dots, a_k, a') et (b_1, \dots, b_k, b')) satisfassent les mêmes formules.*

Notons que cette définition implique l'équivalence élémentaire des deux structures et que la preuve du théorème 3.17 montre que deux structures élémentairement équivalentes et ω -saturées sont ∞ -équivalentes.

Lemme 3.19 *Si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont deux structures ∞ -équivalentes et \mathcal{M} est ω -saturée, alors \mathcal{N} est ω -saturée.*

Preuve. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux structures comme dans l'énoncé. D'abord nous notons que si $(b_1, \dots, b_r) \in N^r$, alors il existe $(a_1, \dots, a_r) \in M^r$ tel que $(a_1, \dots, a_r) \in M^r$ et $(b_1, \dots, b_r) \in N^r$ satisfassent les mêmes formules du premier ordre. Cela découle de la définition de l' ∞ -équivalence. Rappelons que les formules peuvent contenir moins de r variables libres.

Maintenant nous considérons un ensemble $\Phi(x; B)$ de formules consistant avec $\text{Th}((\mathcal{N}, b)_{b \in B})$, à au plus une variable et à paramètres provenant d'un sous-ensemble fini B de N . En utilisant le dernier paragraphe, nous trouvons un tel ensemble $\Phi(x; A)$ dont les paramètres proviennent d'un sous-ensemble fini A de M . L'ensemble $\Phi(x, A)$ est consistant (pourquoi?). Comme \mathcal{M} est ω -saturée, il existe $a \in M$ qui satisfait toutes les formules de $\Phi(x; A)$. Maintenant il ne reste qu'à appliquer la définition d' ∞ -équivalence à (a, A) et B pour trouver un $b \in N$ qui satisfait toutes les formules dans $\Phi(x; B)$. \square

Proposition 3.20 *Deux chaînes denses sans extrémités sont ∞ -équivalentes.*

Preuve. Voir la preuve du théorème 1.1 \square

Corollaire 3.21 *Une chaîne dense sans extrémités est une structure ω -saturée.*

Preuve. Le théorème 3.16 et le fait que la propriété d'être une chaîne dense sans extrémités soit exprimable par des énoncés du premier ordre montrent l'existence des chaînes denses sans extrémités ω -saturées. Alors on conclut en utilisant la proposition 3.20. \square

3.5 Types

Dans les dernières sections nous avons utilisé d'une façon répétitive l'expression "l'ensemble des formules satisfaites par". Nous introduisons maintenant la notion de *type* qui non seulement permet d'éviter l'usage d'une si longue expression mais qui est aussi l'une des notions fondamentales en théorie des modèles.

Définition 3.22 *Soit \mathcal{L} un langage du premier ordre. Soit $p(x_1, \dots, x_n)$ un ensemble de \mathcal{L} -formules dont les variables sont parmi x_1, \dots, x_n . $p(x_1, \dots, x_n)$ est dit un type si p est consistant et maximal. En d'autres termes p est un type si et seulement s'il existe un n -uplet (a_1, \dots, a_n) extrait d'un modèle de T , où T est l'ensemble des énoncés dans p (donc la seule théorie complète dans p), qui réalise p et que si σ est une formule dont les variables libres sont parmi x_1, \dots, x_n , alors soit $\sigma \in p$, soit $\neg\sigma \in p$.*

Dans la définition d'un type, n peut être égal à 0. Dans ce cas le type n'est qu'un ensemble consistant et maximal d'énoncés, donc une théorie complète. En général on parle des n -types pour préciser n si cela est nécessaire.

Un exemple de n -type est l'ensemble de formules satisfaites par un n -uplet fixé. En effet, c'est le seul type d'exemple, sauf que quand on commence avec un ensemble consistant et maximal de formules, il n'est pas nécessaire qu'une réalisation soit disponible dans un certain modèle. Néanmoins elle vit quelque part :

Lemme 3.23 *Soient T une théorie complète et p un type. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

1. T a un modèle qui réalise p .
2. Tout sous-ensemble fini de p est réalisé dans un certain modèle de T .
3. $T \cup \{\exists x_1 \dots x_n (\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k) : \sigma_i \in p\}$ est un ensemble consistant d'énoncés.

Preuve. Compacité \square

Le lemme 3.23 est valable pour tout ensemble consistant avec T de formules (pas nécessairement maximal) à au plus n variables. Le lemme de Zorn montre que tout ensemble consistant d'énoncés à au plus n variables peut être complété à un type.

Nous utiliserons la notation de $S_n(T)$ pour les n -types d'une théorie T . Si T est complète, alors $S_0(T)$ ne contient que T . Nous définissons $S(T) = \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n(T)$.

Nous parlerons aussi des types à paramètres dans un certain ensemble A d'une structure \mathcal{M} . Nous utiliserons la notation $S_n(A)$, $S(A)$ pour noter $S_n(\text{Th}(\mathcal{M}, a)_{a \in A})$ et $S(\text{Th}(\mathcal{M}, a)_{a \in A})$ respectivement, et nous parlerons des *types sur A* . Tout ce qui a été dit à propos des ensembles consistants de formules à paramètres est valable pour les types à paramètres. De même, comme chaque ensemble consistant de formules à au plus n variables vit dans un n -type, la saturation peut être définie (caractérisée) en n'utilisant que la notion de type :

Lemme 3.24 *Une structure \mathcal{M} est ω -saturée si et seulement si pour tout sous-ensemble fini $A \subseteq M$ et pour tout $p \in S_1(A)$, p est réalisé dans \mathcal{M} .*

Une dernière notation est celle pour le type d'un n -uplet $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$ sur un ensemble de paramètres $A \subseteq M$:

$$\text{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n/A) = \{(\phi(x_1, \dots, x_n) : \phi \text{ est à paramètres dans } A \text{ et } \mathcal{M} \models \phi[(a_1, \dots, a_n)])\}$$

On écrit plutôt $\text{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$ quand $A = \emptyset$.

Exemple : Un exemple bien connu de type non réalisé est le suivant. Soit $K = \mathbb{Q}$ ou $K = \mathbb{F}_p$ pour un nombre premier p et \overline{K} la clôture algébrique de K . Considérons toutes les inéquations de la forme

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \neq 0$$

où les polynômes ont des coefficients dans \mathbb{Z} ou dans \mathbb{F}_p . Le complété de cet ensemble est un type sur \emptyset qui n'est pas réalisé dans \overline{K} . Par contre tout élément transcendant sur K est une réalisation de ce type sur \emptyset .

Le théorème suivant que nous aurions pu énoncer dans la dernière section montre une propriété importante des modèles saturés :

Théorème 3.25 *Soient \mathcal{M} une structure dénombrable et ω -saturée et A un sous-ensemble fini de M . Si $\text{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n/A) = \text{tp}_{\mathcal{M}}(b_1, \dots, b_n/A)$ pour $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in M$, alors il existe un automorphisme f de \mathcal{M} qui fixe A point par point tel que $f(a_i) = b_i$, pour $1 \leq i \leq n$.*

Preuve. Exercice \square

Une structure qui a la propriété énoncée dans le théorème 3.25 est dite ω -homogène.

Maintenant nous démontrons un autre théorème d'existence un peu plus précis pour les modèles ω -saturés. C'est un autre résultat que nous aurions pu démontrer dans la dernière section mais dont la préparation et l'énoncé sont rendus plus efficaces en utilisant la terminologie des types.

Théorème 3.26 *Soit T une théorie complète dans un langage dénombrable telle que $|S(T)|$ soit un ensemble dénombrable. Alors T a un modèle ω -saturé et dénombrable.*

Lemme 3.27 *Soient T une théorie complète dans un langage dénombrable, et \mathcal{M} un modèle de T . Si $|S(T)|$ est dénombrable, alors pour tout sous-ensemble fini X de M , $S(X)$ est dénombrable aussi.*

Preuve. Nous donnons la preuve seulement pour $S_1(X)$. On pose $X = \{a_1, \dots, a_n\}$. Soient $p \in S_1(X)$ et b une réalisation de p (b n'est pas nécessairement dans M). Alors, $\text{tp}_{\mathcal{M}}(b, a_1, \dots, a_n) \in S_{n+1}(T)$. Cette application de $S_1(X)$ vers $S_{n+1}(T)$ est injective (pourquoi ?). La conclusion suit. \square

Lemme 3.28 *Soient T une théorie complète dans un langage dénombrable, et \mathcal{M} un modèle dénombrable de T . Si $|S(T)|$ est dénombrable, alors il existe une extension élémentaire \mathcal{N} de \mathcal{M} telle que $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}|$ et que pour tout sous-ensemble fini $X \subseteq M$ et tout $p \in S_1(X)$, p est réalisé dans \mathcal{N} .*

Preuve. Le lemme se démontre par un raisonnement de chaîne similaire à celui du théorème 3.16. Comme M est un ensemble dénombrable, le lemme 3.27 montre que l'ensemble $\cup_{X \subseteq M, X \text{ fini}} S(X)$ est un ensemble dénombrable que l'on peut énumérer : $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$. On pose $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$. Si \mathcal{M}_n est déjà défini, alors pour obtenir \mathcal{M}_{n+1} on applique le lemme 3.15 à \mathcal{M}_n et p_n . A la fin (la fin arrive), on pose $\mathcal{N} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i$. Un peu d'arithmétique des cardinaux montre que $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}|$. \square

Preuve du Théorème 3.26. Le théorème de Löwenheim-Skolem montre que T a un modèle dénombrable \mathcal{M}_0 . La preuve consiste à définir par récurrence une chaîne croissante d'extensions élémentaire de longueur dénombrable. Nous venons de définir le premier élément de cette chaîne. Supposons maintenant que \mathcal{M}_i soit définie. Nous appliquons le lemme 3.28 à \mathcal{M}_i pour obtenir \mathcal{M}_{i+1} . A la fin, nous posons $\mathcal{N} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i$. \mathcal{N} est le modèle ω -saturé dénombrable cherché. \square

3.6 Corps algébriquement clos

Dans cette section nous étudierons les corps algébriquement clos en utilisant les notions et les méthodes introduites dans les sections précédentes. Le langage fixé sera celui des corps : $\mathcal{L}_C = \{0, 1, +, \cdot, -, ^{-1}\}$. Nous commençons par un système d'axiomes décrivant un corps algébriquement clos, éventuellement de caractéristique fixée.

1. Axiomes décrivant un corps
2. $1 \neq 0$
3. $(A_n \ (n \geq 1)) \ \forall y_0 \dots y_{n-1} \exists x (y_0 + y_1 \cdot x + \dots + y_{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n = 0)$

Ces axiomes ne définissent pas la caractéristique du corps considéré. Donc pour exprimer la caractéristique, nous ajoutons l'un des ensembles suivants d'énoncés à la liste :

1. $\underbrace{1 + \dots + 1}_p = 0$ si la caractéristique est un nombre p premier
2. $(C_n) \ \underbrace{1 + \dots + 1}_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si la caractéristique est nulle

Notons que ces axiomes montrent que le fait d'être un corps algébriquement clos d'une certaine caractéristique se préserve quand on passe à des structures élémentairement équivalentes.

Il existe un nombre infini de A_n et de C_n . Nous montrerons que cela est inévitable. Nous commençons par un lemme général.

Lemme 3.29 *Soit T une théorie du premier ordre dans un langage \mathcal{L} . On suppose que T soit finiment axiomatisable. Alors de toute axiomatisation de T on peut extraire une axiomatisation finie.*

Preuve. En prenant la conjonction des énoncés dans un ensemble fini d'axiomes de T , nous pouvons supposer que d'un côté $\{\phi\}$ et de l'autre $\Psi = \{\psi_i : i \in I\}$ sont deux ensembles d'axiomes dont le deuxième est infini. La définition d'une axiomatisation montre que $\Psi \vdash \phi$. Par compacité, Ψ a un sous-ensemble fini Ψ_0 tel que $\Psi_0 \vdash \phi$. \square

Théorème 3.30 *La théorie des corps algébriquement clos d'une caractéristique donnée n'est pas finiment axiomatisable.*

Preuve. Nous montrons d'abord que si p est un nombre premier et que $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$ est un sous-ensemble fini des axiomes A_n ci-dessus alors il existe un corps de caractéristique p qui n'est pas algébriquement clos mais qui satisfait les axiomes $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$. Nous posons $N = \max(i_1, \dots, i_m)$. Nous utiliserons les faits suivants de la théorie des corps finis :

1. Le nombre d'éléments dans un corps fini de caractéristique p est une puissance de p . Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe, à isomorphisme près, un et un seul corps de caractéristique p et de degré d sur \mathbb{F}_p . C'est l'ensemble des racines du polynôme $x^{p^d} - x$ et il contient p^d éléments.

2. Soit E/F une extension de degré $d \in \mathbb{N}^*$ d'un corps fini F . Il existe une extension et une seule K/F , avec K sous-corps de E , de degré n si et seulement si $n|d$.

En utilisant ces connaissances nous construirons un sous-corps propre de la clôture algébrique de \mathbb{F}_p qui satisfera les axiomes A_n ($n \leq N$). Nous considérons $K = \bigcup_{e=1}^{\infty} K_e$ où $K_1 = \mathbb{F}_p$ et $[K_{e+1} : K_e] = N!$. Nous montrons d'abord que K satisfait les A_n ($n \leq N$). Soient $n \leq N$ et $P[X] = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme dans $K[X]$. Il existe donc $e \in \mathbb{N}^*$ tel que $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in K_e^n$. Si α est une racine de $P[X]$, alors le polynôme minimal de α sur K_e divise $P[X]$ ($K_e[X]$ est un anneau principal). Donc, $[K_e(\alpha) : K_e] \leq n$, et en particulier, $[K_e(\alpha) : K_e]$ divise $N!$. En utilisant le fait 2 ci-dessus, nous pouvons conclure que $\alpha \in K_{e+1}$. Cela montre que K satisfait tous les A_n pour $n \leq N$, et en particulier $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$.

Par contre K n'est pas algébriquement clos. En effet nous montrerons que pour tout $r \in \mathbb{N}$, premier avec $N!$, K ne satisfait pas A_r . Soit donc L l'extension de \mathbb{F}_p de degré r . Le fait 2 et la construction de K montrent que $L \cap K = \mathbb{F}_p$. Si $\alpha \in L \setminus \mathbb{F}_p$, alors son polynôme minimal Q sur \mathbb{F}_p divise $x^{p^r} - x$ d'après le fait 1. Comme Q est irréductible sur \mathbb{F}_p , il n'a pas de racine dans \mathbb{F}_p . Or toutes ces racines sont dans L d'après le fait 1. Donc, Q n'a pas de racine dans K .

Nous étendons maintenant ce qui précède aux corps algébriquement clos de caractéristique 0. Le raisonnement est par compacité. Nous considérons l'ensemble T qui comprend les axiomes des corps, $1 \neq 0$ et

$$\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\} \cup \{\neg A_r\} \cup \{C_n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

où r est un nombre naturel premier avec $N!$ ($N = \max(i_1, \dots, i_m)$). Cet ensemble est consistant. En effet, soit T_0 un sous-ensemble fini.

$$T_0 = (T_0 \cap \{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}) \cup \{\neg A_r\} \cup \{C_{j_1}, \dots, C_{j_k}\}$$

Le corps K construit dans la première partie de notre argument est un modèle de cet ensemble fini à condition que sa caractéristique soit strictement supérieure à $\max(j_1, \dots, j_k)$. Donc, l'ensemble T est consistant et un modèle de T est un corps de caractéristique 0 qui satisfait $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$, mais qui n'est pas algébriquement clos.

Maintenant nous pouvons conclure que la théorie des corps algébriquement clos d'une caractéristique donnée n'est pas finiment axiomatisable. Supposons par l'absurde qu'il existe une axiomatisation finie. D'après le lemme 3.29, l'axiomatisation que nous avons donnée contient une qui est finie. En particulier un sous-ensemble fini $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$ des axiomes A_n est suffisant. Or cela contredit les constructions que nous venons de faire. \square

Lemme 3.31 *Soient K et L deux corps de même caractéristique, et k et l les corps premiers dans K et L respectivement. Si $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m) \in K^m$ et $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m) \in L^m$, alors \bar{a} et \bar{b} satisfont les mêmes formules sans quanteurs dans le langage des corps si et seulement si $k(\bar{a}) \cong l(\bar{b})$.*

Preuve. Il suffit de faire l'argument pour $m = 1$ puisque pour m plus large, on procède par récurrence en répétant le même argument pour les corps isomorphes $k(a_1, \dots, a_{m-1})$, $l(b_1, \dots, b_{m-1})$ et les éléments a_m et b_m . Donc on remplace \bar{a} par a et \bar{b} par b . Notons aussi que l'hypothèse sur la caractéristique de K et L implique que $k \cong l$.

Si a et b satisfont les mêmes formules sans quanteurs alors ils sont les racines des même polynômes sur k et l respectivement. Dans ce cas, $k(a)$ est soit isomorphe à $k(X)$ parce que a est transcendant sur k , soit isomorphe à $k[X]/\langle f(X) \rangle$ avec $f(X)$ le polynôme minimal de a (quelques connaissances sur les corps, anneaux intègres, idéaux,...). Comme $k \cong l$, notre hypothèse sur a et b montre que les mêmes conditions sont satisfaites pour $l(b)$, et donc $k(a) \cong l(b)$.

Dans l'autre direction supposons $k(a) \cong l(b)$. Nous montrons la conclusion par récurrence sur la complexité des formules sans quanteurs. Une formule atomique dans le langage des corps correspond à une équation polynomiale de la forme $t[X] = 0$ où les coefficients de t sont dans le corps premier. Comme $k(a) \cong l(b)$, $t[a] = 0$ si et seulement si $t[b] = 0$. Les formules sans quanteurs plus complexes sont des conjonctions d'équations et d'inéquations à coefficients dans le corps premier, donc la conclusion découle du cas atomique. \square

Lemme 3.32 *Soient K et L deux corps algébriquement clos ω -saturés de même caractéristique. Si $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m) \in K^m$ et $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m) \in L^m$ satisfont les mêmes formules sans quanteurs et que $\alpha \in K$, alors il existe $\beta \in L$ tel que $\langle \bar{a}, \alpha \rangle \cong \langle \bar{b}, \beta \rangle$.*

Preuve. Soient K, L, \bar{a}, α et \bar{b} comme dans l'énoncé. Le lemme 3.31 montre que les sous-corps engendrés par \bar{a} et \bar{b} sont isomorphes. On les note $k_{\bar{a}}$ et $k_{\bar{b}}$ respectivement. On reprend le raisonnement du théorème 1.2. Si α est algébrique sur $k_{\bar{a}}$, on considère son polynôme minimal sur $k_{\bar{a}}$ qui est $P[X]$ et que l'on transforme en $Q[X]$ en utilisant l'isomorphisme entre $k_{\bar{a}}$ et $k_{\bar{b}}$. Comme L est algébriquement clos, il contient une racine β de $Q[X]$. On associe β à α . Les corps $k_{\bar{a}}(\alpha)$ et $k_{\bar{b}}(\beta)$ sont isomorphes.

La deuxième possibilité est que α soit transcendant sur $k_{\bar{a}}$. Considérons l'ensemble des inéquations polynômiales $p[X] = \{Q[X] \neq 0 : Q[X] \in k_{\bar{b}}[X]\}$. Chaque sous-ensemble fini de cet ensemble est satisfait par un élément de L puisque L est infini et qu'il existe un nombre fini de racines d'un polynôme à une variable. Donc p est consistant avec $\text{Th}(L)$. Alors l' ω -saturation de L nous permet de trouver β . \square

Théorème 3.33 *La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est complète.*

Preuve. Il suffit de montrer que si K et L sont deux corps algébriquement clos ω -saturés de même caractéristique, alors $K \equiv L$. En effet, en utilisant le théorème 3.16, nous pouvons plonger élémentairement un corps algébriquement clos dans un corps algébriquement clos ω -saturé de même caractéristique puisque, comme le montrent les axiomes au début de cette section, être un corps algébriquement clos d'une caractéristique fixée est une propriété qui est préservée par équivalence élémentaire.

Soient donc K et L deux corps algébriquement clos ω -saturés. Nous montrerons une conclusion plus forte : si deux uples provenant l'un de K l'autre de L satisfont les mêmes formules sans quanteurs, alors ils ont même type. Le raisonnement sera par récurrence sur la complexité des formules.

Soient $\bar{a} \in K^m$ et $\bar{b} \in L^m$ deux uples qui satisfont les mêmes formules sans quanteurs et $\phi(\bar{x})$ une formule au plus m variables libres telle que $K \models \phi[\bar{a}]$. Si ϕ est sans quanteurs la conclusion n'est que l'hypothèse. Si $\phi(\bar{x})$ est de la forme $\neg\theta(\bar{x})$, alors $K \models \phi[\bar{a}]$ si et seulement si $K \not\models \theta[\bar{a}]$. Par récurrence, $L \not\models \theta[\bar{b}]$ et donc $L \models \phi[\bar{b}]$. Les disjonctions se font de la même façon. Supposons maintenant que $\phi(\bar{x})$ soit de la forme $\exists y\theta(\bar{x}, y)$. Alors il existe $\alpha \in K$ tel que $K \models \theta(\bar{a}, \alpha)$. Le lemme 3.32 montre alors qu'il existe $\beta \in L$ tel que $\langle \bar{a}, \alpha \rangle \cong \langle \bar{b}, \beta \rangle$. Le lemme 3.31 montre alors que (\bar{a}, α) et (\bar{b}, β) satisfont les mêmes formules libres. Or $\theta(\bar{x}, y)$ est une formule moins complexe que $\phi(\bar{x})$. Donc par récurrence $L \models \theta(\bar{x}, y)[\bar{b}, \beta]$, et $L \models \exists y\theta(\bar{x}, y)[\bar{b}]$, en d'autres termes $L \models \phi[\bar{b}]$.

La conclusion est que $\text{tp}_K(\bar{a}) = \text{tp}_L(\bar{b})$. Comme ces deux ensembles contiennent $\text{Th}(K)$ et $\text{Th}(L)$, nous concluons que $K \equiv L$. \square

Maintenant nous donnons une caractérisation algébrique des modèles ω -saturés de la théorie des corps algébriquement clos.

Théorème 3.34 *Un corps algébriquement clos est ω -saturé si et seulement s'il est de degré de transcendance infini sur son corps premier.*

Preuve. Commençons par démontrer la nécessité de la condition. Soit K un corps algébriquement clos ω -saturé. Nous considérons l'ensemble

$$p_0(x) = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \neq 0 : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}_p \text{ ou } \mathbb{Z} \text{ selon } \text{car}(K) \right\}.$$

$p_0(x)$ est réalisé par un élément transcendant sur le corps premier que nous notons α_0 . Nous considérons le type sur l'ensemble de paramètres $\{\alpha_0\}$ (nous ne distinguons pas α_0 du symbole de constante qui le nomme dans le langage). Nous considérons l'ensemble $p_1(x)$ qui est l'union de

$$\left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \neq 0 : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}_p \text{ ou } \mathbb{Z} \text{ selon } \text{car}(K) \right\}$$

et de

$$\left\{ \neg \exists x_{(i_0, i_1, j)} y_{(i_0, i_1)} \left(\left(\sum_{0 \leq i_0 + i_1 \leq m} y_{(i_0, i_1)} \alpha_0^{i_0} x^{i_1} = 0 \right) \wedge \left(\sum_{j=0}^n x_{(i_0, i_1, j)} y_{(i_0, i_1)}^n = 0 \right) \right) : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ces énoncés expriment le fait que la réalisation soit un élément transcendant indépendant de α_0 . On continue de cette manière en définissant $p_{i+1}(x)$ qui exprime que sa réalisation est un élément transcendant indépendant des $\alpha_0, \dots, \alpha_i$. Tous ces ensembles consistants sont réalisés dans K grâce à l' ω -saturation.

Pour ce qui est de la suffisance de la condition, nous montrons d'abord que si K est un corps algébriquement clos et ω -saturé et que L est aussi algébriquement clos et de degré de transcendance infini sur son corps premier alors ils sont ∞ -équivalents. Le raisonnement est le même que ceux du lemme 3.32 et du théorème 3.33 sauf à un endroit. Si, dans la notation de la preuve du lemme 3.32, α est transcendant, il n'y a que l'hypothèse sur le degré de transcendance qui est disponible. Alors nous raisonnons de la façon suivante. Comme \bar{b} est un n -uple, donc une suite finie d'éléments de L , le degré de transcendance du corps engendré par \bar{b} ne peut être infini. Donc il existe un élément transcendant β qui est dans $L \setminus \langle \bar{b} \rangle$. Nous pouvons associer β à α . Pour conclure que L est saturé il suffit d'appliquer le lemme 3.19. \square

Comme nous l'avons déjà remarqué, la preuve du théorème 3.33 montre un résultat plus fort :

Théorème 3.35 *Soient K et L deux corps algébriquement clos, et \bar{a} et \bar{b} deux n -uple de K et de L respectivement. Si \bar{a} et \bar{b} satisfont les mêmes formules libres (formules sans quanteurs), alors ils ont même type.*

Quand la conclusion du théorème 3.35 est valable pour les n -uples nonvides dans une théorie T du premier ordre on dit que cette théorie *élimine les quanteurs*. Un argument de compacité montre qu'une façon équivalente d'énoncer cette propriété est de dire que pour toute formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$ ($n > 0$) il existe une formule $\psi(x_1, \dots, x_n)$ sans quanteurs telle que $T \vdash \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Lemme 3.36 *Soit T une théorie qui élimine les quanteurs. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux modèles de T tels que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, alors $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.*

Preuve. C'est une conséquence du lemme 2.7 1. \square

Une théorie qui a la propriété du lemme 3.36 est dite *modèle-complète*.

Théorème 3.37 (Théorème des zéros de Hilbert) *Si un système fini S d'équations et d'inéquations en plusieurs inconnues x_1, \dots, x_n , à coefficients dans un corps k , a une solution dans une extension K de k , il a une solution dans toute extension algébriquement close de k .*

Preuve. Nous pouvons considérer S comme une formule sans quanteurs du premier ordre $S(\bar{x}; \bar{a})$ où \bar{a} est extrait de k et nomme les coefficients du système d'équations S . Par le théorème 3.35 et le lemme 3.36, la théorie T des corps algébriquement clos est modèle-complète. Soit L un corps algébriquement clos contenant K . Comme $K \models \exists \bar{x} S(\bar{x}; \bar{a})$ et que $S(\bar{x}; \bar{a})$ est sans quanteurs, le lemme 2.7 2 montre que $L \models \exists \bar{x} S(\bar{x}; \bar{a})$. Si maintenant L' est un corps algébriquement clos qui contient k , L' contiendra la clôture algébrique \bar{k} de k . Comme T est modèle-complète, $\bar{k} \preceq L$ et $\bar{k} \models \exists \bar{x} S(\bar{x}; \bar{a})$. Donc $L' \models \exists \bar{x} S(\bar{x}; \bar{a})$. \square

Chapitre 4

Rang de Morley

4.1 Ensembles définissables

Dans cette section nous introduisons la notion d'ensemble (ou de sous-ensemble) *définissable* dans une structure. Cette notion, qui a été présente depuis longtemps dans nos discussions sans être nommée, est fondamentale pour la suite.

Définition 4.1 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\phi(\bar{x})$ une \mathcal{L} -formule dont les variables libres sont x_1, \dots, x_n . L'ensemble $\phi(M^n) = \{(m_1, \dots, m_n) \in M^n : \mathcal{M} \models \phi[\bar{m}]\}$ est dit un ensemble définissable dans \mathcal{M} .

Nous illustrons cette définition avec un exemple. Si $\mathcal{L} = \{., ^{-1}, 1\}$ est le langage des groupes et G un groupe, alors $Z(G)$, le centre du groupe G est un ensemble définissable puisque $Z(G) = \{g \in G : (G, ., ^{-1}, 1) \models \forall y(x.y = y.x)[g]\}$.

Définition 4.2 (Ensembles définissables avec paramètres) Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_l)$ et $\phi(\bar{x}; \bar{y})$ une \mathcal{L} -formule dont les variables libres sont $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l\}$. Si $\bar{a} = (a_1, \dots, a_l)$ est un l -uplet extrait de M , alors l'ensemble $\phi(M^k, \bar{a}) = \{\bar{m} \in M^k : \mathcal{M} \models \phi(\bar{m}, \bar{a})\}$ est dit un ensemble définissable dans M avec paramètres dans M .

En d'autres termes, $\phi(M^k, \bar{a})$ est un ensemble définissable (au sens de la définition 4.1) de la structure (M, \bar{a}) quand celle-ci est vue comme une structure dans le langage \mathcal{L} augmenté des symboles de constante qui nomment a_1, \dots, a_l . Notons que cela correspond à la notion de paramètre telle qu'elle a été utilisée dans tout ce qui précède.

Voici deux exemples typiques d'ensembles définissables avec paramètres, le centralisateur d'un élément g dans un groupe G et la classe conjugaison de cet élément :

$$C_G(g) = \{h \in G : (G, ., ^{-1}, 1, g) \models (x.c_g = c_g.x)[h]\}$$

$$x^G = \{h \in G : (G, ., ^{-1}, 1, g) \models \exists y(x = y^{-1}.c_g.y)[h]\}$$

Dans la suite un ensemble définissable sera un ensemble définissable avec paramètres provenant d'un modèle fixé. Pour préciser que la définition ne nécessite pas de paramètres, nous utiliserons l'appellation *0-définissable*. \emptyset -définissable est une autre notation utilisée pour cette notion.

Il convient de faire quelques remarques sur la notion de paramètre. Jusqu'à maintenant nous ne nous sommes jamais contraints à une seule structure et nous avons étudié des extensions aussi bien que des sous-structures. Parfois il est important de savoir où les paramètres sont situés. En général c'est une question difficile mais en présence des conditions modèle théoriques qui commenceront à apparaître à partir de ce chapitre elle deviendra maîtrisable.

Un autre point subtil à propos des paramètres est leur relation avec les automorphismes d'une structure donnée. Si on utilise la notation de la définition 4.2, un automorphisme de \mathcal{M} n'est pas nécessairement un automorphisme de (\mathcal{M}, \bar{a}) puisqu'il peut ne pas fixer certains éléments dans \bar{a} . Par exemple dans un groupe G , si $g \in G$ en général il existe des éléments qui ne commutent pas avec g . Si h est un tel élément, alors l'automorphisme intérieur induit par la conjugaison par h n'est pas un automorphisme de la structure (G, g) bien qu'il soit un automorphisme de G . Quand-même les sous-ensembles définissables se correspondent comme le montre le lemme suivant :

Lemme 4.3 *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_l)$ et $\phi(\bar{x}; \bar{y})$ une \mathcal{L} -formule dont les variables libres sont $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l\}$. Si ν est un automorphisme de la structure \mathcal{M} alors pour tout $\bar{a} = (a_1, \dots, a_l) \in M^l$, l'image de l'ensemble définissable $\phi(M^k, \bar{a})$ est l'ensemble définissable $\phi(M^k, \nu(\bar{a}))$.*

Preuve. Voir la proposition 2.10 4. \square

Dans la suite nous considérerons, sauf mention contraire, les automorphismes au sens général, c'est à dire ceux de la structure avant de faire intervenir des paramètres.

Ces remarques, qui peuvent paraître un peu bureaucratiques, mettent en relief une propriété importante des ensembles 0-définissables : ils sont stables sous l'action de tout automorphisme de la structure. D'ailleurs cette condition les caractérise dans une structure ω -saturée (pourquoi?).

La définition d'un ensemble n'est pas unique. De plus un ensemble définissable dont la définition fait intervenir des paramètres peut bien être 0-définissable. Un exemple un peu trop artificiel serait un groupe abélien où le groupe ambiant est le centralisateur de tout élément, et est donc défini par la formule $x = x$. Un exemple un peu plus sérieux qui concerne toujours les groupes est le suivant. Dans le groupe de matrices sur un corps K

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} t & u \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} : u \in K_+, t \in K^\times \right\}$$

si $u \in K^\times$, alors

$$C_G \left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : v \in K \right\}.$$

Si K est de caractéristique 2, on peut définir ce centralisateur en utilisant la formule $x.x = 1$.

Bien sûr il y a des cas où les paramètres sont inévitables. Un exemple est le cas des singletons (donc des sous-ensembles finis) dans $(\mathbb{Q}, <)$. Il est impossible de trouver un singleton fixé par tous les automorphismes de $(\mathbb{Q}, <)$ (pourquoi?).

Un autre point important est le choix de langage. Ci-dessus nous avons étudié un groupe de matrices défini sur un corps. Par contre le langage utilisé était celui des groupes. Or ce groupe peut être vu comme un ensemble définissable dans la structure de corps $(K, +, -, \dots)$: $G = \{(a, b, c, d) \in K^4 : \mathcal{K} \models (x_3 = 0 \wedge x_1.x_4 = 1)[(a, b, c, d)]\}$. Il n'y a aucune raison pour que les sous-ensembles définissables de G vu de cette nouvelle optique coïncident avec les sous-ensembles définissables dans le langage des groupes. Plus précisément, tout ce qui est définissable à partir de la structure en tant que groupe est définissable à partir du corps mais il n'est pas clair si l'implication inverse est vraie. En général elle est fautive comme le montre l'exemple suivant :

$$G = K \oplus K, \text{ où } K \text{ est un corps algébriquement clos de caractéristique } p.$$

G , en tant que sous-ensemble de K^2 (donc le langage est celui des corps) contient $K \oplus 0$ comme sous-ensemble définissable. Par contre, si on considère G en utilisant le langage des groupes les seuls sous-ensembles définissables sont les sous-ensembles finis ou cofinis (pourquoi?).

Nous finissons cette section en introduisant deux notions dont les définitions découlent de la notion d'ensemble définissable.

Définition 4.4 *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure. Une relation sur M^k est dite une relation définissable dans \mathcal{M} si son graphe est un ensemble définissable dans \mathcal{M} . Comme une fonction est une relation particulière, la notion d'une fonction définissable dans \mathcal{M} découle de celle de relation définissable.*

En utilisant la notion de fonction définissable nous pouvons parler des injections, surjections, morphismes etc. définissables. Une certaine prudence est quand-même nécessaire. Nous avons déjà parlé des morphismes d'une structure. Il s'agit des applications qui préservent les propriétés structurelles. Il n'est pas nécessaire que ces applications soient définissables. Dans la section 2.5 un exemple d'automorphisme était l'application qui envoie chaque rationnel x à $x - 1$. Bien que cette application soit un automorphisme de la structure $(\mathbb{Q}, <)$, elle n'est pas définissable dans cette structure car son graphe, qui est un sous-ensemble de \mathbb{Q}^2 , n'est pas définissable puisqu'elle n'est pas stable sous l'action des automorphismes de la structure de $(\mathbb{Q}, <)$.

Il existe un certain nombre de lemmes naturels et élémentaires à propos des fonctions définissables. Nous n'en énonçons qu'un seul et le reste sera mentionné quand il y en aura besoin.

Lemme 4.5 *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et f une application définissable de M^k vers M^l . En d'autres termes le graphe de f est défini par une formule du premier ordre $\phi(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l; \bar{a})$ à $k + l$ variables libres et à paramètres dans M . Alors les ensembles de départ et d'arrivée sont définissables.*

Preuve. Il suffit de considérer les projections sur M^k et M^l . Plus précisément la formule $\exists \bar{y} \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$ définit l'ensemble de départ et la formule $\exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$ définit l'ensemble d'arrivée. \square

Sous peu nous introduisons une autre notion fondamentale qui est celle d'*ensemble interprétable* : le quotient d'un ensemble définissable dans une structure par une relation définissable dans cette structure. Nous décalons cette discussion.

4.2 Rang de Morley

Dans cette section nous définissons le rang de Morley d'une formule à paramètres dans un modèle.

Définition 4.6 *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure, et $\phi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ une formule à paramètres dans M et dont les variables libres sont x_1, \dots, x_n . Nous supposons que $n \geq 1$, en d'autres termes que ϕ ait au moins une variable libre. Le rang de Morley par rapport à \mathcal{M} de $\phi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ dans M est défini de la façon suivante :*

1. $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq 0$ si $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x})$.
2. Pour α un ordinal limite $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \beta$ pour tout $\beta < \alpha$.
3. $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha + 1$ s'il existe un ensemble de formules $\{\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ à paramètres dans M et dont les variables libres sont x_1, \dots, x_n tel que
 - (i) $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x} (\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) \wedge \phi_j(\bar{x}, \bar{a}_j))$ quand $i \neq j$;
 - (ii) $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi \wedge \phi_i) \geq \alpha$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

$\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) = \alpha$ si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ mais $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \not\geq \alpha + 1$. $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) = \infty$ si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ pour tout ordinal α . Dans ce dernier cas, on dit que le rang n'est pas borné ou que ϕ n'admet pas de rang. Comme il s'agit des ordinaux, le rang peut être infini tout en restant borné.

Lemme 4.7 *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ une formule à paramètres dans M . Nous avons les conclusions suivantes :*

1. Soit $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ une formule à paramètres dans M et dont les variables libres sont les mêmes que celles de ϕ . Si $\mathcal{M} \models \forall \bar{x} (\phi \longrightarrow \psi)$, alors $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \leq \text{RM}_{\mathcal{M}}(\psi)$.
2. Soit $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ une formule à paramètres dans N et dont les variables libres sont les mêmes que celles de ϕ . Si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ et que $\mathcal{N} \models \forall \bar{x} (\phi \longrightarrow \psi)$. Alors $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \leq \text{RM}_{\mathcal{N}}(\psi)$.
3. Soit ν un automorphisme de \mathcal{M} . Alors $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \nu(\bar{a})))$. En d'autres termes, le rang de Morley d'une formule est préservé par les automorphismes de la structure ambiante (le lemme 4.3).
4. Si \mathcal{M} est ω -saturé et que $\text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{b})$ alors $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) = \text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{b}))$.

5. Soit $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ une formule à paramètres dans M et dont les variables libres sont les mêmes que celles de ϕ . Alors $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi \vee \psi) = \max(\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi), \text{RM}_{\mathcal{M}}(\psi))$.

Preuve. 1. Il suffit de montrer par récurrence que si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ alors $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\psi) \geq \alpha$. Par la définition 4.6 1, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq 0$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi$. Comme par hypothèse $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}(\phi \longrightarrow \psi)$, nous concluons que $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \psi$. Par la définition 4.6 1, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\psi) \geq 0$.

D'après la définition 4.6 2, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ pour un ordinal limite α si et seulement si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \beta$ pour tout $\beta < \alpha$. Pour chaque $\beta < \alpha$, par récurrence, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\psi) \geq \beta$. Donc une deuxième application de la définition 4.6 2 permet de conclure.

Maintenant on suppose que $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ où $\alpha = \beta + 1$. La définition 4.6 3 dit qu'il existe un ensemble $\{\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ de formules à paramètres dans M tel que $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x}(\phi_i \wedge \phi_j)$ quand $i \neq j$ et que $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi \wedge \phi_i) \geq \alpha$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il suit de notre hypothèse que $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}((\phi \wedge \phi_i) \longrightarrow (\psi \wedge \phi_i))$. Alors par récurrence, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\psi \wedge \phi_i) \geq \beta$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par la définition 4.6 3, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\psi) \geq \beta + 1$.

2. Par récurrence nous montrerons que si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ alors $\text{RM}_{\mathcal{N}}(\psi) \geq \alpha$. Si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq 0$, alors $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi$. Comme $M \preceq N$, $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \psi$. Donc, $\text{RM}_{\mathcal{N}}(\psi) \geq 0$.

Nous laissons le cas des ordinaux limites aux soins du lecteur et procédons au cas successeur. Donc $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ avec $\alpha = \beta + 1$. Par la définition 4.6 3, il existe un ensemble $\{\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ de formules à paramètres dans M tel que $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x}(\phi_i \wedge \phi_j)$ quand $i \neq j$ et que $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi \wedge \phi_i) \geq \alpha$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, $\mathcal{N} \models \neg \exists \bar{x}(\phi_i \wedge \phi_j)$ quand $i \neq j$. Il suit de notre hypothèse que $\mathcal{N} \models \forall \bar{x}((\phi \wedge \phi_i) \longrightarrow (\psi \wedge \phi_i))$. Alors par récurrence, $\text{RM}_{\mathcal{N}}(\psi \wedge \phi_i) \geq \beta$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par la définition 4.6 3, $\text{RM}_{\mathcal{N}}(\psi) \geq \beta + 1$.

3. Nous montrerons par récurrence que si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha$, alors $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \nu(\bar{a}))) \geq \alpha$. Comme ν est un automorphisme la conclusion suivra.

Par la définition 4.6 1 $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq 0$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$. Comme, d'après le lemme 4.3, $\phi(\bar{x}, \nu(\bar{a}))$ est l'image de $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ sous l'action de ν , $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \nu(\bar{a}))$. Donc $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \nu(\bar{a}))) \geq 0$.

Nous procédons au cas $\alpha = \beta + 1$. Par la définition 4.6 3, il existe une famille $\{\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ de formules à paramètres dans M telles que $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x}(\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) \wedge \phi_j(\bar{x}, \bar{a}_j))$ quand $i \neq j$ et que $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)) \geq \beta$. Le lemme 4.3, appliqué à $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) \wedge \phi_j(\bar{x}, \bar{a}_j)$ montre que $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x}(\phi_i(\bar{x}, \nu(\bar{a}_i)) \wedge \phi_j(\bar{x}, \nu(\bar{a}_j)))$ quand $i \neq j$. Par récurrence, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \nu(\bar{a})) \wedge \phi_i(\bar{x}, \nu(\bar{a}_i))) \geq \beta$. Donc, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \nu(\bar{a}))) \geq \alpha$.

4. **Rectificatif :** Le passage suivant en italique était dans la version précédente. Elle n'est pas tout à fait correcte puisque le théorème 3.25 dépend de la dénombrabilité de la structure ω -saturée, ce qui n'est pas clair dans notre situation. La notion d' ω -stabilité qui sera introduite dans ce chapitre permettra de conclure l'existence d'un modèle ω -saturé et dénombrable en utilisant le théorème 3.26 mais nous en sommes bien loin. Donc après le passage en italique vous trouverez une "preuve indépendante du point 3."

Ce point est équivalent au point 3 une fois que nous sommes dans un modèle ω -saturé. La suffisance du point 3 dans un modèle ω -saturé découle du théorème 3.25. Sa nécessité découle du lemme 2.10 4. On peut quand-même faire une preuve indépendante du point 3.

Comme dans ce point nous ne quittons pas le modèle \mathcal{M} , nous écrivons RM plutôt que $\text{RM}_{\mathcal{M}}$. On raisonne par récurrence pour montrer que chaque fois que \bar{a} et \bar{b} sont des uples extraits de M qui ont même type sur \emptyset , et qui sont paramètres d'une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ alors $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha$ implique que $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b})) \geq \alpha$. Par symétrie on obtiendra l'égalité énoncée.

$\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq 0$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$. Comme $\text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{b})$, $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b})$. Donc, par définition de RM, $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b})) \geq 0$.

Nous procédons au cas où $\alpha = \beta + 1$. Par définition de RM, il existe des formules $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ avec \bar{a}_i extraits de M telles que $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x}(\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) \wedge \phi_j(\bar{x}, \bar{a}_j))$ pour $i \neq j$ et que $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)) \geq \beta$.

Nous construirons une suite $\{\bar{b}_i : i \in \mathbb{N}\}$ des n -uples extraits de M telle que $\text{tp}(\bar{b}_i, \dots, \bar{b}_0, \bar{b}) = \text{tp}(\bar{a}_i, \dots, \bar{a}_0, \bar{a})$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La construction utilisera l' ω -saturation de \mathcal{M} . Pour \bar{b}_0 nous

considérons $\text{tp}(\bar{a}_0, \bar{a})$ et définissons l'ensemble

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{b}) &= \{\theta(\bar{x}, \bar{b}) : \theta(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{tp}(\bar{a}_0, \bar{a})\} \\ &= \{\theta(\bar{x}, \bar{b}) : \mathcal{M} \models \theta(\bar{a}_0, \bar{a})\}\end{aligned}$$

Cet ensemble est consistant avec $\text{Th}(\mathcal{M})$ puisque si $\theta_1(\bar{x}, \bar{b}), \dots, \theta_m(\bar{x}, \bar{b}) \in \Phi(\bar{b})$, alors $\mathcal{M} \models \bigwedge_{i=1}^m \theta_i(\bar{a}_0, \bar{a})$ et $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^m \theta_i(\bar{x}, \bar{a})$. Or $\text{tp}(\bar{a}) = \text{tp}(\bar{b})$ par hypothèse. Donc $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \theta_i(\bar{x}, \bar{b})$. Il en découle qu'il existe une extension élémentaire de \mathcal{M} où $\Phi(\bar{b})$ est réalisé. Or \mathcal{M} est ω -saturé et les seuls paramètres utilisés dans $\Phi(\bar{b})$ sont les membres du n -uplet \bar{b} . Donc $\Phi(\bar{b})$ est réalisé dans \mathcal{M} . \bar{b}_0 est l'une de ces réalisations dans \mathcal{M} . Cet argument amorce la construction par récurrence. Une fois $\{\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_i\}$ obtenus, pour trouver \bar{b}_{i+1} , on répète le même argument en utilisant l'égalité des types $\text{tp}(\bar{a}_i, \dots, \bar{a}_0, \bar{a}) = \text{tp}(\bar{b}_i, \dots, \bar{b}_0, \bar{b})$.

La condition sur l'égalité des types implique en particulier que $\text{tp}(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = \text{tp}(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$. Il en découle que $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x} (\phi_i(\bar{x}, \bar{b}_i) \wedge \phi_j(\bar{x}, \bar{b}_j))$. Comme $\text{tp}(\bar{b}, \bar{b}_i) = \text{tp}(\bar{a}, \bar{a}_i)$ aussi par la même construction de $\{\bar{b}_i : i \in \mathbb{N}\}$, par récurrence $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \phi_i(\bar{x}, \bar{b}_i)) \geq \beta$. Cela montre que $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{b})) \geq \alpha$.

5. Exercice. \square

Proposition 4.8 *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ une formule à paramètres dans M . Si \mathcal{M} est ω -saturé, alors pour toute extension élémentaire \mathcal{N} de \mathcal{M} , $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) = \text{RM}_{\mathcal{N}}(\phi)$. En particulier, nous pouvons parler de $\text{RM}(\phi)$.*

Preuve. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} comme dans l'énoncé. Le lemme 4.7 2 montre qu'il suffit de montrer que pour tout ordinal α , si $\text{RM}_{\mathcal{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha$ alors $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha$. Nous montrerons cela par récurrence sur α . Le théorème 3.16 et le lemme 4.7 2 montrent que nous pouvons supposer \mathcal{N} ω -saturé.

Nous ne considérons que le cas où $\alpha = \beta + 1$. Il existe donc une famille $\{\phi_i(\bar{x}, \bar{b}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ de formules à paramètres dans N telle que $\mathcal{N} \models \neg \exists \bar{x} (\phi_i(\bar{x}, \bar{b}_i) \wedge \phi_j(\bar{x}, \bar{b}_j))$ pour $i \neq j$ et que $\text{RM}_{\mathcal{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{b}_i)) \geq \beta$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

En utilisant l' ω -saturation de \mathcal{M} , nous construisons une suite de \bar{a}_i extraits de M tels que

$$\text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_i) = \text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{a}, \bar{b}_0, \dots, \bar{b}_i)$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour $i = 0$, nous considérons $\text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}_0/\bar{a})$. Comme \mathcal{M} est ω -saturé, ce type sur un ensemble fini de paramètres extraits de M est réalisé dans \mathcal{M} dans \mathcal{M} par un certain \bar{a}_0 . Donc pour tout $\theta(\bar{x}, \bar{a}) \in \text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}_0/\bar{a})$, $\mathcal{M} \models \theta(\bar{a}_0, \bar{a})$. Cela implique que $\text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}_0/\bar{a}) = \text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}_0/\bar{a})$. Equivalamment, $\text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}_0, \bar{a}) = \text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}_0, \bar{a})$. Cela amorce la construction. Supposons maintenant $\{\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_i\}$ construit. Nous considérons

$$\Phi = \{\theta(\bar{x}, \bar{a}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_i) : \mathcal{N} \models \theta(\bar{b}_{i+1}, \bar{a}, \bar{b}_0, \dots, \bar{b}_i)\}$$

Cet ensemble est consistant avec $\text{Th}(\mathcal{M})$. En effet si $\theta_1(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}_0, \dots, \bar{b}_i), \dots, \theta_m(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}_0, \dots, \bar{b}_i)$ sont des formules de Φ , alors

$$\mathcal{N} \models \bigwedge_{j=1}^m \theta_j(\bar{b}_{i+1}, \bar{a}, \bar{b}_0, \dots, \bar{b}_i)$$

et

$$\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \bigwedge_{j=1}^m \theta_j(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}_0, \dots, \bar{b}_i)$$

Or $\text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_i) = \text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{a}, \bar{b}_0, \dots, \bar{b}_i)$ par construction, donc

$$\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \bigwedge_{j=1}^m \theta_j(\bar{x}, \bar{a}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_i)$$

Par compacité il existe une extension élémentaire de \mathcal{M} qui réalise Φ . Comme c'est un ensemble de formules à un nombre fini de paramètres provenant de \mathcal{M} et que \mathcal{M} est ω -saturé, \mathcal{M} réalise Φ . Une telle réalisation sera \bar{a}_{i+1} .

Il découle de notre construction que pour tout k , $\text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}_k, \bar{a}) = \text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}_k, \bar{a})$ et $\text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = \text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$ pour tout i et j . Cette deuxième égalité de types et $\mathcal{N} \models \neg \exists \bar{x}(\phi_i(\bar{x}, \bar{b}_i) \wedge \phi_j(\bar{x}, \bar{b}_j))$ pour $i \neq j$ impliquent $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x}(\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) \wedge \phi_j(\bar{x}, \bar{a}_j))$ pour $i \neq j$. Le lemme 4.7 4 et l'égalité $\text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}_i, \bar{a}) = \text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}_i, \bar{a})$ montre que $\text{RM}_{\mathcal{N}}(\phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{a}_i)) \geq \beta$. Par récurrence $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{a}_i)) \geq \beta$. Donc $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha$. \square

Définition 4.9 Une théorie complète du premier ordre est dite totalement transcendante si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(x = x) < \infty$ dans un modèle ω -saturé \mathcal{M} . Dans ce cours nous préférons l'appellation théorie de rang de Morley.

Exemple : Nous considérons les corps algébriquement clos d'une caractéristique p fixée. Nous avons déjà observé que cette théorie élimine les quanteurs. Si $\psi(x)$ est une formule à une seule variable libre x , alors nous pouvons supposer qu'elle est sans quanteur donc $\psi(x)$ est de la forme $f(x) = 0$ ou $f(x) \neq 0$ où f est un polynôme dans $K[X]$ (K corps algébriquement clos). Il en découle que chaque sous-ensemble définissable de K est fini ou cofini. Il est donc impossible de trouver un ensemble de formules $\{\phi_i(x, \bar{a}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ à paramètres dans K satisfaisant la définition 4.6 3 et chacune étant satisfaite par une infinité d'éléments. On conclut alors que $\text{RM}(x = x) \geq 1$ mais $\text{RM}(x = x) \not\geq 2$. Donc $\text{RM}(x = x) = 1$.

Ce qui fait augmenter le rang c'est la partition en une infinité de sous-ensembles disjoints définissables tous de même rang. La partition en un nombre fini de sous-ensembles définissables de même rang permet de définir le *degré de Morley*. Nous utiliserons le lemme suivant de la combinatoire :

Lemme de König Tout arbre infini à branchement fini a une branche infinie.

Théorème 4.10 Soient T une théorie complète du premier ordre et \mathcal{M} un modèle de T . Si $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ est une formule de rang de Morley α , alors il existe un nombre naturel maximal d et des formules $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ ($0 \leq i \leq d-1$) à paramètres dans M , tels que $\text{RM}(\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)) = \text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{a}))$ et que $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ soit l'union disjointe des $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$. Ce nombre naturel ne varie pas quand on passe à une extension élémentaire de \mathcal{M} si \mathcal{M} est ω -saturé.

Preuve. Supposons qu'un tel nombre d n'existe pas. Alors pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe des formules $\phi_{d,i}(\bar{x}, \bar{a}_{d,i})$ telles que $\phi(\bar{x}, \bar{a}) = \bigsqcup_{i=0}^{d-1} \phi_{d,i}(\bar{x}, \bar{a}_{d,i})$. Nous pouvons supposer par un argument de récurrence faisant usage du lemme 4.7 5 que chaque $\phi_{d+1,j}$ est contenu dans un certain $\phi_{d,i}$. Alors, cette suite de partitions de $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ se traduit par un arbre infini à branchement fini. Le lemme de König implique qu'il existe une suite strictement décroissante de formules ψ_i telle que $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\psi_i) = \alpha$ et que $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\psi_i \wedge \neg \psi_{i+1}) = \alpha$. Cela force $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha + 1$. Cela contredit notre hypothèse.

Si de plus \mathcal{M} est ω -saturé on peut montrer que d ne varie pas en passant aux extensions élémentaires. Si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ et que dans \mathcal{N} il existe $\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_d$ tels que $\phi(\bar{x}, \bar{a}) = \bigsqcup_{i=0}^d \psi_i(\bar{x}, \bar{b}_i)$. Comme \mathcal{M} est ω -saturé on peut réaliser $\text{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}_0/\bar{a})$ dans M et continuer à remplacer chaque \bar{b}_i par un uple \bar{a}_i extrait de M en suivant la méthode de la proposition 4.8 qui, à part autre chose, utilise le lemme 4.7 4. Ceci contredit la maximalité de d . \square

Un nombre naturel d (par rapport à un modèle saturé) comme dans le théorème 4.10 est dit le *degré de Morley* de $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ ou de l'ensemble défini par $\phi(\bar{x}, \bar{a})$. La notation sera $\text{deg}(\phi)$.

Bien que la définition du degré de Morley ne soit sans ambiguïté que dans un modèle ω -saturé, dans la plupart des énoncés qui suivent concernant le degré de Morley le modèle ne sera pas supposé ω -saturé. Le degré calculé sur un modèle quelconque est suffisant pour démontrer ces énoncés. Nous n'introduisons pas de notation comme $d_{\mathcal{M}}$ puisque les raisonnements seront faits par rapport à un seul modèle.

Lemme 4.11 *Soient T une théorie complète du premier ordre et \mathcal{M} un modèle de T . Si $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ et $\psi(\bar{x}, \bar{b})$ sont deux formules de rang de Morley α telles que $\mathcal{M} \models \forall x(\phi(\bar{x}, \bar{a}) \rightarrow \psi(\bar{x}, \bar{b}))$, alors $\text{deg}(\phi) \leq \text{deg}(\psi)$.*

Preuve. Au lieu d'une preuve, qui est plutôt un exercice, nous nous contentons d'une remarque. L'énoncé serait faux si le sous-ensemble ψ était de rang strictement inférieur. \square

Lemme 4.12 *Le degré de Morley est préservé par les automorphismes de la structure ambiante.*

Preuve. Les lemmes 4.3 et 4.7 3 permettent de conclure. \square

Exemple (suite) : Nous retournons aux corps algébriquement clos. L'argument ci-dessus utilisant l'élimination des quantificateurs montre que $\text{deg}(x = x) = 1$ pour un corps algébriquement clos.

Jusqu'à maintenant nous n'avons parlé que du rang et du degré des formules du premier ordre. Maintenant nous définissons le rang et le degré des types en utilisant ce que nous avons accompli.

Définition 4.13 *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et Σ un ensemble de formules consistant avec $\text{Th}(\mathcal{M})$, à paramètres dans $A \subseteq M$ et à variables libres parmi x_1, \dots, x_n . Alors*

$$\begin{aligned} \text{RM}(\Sigma) &= \min\{\text{RM}(\tilde{\phi}) : \phi \in \Sigma\} \\ \text{deg}(\Sigma) &= \min\{\text{deg}(\tilde{\phi}) : \phi \in \Sigma, \text{RM}(\tilde{\phi}) = \text{RM}(\Sigma)\} \end{aligned}$$

où $\tilde{\phi}(x_1, \dots, x_n) = \phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \wedge \bigwedge_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} (x_j = x_j)$. Nous prenons soin d'introduire les formules avec $\tilde{}$ pour celles qui ont moins de n variables libres parce que la définition du rang de Morley dépend du nombre exact de variables tandis que dans Σ il peut exister des formules à moins de n variables.

En particulier si $p \in S_n(A)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \text{RM}(p) &= \min\{\text{RM}(\tilde{\phi}) : \phi \in p\} \\ \text{deg}(p) &= \min\{\text{deg}(\tilde{\phi}) : \phi \in p, \text{RM}(\tilde{\phi}) = \text{RM}(p)\} \end{aligned}$$

Lemme 4.14 *Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure, $A \subseteq M$. Si $\Sigma(\bar{x})$ est un ensemble de formules consistant avec $\text{Th}(\mathcal{M})$, à variables libres x_1, \dots, x_n et à paramètres dans A , alors il existe un type p dans $S_n(A)$ tel que $\text{RM}(p) = \text{RM}(\Sigma)$.*

Preuve. D'abord nous montrons que pour une \mathcal{L} -formule ψ à paramètres dans A , soit $\text{RM}(\Sigma \cup \{\psi\}) = \text{RM}(\Sigma)$, soit $\text{RM}(\Sigma \cup \{\neg\psi\}) = \text{RM}(\Sigma)$. En effet, la définition 4.13 force les rangs de $\Sigma \cup \{\psi\}$ et de $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ à être au plus égal à $\text{RM}(\Sigma)$. Si $\text{RM}(\Sigma \cup \{\psi\}) < \text{RM}(\Sigma)$ et $\text{RM}(\Sigma \cup \{\neg\psi\}) < \text{RM}(\Sigma)$, alors cela est témoigné (la définition 4.13) par une formule $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in \Sigma$, en d'autres termes, $\text{RM}(\{\phi, \psi\}) < \text{RM}(\Sigma)$ et $\text{RM}(\{\phi, \neg\psi\}) < \text{RM}(\Sigma)$.

$$\begin{aligned} \text{RM}(\phi) &= \text{RM}((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \neg\psi)) \\ &= \max(\text{RM}(\phi \wedge \psi), \text{RM}(\phi \wedge \neg\psi)) \text{ (le lemme 4.7 5)} \\ &< \text{RM}(\Sigma) \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Le reste de l'argument est une récurrence sur les ordinaux après avoir énuméré les formules à paramètres dans A et à mêmes variables libres que celles de Σ . Soit $\theta_\alpha(\bar{x})$ ($\alpha < \kappa$) une telle énumération. Que cette énumération existe en général est un problème ensembliste que nous n'abordons pas ici.

Après l'énumération susmentionnée vient la construction suivante. On pose $\Sigma_0 = \Sigma \cup \{\theta_0\}$ si $\text{RM}(\Sigma \cup \{\theta_0\}) = \text{RM}(\Sigma)$ et $\Sigma_0 = \Sigma \cup \{\neg\theta_0\}$ si $\text{RM}(\Sigma \cup \{\theta_0\}) < \text{RM}(\Sigma)$. Le premier paragraphe montre que l'une de ces deux possibilités est inévitable. Pour $\alpha < \kappa$ où α est un ordinal limite $\Sigma_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \Sigma_\beta$. Si $\alpha = \beta + 1$, alors on pose $\Sigma_\alpha = \Sigma_\beta \cup \{\theta_\alpha\}$ si $\text{RM}(\Sigma_\beta) = \text{RM}(\Sigma_\beta \cup \{\theta_\alpha\})$ et $\Sigma_\alpha = \Sigma_\beta \cup \{\neg\theta_\alpha\}$ si $\text{RM}(\Sigma_\beta) < \text{RM}(\Sigma_\beta \cup \{\theta_\alpha\})$. L'union des Σ_α est le type cherché. \square

Lemme 4.15 *Soient \mathcal{M} une structure et $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ une formule de rang de Morley α à n variables libres et à paramètres dans M . Alors $\text{deg}(\phi(\bar{x}, \bar{a}))$ est exactement le nombre de n -types qui contiennent ϕ et qui sont de rang α .*

Preuve. Nous posons $d = \text{deg}(\phi(\bar{x}, \bar{a}))$. Soient $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ ($0 \leq i \leq d-1$) des formules partageant ϕ comme dans le théorème 4.10. Alors le lemme 4.14 montre que chacune des ϕ_i est contenue dans un n -type sur M de rang de Morley α et que nous notons p_i . Comme $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x}(\phi_i \wedge \phi_j)$ et que chaque p_i contient aussi ϕ , nous concluons qu'il existe au moins d types distincts sur M contenant p et de rang α .

Montrons qu'il n'existe pas de type p_d de rang α et différent des p_0, \dots, p_{d-1} contenant ϕ . Par l'absurde supposons qu'un tel type existe. Alors pour chaque $i \in \{0, \dots, d-1\}$, il existe une formule $\theta_{i,d}$ telle que $\theta_{i,d} \in p_d \setminus p_i$. Comme $\phi \in p_d$, la formule $\theta = \bigwedge_{i=0}^{d-1} \theta_{i,d} \wedge \phi$ est de rang α (le lemme 4.7 1 et la définition 4.13). Comme $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}(\theta \rightarrow \theta_{i,d})$ pour tout $i \in \{0, \dots, d-1\}$, $\theta \notin p_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, d-1\}$. En particulier $\neg \theta \in \bigcap_{0 \leq i \leq d-1} p_i$. Comme $\text{RM}(\phi_i) = \text{RM}(p_i)$, $\text{RM}(\phi_i \wedge \neg \theta) = \text{RM}(p_i)$. Il en découle que $\text{RM}(\phi_i \wedge \theta) < \text{RM}(\phi)$. En effet si $\text{RM}(\phi_i \wedge \theta) = \text{RM}(\phi)$, alors $\text{deg}(\phi) > d$, absurde. Donc $\text{RM}(\theta \wedge (\bigvee_{0 \leq i \leq d-1} \phi_i)) < \text{RM}(\theta) = \text{RM}(\phi)$. Il en découle que $\text{RM}(\theta \wedge \neg(\bigvee_{0 \leq i \leq d-1} \phi_i)) = \text{RM}(\theta)$. Or la formule $\theta \wedge \neg(\bigvee_{0 \leq i \leq d-1} \phi_i)$ est disjointe des ϕ_i et est contenu dans ϕ . Cela contredit que $\text{deg}(\phi) = d$. \square

Lemme 4.16 *On reprend les hypothèses du lemme 4.15. Si $\text{RM}(p) = \alpha$ alors il existe une formule dans p telle que p soit le seul type de rang α qui contienne cette formule.*

Preuve. Nous posons $d = \text{deg}(p)$. Soit ϕ une formule dans p de degré d et de rang α . Soient p_0, \dots, p_{d-1} les types de rang α qui contiennent ϕ (le lemme 4.15). Si $d = 1$ alors il n'y a rien à faire. Sinon, nous pouvons supposer $p = p_0$. Il existe des formules θ_i ($i \in \{1, \dots, d-1\}$) telles que $\theta_i \in p_0 \setminus p_i$. La formule $\phi \wedge \bigwedge_{i=1}^{d-1} \theta_i$ isole p des autres types de rang α qui contiennent ϕ . \square

Nous avons défini une théorie T de rang de Morley en utilisant la formule $x = x$. Les conclusions que nous avons obtenues sur le comportement du RM dans les modèles saturés montrent que cette définition est sans ambiguïté. Par contre il n'est pas clair si les sous-ensembles définissables des produits cartésiens d'un modèle de T admettent un rang. C'est ce que nous montrerons maintenant. Dans ce but nous introduisons une notion importante de la théorie des modèles :

Définition 4.17 *Une théorie complète du premier ordre est dite ω -stable si pour tout ensemble A dénombrable de paramètres extraits d'un modèle de T $S_1(A)$ est aussi dénombrable.*

Le lemme suivant sera plutôt utilisé pour démontrer le corollaire 4.21 que le théorème 4.20.

Lemme 4.18 *Une théorie complète T du premier ordre est ω -stable si et seulement si pour tout ensemble A dénombrable de paramètres extraits d'un modèle de T et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(A)$ est dénombrable.*

Preuve. La suffisance de la condition est triviale. Nous raisonnons pour démontrer la nécessité de la façon suivante. Si T est une théorie ω -stable, la définition de l' ω -stabilité permet d'amorcer une récurrence qui se fait sur n . Supposons que l'énoncé soit vrai pour n . Soit A un ensemble dénombrable de paramètres. Soit B un ensemble qui contient une réalisation de chaque n -type sur A . Alors B est dénombrable par récurrence et contient A .

Si $\text{tp}(c_1, \dots, c_{n+1}/A) \in S_{n+1}(A)$, alors il existe $b_1, \dots, b_n \in B$ tels que $\text{tp}(c_1, \dots, c_n/A) = \text{tp}(b_1, \dots, b_n/A)$. L'ensemble

$$\{\phi(b_1, \dots, b_n, x_{n+1}; \bar{a}) : \phi(\bar{x}, \bar{a}) \in \text{tp}(c_1, \dots, c_n, c_{n+1}/A)\}$$

est consistant avec T . Comme T est ω -stable il y a une infinité dénombrable de tels ensembles pour chaque choix de (b_1, \dots, b_n) . Alors la dénombrabilité de B implique qu'au total il existe une infinité dénombrable de possibilités. Or chaque ensemble de cette forme définit un $n+1$ -type sur A . Donc $S_{n+1}(A)$ est une ensemble dénombrable. \square

Lemme 4.19 *Soient \mathcal{M} une structure. Il existe alors un ordinal α_0 tel que pour toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ à paramètres extraits de M , si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha_0$, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) = \infty$. En particulier, si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) = \infty$, alors il existe $\psi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ ($i \in \{1, 2\}$) deux formules contradictoires contenues dans ϕ (en d'autres termes, $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}(\psi_i \rightarrow \phi)$) et de rang ∞ .*

Preuve. On peut montrer par récurrence que si $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) = \beta$ et que $\beta' < \beta$ alors il existe une formule θ telle que $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\theta) = \beta'$. C'est un exercice simple.

Pour chaque formule $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ le lemme 4.7 4 montre qu'il n'existe pas plus de possibilités de rangs que le nombre de types $\text{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a})$, donc un ensemble dont le cardinal est celui de M . Comme le langage du premier ordre est d'un cardinal donné aussi, la conclusion découle du premier paragraphe.

Pour la deuxième condition il suffit de remarquer que $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) = \infty$ implique $\text{RM}_{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha_0 + 1$ \square

Théorème 4.20 *Soit T une théorie complète du premier ordre dans un langage dénombrable. T est de rang de Morley si et seulement si T est ω -stable.*

Preuve. La nécessité de la condition d' ω -stabilité est démontrée en utilisant l'hypothèse sur le cardinal du langage. En effet, le lemme 4.16 montre que chaque fois qu'un type p est fixé il existe une formule ϕ de rang $\text{RM}(p)$ et de degré $\text{deg}(p)$ qui isole p des autres types de même rang. Donc le cardinal de l'ensemble des types est borné par le cardinal de l'ensemble des formules. Ceci est dénombrable quand le langage et l'ensemble de paramètres fixé sont dénombrables (pourquoi?).

Pour montrer la suffisance, nous supposons que $\text{RM}(x = x) = \infty$. Nous construirons sur un ensemble non dénombrable de types en utilisant un ensemble dénombrable de paramètres. En effet, la construction sera celle d'un arbre binaire infini dont chaque branche sera un ensemble consistant (avec T) de formules, chaque noeud sera une formule de rang ∞ , indexée par une suite finie de $\{0, 1\}$, à paramètres indexés par la même suite, et toute paire de branches distinctes seront contradictoires.

Nous nous plaçons dans un modèle ω -saturé de T . Donc, $\text{RM}_{\mathcal{M}}(x = x) = \infty$. Le niveau 0 (la racine) est formé par la formule $x = x$ qui est de la forme $\phi_{\langle \rangle}(x, \emptyset)$ où $\langle \rangle : \emptyset \rightarrow \{0, 1\}$. Supposons que le niveau i soit construit. Tout noeud à ce niveau est, par hypothèse de récurrence, une formule de rang ∞ de la forme $\phi_s(x, a_s)$ où $s : \{0, \dots, i-1\} \rightarrow \{0, 1\}$. Comme ϕ_s est de rang ∞ , le lemme 4.19 montre qu'il existe deux formules $\phi_{s \hat{\ } 0}(x, a_{s \hat{\ } 0})$ et $\phi_{s \hat{\ } 1}(x, a_{s \hat{\ } 1})$ de rang ∞ telles que $\mathcal{M} \models \neg \exists x(\phi_{s \hat{\ } 0}(x, a_{s \hat{\ } 0}) \wedge \phi_{s \hat{\ } 1}(x, a_{s \hat{\ } 1}))$ (les deux formules sont contradictoires), et que $\mathcal{M} \models \forall x(\phi_{s \hat{\ } 0}(x, a_{s \hat{\ } 0}) \rightarrow \phi_s(x, a_s))$ et que $\mathcal{M} \models \forall x(\phi_{s \hat{\ } 1}(x, a_{s \hat{\ } 1}) \rightarrow \phi_s(x, a_s))$ (les deux nouvelles formules partitionnent celle avec laquelle nous avons commencé).

Le fait que les rangs des formules soient ∞ permet de réitérer ce procédé une infinité dénombrable de fois. Les paramètres sont indexés par les suites finies formées de 0 et 1. Comme ce dernier ensemble est dénombrable, l'ensemble de paramètres utilisé dans la construction est dénombrable. Par contre il y a $2^{\mathbb{N}_0}$ branches distinctes deux à deux contradictoires. Or chaque branche est un ensemble consistant, ce qui peut être vérifié par compacité. En conclusion, T n'est pas une théorie ω -stable. \square

Corollaire 4.21 *Une théorie complète T du premier ordre et dénombrable est de rang de Morley si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout uple (x_1, \dots, x_n) , $\text{RM}(\bar{x} = \bar{x}) < \infty$.*

Preuve. Il faut seulement démontrer la nécessité de la condition. Or, si $\text{RM}(\bar{x} = \bar{x}) = \infty$ nous pouvons répéter la construction dans la deuxième partie de la preuve du théorème 4.20 pour montrer qu'il existe un ensemble dénombrable de paramètres sur lequel on peut trouver un ensemble nondénombrable de types. Ceci, en utilisant le lemme 4.18, montre que T n'est pas ω -stable. Comme T est dénombrable, la conclusion découle du théorème 4.20. \square

Définition 4.22

1. Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et $\phi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ une \mathcal{L} -formule. On dit que ϕ ordonne un ensemble de n -uplets $\{\bar{a}_i \in M^n : i \in I\}$ ($(I, <)$ est une chaîne) si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$ quand $i < j$ et $\mathcal{M} \models \neg\phi(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$ quand $i > j$.
2. Une théorie T complète est dite stable si T n'a pas de modèle dont un sous-ensemble infini d'un produit cartésien est ordonné par une formule du premier ordre.
3. Une structure \mathcal{M} est dite stable si $\text{Th}(\mathcal{M})$ est stable.

En réalité, la définition de la stabilité que nous venons de donner est plutôt une caractérisation. Comme les appellations l'indiquent, la notion d' ω -stabilité est un cas particulier de la notion de stabilité :

Proposition 4.23 *Soit T une théorie ω -stable. Alors T est stable.*

Preuve. La preuve sera par l'absurde. Donc nous supposons l'existence d'une théorie T ω -stable mais non stable. La définition 4.22 implique alors qu'il existe $\mathcal{M} \models T$ tel que M^n contienne un sous-ensemble infini $A = \{\bar{a}_i : i \in I\}$ ordonné par une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$. Un argument de compacité montre que nous pouvons remplacer I par \mathbb{Q} l'ordre usuel des rationnels (pourquoi?).

A partir des données du premier paragraphe nous construirons un arbre binaire à une infinité niveaux dont les branches seront des ensembles consistants deux à deux contradictoires sur l'ensemble de paramètres A . Ceci contredira l' ω -stabilité de T puisque nous aurons montré que $|S(A)|$ n'est pas dénombrable tandis que A l'est.

Le niveau 0 de l'arbre binaire est formé par la formule $\bar{x} = \bar{x}$. Supposons que le niveau n soit construit par les formules suivantes : $\bigwedge_{i=0}^{n-1} (-1)^{\eta(i)} \phi(\bar{x}, \bar{a}_{\sum_{0 \leq j < i} \frac{(-1)^{\eta(j)}}{2^j}})$. Les η sont les suites de 0, 1, $\eta : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1\}$ et le nombre -1 devant ϕ est interprété comme la négation. Les indices $\sum_{0 \leq j < i} \frac{(-1)^{\eta(j)}}{2^j}$ forment un ensemble fini de rationnels et en utilisant le fait que A soit indexée par les rationnels on peut diviser l'intervalle entre deux indices successifs en deux morceaux ce qui permet de diviser en deux parties non vides et disjointes la partie $\bigwedge_{i=0}^{n-1} (-1)^{\eta(i)} \phi(\bar{x}, \bar{a}_{\sum_{0 \leq j < i} \frac{(-1)^{\eta(j)}}{2^j}})$. On obtient de cette façon les deux formules

$$\bigwedge_{i=0}^{n-1} (-1)^{\eta(i)} \phi(\bar{x}, \bar{a}_{\sum_{0 \leq j < i} \frac{(-1)^{\eta(j)}}{2^j}}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{a}_{\sum_{0 \leq j < i} \frac{(-1)^{\eta(j)}}{2^j} - \frac{(-1)^{\eta(n-1)}}{2^n}})$$

et

$$\bigwedge_{i=0}^{n-1} (-1)^{\eta(i)} \phi(\bar{x}, \bar{a}_{\sum_{0 \leq j < i} \frac{(-1)^{\eta(j)}}{2^j}}) \wedge \neg\phi(\bar{x}, \bar{a}_{\sum_{0 \leq j < i} \frac{(-1)^{\eta(j)}}{2^j} + \frac{(-1)^{\eta(n-1)}}{2^n}})$$

Ces nouvelles formules forment le niveau $n+1$. A la fin de la construction nous obtenons 2^{\aleph_0} types sur A et cela contredit l' ω -stabilité de T . \square

4.3 Conditions de chaîne dans les groupes (suite) ; composantes connexes

Nous finirons ce chapitre en retournant à un thème introduit au premier chapitre et qui sera de plus en plus visible dans la suite. Il s'agit des conditions de chaîne sur diverses familles de sous-groupes définissables dans les groupes qui apparaissent dans le contexte de la théorie des modèles. Soulignons que dans la suite un groupe stable, ω -stable, de rang de Morley sera un groupe dont la théorie du premier ordre satisfait cette propriété.

Nous commençons avec une définition :

Définition 4.24 *Une famille $\{H_i : i \in I\}$ de sous-groupes d'un groupe G est dite uniformément définissable si chaque H_i est défini par $\phi(x, \bar{a}_i)$, où les paramètres sont extraits de G et la formule $\phi(x, \bar{y})$ ne change pas d'une définition à l'autre.*

Notons que nous pouvons toujours incorporer les énoncés définissant un groupe à $\phi(x, \bar{y})$ et supposer que chaque fois que la formule $\phi(x, \bar{a})$ est consistante, elle définit un sous-groupe de G .

Le lemme suivant est immédiat de la définition même de la stabilité.

Lemme 4.25 *Soit G un groupe stable. Alors pour toute formule $\phi(x, \bar{y})$ il existe un nombre naturel n tel que tout chaîne de sous-groupes*

$$H_1 < \dots < H_k$$

dont les membres sont définis par des formules $\phi(x, \bar{a}_i)$ ait au plus n éléments.

Preuve. Exercice \square

En effet, cette condition de chaîne sur les sous-groupes uniformément définissables est valable pour tous les sous-ensembles de G définis par des formules de la forme $\phi(x, \bar{a})$. La proposition suivante montre que des conditions plus fortes sont satisfaites dans les groupes stables.

Proposition 4.26 *Si G est un groupe stable, à toute formule $\phi(x, \bar{y})$ on peut associer un nombre naturel n tel que, l'intersection d'une famille finie de sous groupes $\{\phi(x, \bar{b}_1), \dots, \phi(x, \bar{b}_m)\}$ de G soit l'intersection de n d'entre eux.*

Preuve. Supposons que G soit un contre-exemple à l'énoncé. Alors pour m arbitrairement large, nous pouvons trouver des sous-groupes $\phi(x, \bar{b}_1), \dots, \phi(x, \bar{b}_m)$ de G tels qu'aucun des $\phi(x, \bar{b}_i)$ ne contienne l'intersection des autres. Donc pour chaque $1 \leq i \leq m$ il existe h_i tel que $G \models \neg\phi(h_i, \bar{b}_i) \wedge \bigwedge_{j \neq i} \phi(h_i, \bar{b}_j)$. On définit alors $a_0 = 1, a_{i+1} = h_0 \dots h_i$ ($0 \leq i \leq m-1$). Il en découle que $\mathcal{M} \models \phi(a_i, \bar{b}_j)$ si et seulement si $i \leq j$. Maintenant nous définissons la formule $\psi(x, \bar{y}; x', \bar{y}')$ par la formule $\phi(x, \bar{y}')$. Cette formule ordonne les uples (a_i, \bar{b}_i) . Maintenant par compacité (m est arbitrairement large), ψ ordonne une famille infinie de uples dans une extension élémentaire de G ce qui contredit la stabilité de G . \square

Corollaire 4.27 *Soit G un groupe stable. Alors à chaque formule $\phi(x, \bar{y})$ est associé un nombre naturel n tel que l'intersection d'une famille quelconque $\{\phi(x, \bar{b}_i) : i \in I\}$ de sous-groupes de G soit celle de n d'entre eux. En particulier, les intersections des sous-groupes $\phi(x, \bar{b})$ de G forment une famille uniformément définissable.*

Preuve. La proposition 4.26 montre que les intersections finies des $\phi(x, \bar{b}_i)$ forment une famille uniformément définissable. Alors le lemme 4.25 s'applique à cette famille d'intersections finies et borne la taille de toute chaîne formée par ses membres. En particulier il existe un élément minimal qui est l'intersection de tous les $\phi(x, \bar{b}_i)$. \square

Corollaire 4.28 *Dans un groupe stable G , les centralisateurs $\{C_G(X) : X \subseteq G\}$ forment une famille uniformément définissable : il existe un nombre naturel n tel que dans tout $X \subseteq G$ il existe $\{x_1, \dots, x_k\}$ ($k \leq n$) tels que $C_G(X) = \bigcap_{i=1}^k C_G(x_i)$. Ce nombre n borne aussi les longueurs de toutes les chaînes de centralisateurs. En particulier les groupes stables sont des \mathcal{M}_C -groupes.*

Dans un groupe ω -stable ces conditions de chaîne sont plus fortes :

Proposition 4.29 *Dans un groupe ω -stable G , il n'existe pas de chaîne descendante infinie*

$$G > H_0 > \dots > H_i > \dots$$

de sous-groupes définissables.

Pour démontrer ce résultat nous avons besoin d'un résultat sur les bijections définissables que nous aurions pu démontrer plus tôt. Par contre c'est un meilleur endroit.

Lemme 4.30 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et f une bijection définissable dans \mathcal{M} de M^k vers M^l . Alors le rang de Morley de l'ensemble d'arrivée est égal à celui de l'ensemble de départ.

Preuve. Nous notons $f(\bar{x}, \bar{y})$ la formule qui définit la bijection f . Cette formule peut contenir des paramètres extraits de M , mais comme ils n'interviennent pas dans l'argumentation, nous les omettons.

Le raisonnement est par récurrence. Soient $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ et $\psi(\bar{y}, \bar{b})$ deux formules qui définissent les ensembles de départ et d'arrivée respectivement (le lemme 4.5). Nous montrerons par récurrence sur les ordinaux que si $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq \alpha$, alors $\text{RM}(\psi(\bar{y}, \bar{b})) \geq \alpha$. Comme f^{-1} est aussi une bijection définissable (pourquoi ?), la conclusion suit par symétrie.

Si $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{a})) \geq 0$, alors $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$. En particulier, si $\bar{m} \in M^k$ est tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{x}, \bar{a})[\bar{m}]$, alors $\mathcal{M} \models \exists \bar{y} (f(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \psi(\bar{y}, \bar{b}))[\bar{m}]$. Donc, $\mathcal{M} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{y}, \bar{b})$ et $\text{RM}(\psi(\bar{y}, \bar{b})) \geq 0$.

Si α est un ordinal limite, la récurrence permet de conclure. Donc nous passons au cas $\alpha = \beta + 1$. Il existe alors $\{\phi(\bar{x}, \bar{a}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ une famille de formules à paramètres dans M telles que $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{x} (\phi_i \wedge \phi_j)$ quand $i \neq j$ et que $\text{RM}(\phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)) \geq \beta$. La restriction de f à cet ensemble est une bijection définissable dont l'image est décrite par la formule $\exists \bar{x} (f(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i))$. Par récurrence, l'image est de rang au moins β . De plus, $\mathcal{M} \models \neg \exists \bar{y} (\exists \bar{x} (f(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i) \wedge \phi_j(\bar{x}, \bar{a}_j)))$. Donc l'image est de rang de Morley au moins $\beta + 1 = \alpha$. Cela finit la preuve du lemme. \square

Maintenant nous pouvons démontrer la proposition 4.29. Notons qu'une preuve utilisant un arbre de formules comme celle du théorème 4.20 est possible. Dans une telle preuve on procède par l'absurde, et l'hypothèse de l'existence d'une chaîne infinie et descendante de sous-groupes définissables permet de construire un arbre infini dont chaque branche donne un nouveau type. La construction utilise les classes modulo les sous-groupes dans la suite hypothétique. Ici nous utiliserons le rang de Morley et le lemme précédent.

Preuve de la Proposition 4.29. Le théorème 4.20 permet de faire un argument en utilisant le rang et degré de Morley. La translation à gauche ou à droite est une bijection définissable de G . Donc, le lemme 4.30 montre que si $H \leq G$ est un sous-groupe définissable, alors chaque classe Hg (ou gH) avec $g \in G$ est un sous-ensemble définissable de G de même RM que H . Comme deux classes distinctes sont disjointes, si $|G : H| = \infty$ alors $\text{RM}(G) > \text{RM}(H)$. Or chaque ensemble d'ordinaux est bien ordonné. Alors, si $H_0 > H_1 > \dots$ est une chaîne de sous-groupes définissables, il existe H_i tel que pour $j \geq i$, $\text{RM}(H_j) = \text{RM}(H_i)$. Donc, $|H_i : H_j| < \infty$. Le lemme 4.11 montre que maintenant c'est le degré qui diminue. Comme il s'agit d'un nombre naturel, cette diminution s'arrête auquel point la chaîne se stabilise. \square

Ces conditions de chaînes permettent de définir des notions de *composante connexe* réminiscentes de ce qui est rencontré dans la théorie des groupes algébriques. Si G est un groupe stable et $\phi(x, \bar{y})$ est une formule le corollaire 4.27 montre que les sous-groupes d'indice fini et définissables par une formule $\phi(x, \bar{a})$ avec paramètres provenant de G sont en nombre fini. Donc leur intersection $G^\circ(\phi)$, la *composante ϕ -connexe* de G est d'indice fini dans G . Il en découle que cette intersection est 0-définissable. En effet, l'existence d'une telle intersection implique l'existence d'un nombre k tel que si un sous-groupe $\phi(x, \bar{a})$ est d'indice supérieur à k alors il soit d'indice infini dans G . Alors nous obtenons la définition suivante pour $G^\circ(f)$:

$$\forall \bar{y} (\phi(x, \bar{y}) \wedge \text{“}\phi(x, \bar{y}) \text{ est un groupe”} \wedge \exists^{j \leq k} x_1 \dots x_j (\bigwedge_{1 \leq i_1 \neq i_2 \leq j} \neg \phi(x_{i_1}^{-1} x_{i_2}, \bar{y}) \wedge \forall z (\bigvee_{i=1}^j \phi(z^{-1} x_i, \bar{y}))))))$$

La 0-définissabilité implique que l'indice de la composante ϕ -connexe reste invariant quand on passe aux extensions élémentaires. Il en découle (comment ?) que dans les extensions élémentaires aussi le sous-groupe ainsi défini est la composante ϕ -connexe.

Dans un groupe ω -stable la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables (la Proposition 4.29) implique que l'intersection $\bigcap_\phi G^\circ(\phi)$ est aussi une intersection finie (en effet l'un des $G^\circ(\phi)$) et donc définissable et d'indice fini. Il s'agit de G° , la *composante connexe* de G . La discussion qui précède montre que G° est 0-définissable.

4.3. CONDITIONS DE CHAÎNE DANS LES GROUPES (SUITE) ; COMPOSANTES CONNEXES41

En général un groupe est dit *connexe* s'il n'a pas de sous-groupe propre, définissable et d'indice fini. Donc, dans le cas des groupes ω -stables ce phénomène est caractérisé par la condition $G = G^\circ$.

Chapitre 5

Univers rangés

Dans ce chapitre, nous étudierons une approche axiomatique au rang de Morley dans le contexte des groupes quand ce rang est fini. Cette approche était introduite par Alexandre Borovik. Bien que l'axiomatisation obtenue à partir des idées de Borovik ne caractérise pas en général le rang de Morley, elle facilite considérablement l'application des méthodes de la théorie des groupes dans l'étude des groupes de rang de Morley fini. Cela a été à l'origine des avancées importantes concernant les liens entre la théorie des modèles et la théorie des groupes dans les dernières années. Nous commençons par l'étude d'une notion de la théorie des modèles dont l'importance va bien au delà des liens avec les groupes.

5.1 Interprétabilité

L'*interprétabilité* est une notion fondamentale à la théorie des modèles et elle généralise la notion de définissabilité que nous avons étudiée dans le chapitre 4. Avant de donner des définitions formelles, il semble utile de mentionner un exemple naturel.

Exemple intuitif : Nous pouvons interpréter le corps de nombres complexes dans le corps des nombres réels. La représentation cartésienne n'est qu'une illustration géométrique de ce phénomène. En effet, comme nous le connaissons bien il existe une bijection de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{C} qui associe à chaque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le nombre complexe $a + bi$ ($i^2 = -1$). De plus, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes cette *coordinatisation* permet de calculer leur produit et leur somme. Si z_i ($i = 1, 2$) correspond à (a_i, b_i) , alors

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

et

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

D'une certaine manière cela montre que le corps des nombres complexes est présent dans le corps des réels. Son ensemble de base est définissable dans la structure $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$, de même que ses opérations et éléments distingués. Vous pouvez essayer de voir si une présence inverse, celle des réels dans le corps des complexes est possible. La réponse est négative.

Nous introduisons, suivant Hodges, une définition et un certain formalisme qui semble être un bon cadre pour l'étude des propriétés générales de la notion d'interprétabilité. Par contre, en pratique nous utiliserons la caractérisation de la proposition 5.2. Cette caractérisation est utilisée comme la définition de l'interprétabilité dans certaines sources dont le livre de Borovik et Nesin sur les groupes de rang de Morley fini.

Définition 5.1 Soient \mathcal{K} et \mathcal{L} deux langages du premier ordre, \mathcal{A} une \mathcal{K} -structure et \mathcal{B} une \mathcal{L} -structure. Nous fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Une interprétation n -dimensionnelle Γ de \mathcal{B} dans \mathcal{A} est formée par les trois ingrédients suivants :

1. Une \mathcal{K} -formule $\delta_\Gamma(x_0, \dots, x_{n-1})$;
2. pour toute \mathcal{L} -formule atomique $\phi(x_0, \dots, x_{m-1})$ de l'une des formes suivantes :
 - $x = y$,
 - $x = c$ (c est un symbole de constante),
 - $f(\bar{x}) = y$ (f est un symbole de fonction),
 - $R(\bar{x})$ (R est un symbole de relation)
 une \mathcal{K} -formule $\phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1})$ où $\bar{x}_i = (x_{i,0}, \dots, x_{i,n-1})$;
3. une surjection $f_\Gamma : \delta_\Gamma(A^n) \longrightarrow B$ telle que pour toute \mathcal{L} -formule atomique $\phi(x_0, \dots, x_{m-1})$ de la forme susmentionnée et $\bar{a}_i \in \delta_\Gamma(A^n)$ ($0 \leq i \leq m-1$),

$$\mathcal{B} \models \phi(f_\Gamma(\bar{a}_0), \dots, f_\Gamma(\bar{a}_{m-1})) \text{ si et seulement si } \mathcal{A} \models \phi_\Gamma(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{m-1})$$

La fonction f_Γ est la coordinatisation associée à l'interprétation Γ .

Exemples : 1. Nous pouvons maintenant étudier les corps des réels et des complexes plus rigoureusement. Nous utiliserons la notation de la définition 5.1. Les langages \mathcal{K} et \mathcal{L} sont le même, celui des corps. Nous avons comme \mathcal{K} -structure

$$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$$

et comme \mathcal{L} -structure

$$\mathcal{B} = (\mathbb{C}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$$

$\delta_\Gamma(x_0, x_1)$ est la formule

$$(x_0 = x_0) \wedge (x_1 = x_1)$$

En ce qui concerne les formules atomiques comme celles dans la définition 5.1, nous avons

$$=_\Gamma(x_{00}, x_{01}; x_{10}, x_{11}) := (x_{00} = x_{10}) \wedge (x_{01} = x_{11})$$

$$+_\Gamma(x_{00}, x_{01}; x_{10}, x_{11}; x_{20}, x_{21}) := (x_{20} = x_{00} + x_{10}) \wedge (x_{21} = x_{01} + x_{11})$$

$$\cdot_\Gamma(x_{00}, x_{01}; x_{10}, x_{11}; x_{20}, x_{21}) := (x_{20} = x_{00} \cdot x_{10} - x_{01} \cdot x_{11}) \wedge (x_{21} = x_{00} \cdot x_{11} + x_{01} \cdot x_{10})$$

Les égalités contenant les symboles de constantes ($x = 0$ et $x = 1$) ne changent pas puisque $\mathcal{K} = \mathcal{L}$. Finalement, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f_\Gamma(a, b) = z$ où $z = a + ib$.

2. Le deuxième exemple aussi est bien connu : les rationnels seront interprétés dans les entiers.

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$$

$$\begin{aligned} \delta_\Gamma(x_0, x_1) &:= x_1 \neq 0 \\ =_\Gamma(x_{00}, x_{01}; x_{10}, x_{11}) &:= x_{00} \cdot x_{11} = x_{01} \cdot x_{10} \\ +_\Gamma(x_{00}, x_{01}; x_{10}, x_{11}; x_{20}, x_{21}) &:= x_{21} \cdot (x_{00} \cdot x_{11} + x_{01} \cdot x_{10}) = x_{01} \cdot x_{11} \cdot x_{20} \\ \cdot_\Gamma(x_{00}, x_{01}; x_{10}, x_{11}; x_{20}, x_{21}) &:= x_{21} \cdot x_{00} \cdot x_{10} = x_{20} \cdot x_{01} \cdot x_{11} \end{aligned}$$

La coordinatisation $f_\Gamma : \mathbb{Z}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ est une surjection mais pas une bijection. Par contre, les fibres correspondent aux classes d'une relation d'équivalence bien connue qui est exprimée par la formule $=_\Gamma$. Nous verrons que ce n'est pas une coïncidence.

3. *Réduits* : Les réduits sont des exemples d'interprétations. On commence avec un langage \mathcal{K} et une \mathcal{K} -structure \mathcal{A} . On enlève une partie de \mathcal{K} pour obtenir \mathcal{L} . La \mathcal{L} -structure \mathcal{B} correspondant est le réduit de \mathcal{A} à ce langage. Nous avons les données suivantes toujours en utilisant la notation de la définition 5.1 : L'ensemble de base $\delta_\Gamma(x)$ est celui de la structure entière : $x = x$. Au niveau des formules atomiques rien ne change sauf ce qui est perdu. Finalement f_Γ est l'application identité de A vers A .

4. *Réduits relatifs à une formule* : Cet exemple est une généralisation du précédent. \mathcal{L} est obtenu de \mathcal{K} comme dans l'exemple précédent. Supposons que $P(x)$ soit une formule du premier ordre dans le langage \mathcal{K} dont la restriction aux éléments de \mathcal{L} est fermée par rapport aux fonctions dans \mathcal{L} . Nous posons $\delta_\Gamma(x_0, \dots, x_{n-1}) = P(x_0, \dots, x_{n-1})$. La coordinatisation est l'inclusion de l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que $\mathcal{A} \models P[a]$ dans A .

4. Nous avons rencontré l'un des exemples les plus importants pour ce cours dans le premier chapitre. Nous avons interprété un corps dans un groupe résoluble. Nous y retournerons, mais c'est un bon exercice d'écrire les détails de l'exemple de la section 1.3.

5. *Plans projectifs* : Soit $\mathcal{L} = \{P, L, I\}$ où P et L sont des symboles de relations unaires et I est un symbole de relation binaire. Un *plan projectif* est un modèle des énoncés suivants :

PP1 Chaque élément est un point ou une droite. I est une relation d'incidence entre points et droites.

$$\begin{aligned} \forall x((P(x) \wedge \neg L(x)) \vee (\neg P(x) \wedge L(x))) \\ \forall xy(I(x, y) \rightarrow (P(x) \wedge L(y))) \end{aligned}$$

PP2 A travers deux points distincts passe une droite et une seule.

$$\forall xy((P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \exists z(L(z) \wedge I(x, z) \wedge I(y, z) \wedge \forall t(L(t) \wedge I(x, t) \wedge I(y, t) \rightarrow t = z)))$$

PP3 Deux droites distinctes s'intersectent à un point et un seul.

$$\forall xy((L(x) \wedge L(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \exists z(P(z) \wedge I(x, z) \wedge I(y, z) \wedge \forall t(P(t) \wedge I(x, z) \wedge I(y, z) \rightarrow t = z)))$$

PP4 Il existe 4 points dont aucun sous-ensemble à trois éléments ne sont sur une même droite.

$$\begin{aligned} \exists x_1 x_2 x_3 x_4 (\forall t(L(t) \rightarrow \neg((I(x_1, t) \wedge I(x_2, t) \wedge I(x_3, t)) \\ \vee (I(x_1, t) \wedge I(x_2, t) \wedge I(x_4, t)) \\ \vee (I(x_1, t) \wedge I(x_3, t) \wedge I(x_4, t)) \\ \vee (I(x_2, t) \wedge I(x_3, t) \wedge I(x_4, t)))) \end{aligned}$$

Soit K un corps (il n'est pas nécessaire que K soit commutatif). On peut interpréter un plan projectif \mathbb{P} dans K . En effet si K^3 considéré comme un K -espace vectoriel, alors les sous-espaces de dimension 1 sont les points et les sous-espaces de dimension 2 sont les droites d'un plan projectif. Nous pouvons mettre cela dans le formalisme de la définition 5.1. C'est ce que nous montrons maintenant. Dans la notation de la définition 5.1 \mathcal{K} sera le langage des corps et $\mathcal{A} = (K, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} \delta_\Gamma(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= \\ ((x_0 \neq 0 \vee x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0) \wedge (x_3 = 0 \wedge x_4 = 0 \wedge x_5 = 0)) &\wedge \\ \vee & \\ ((x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge x_3 = 0) \wedge (x_3 \neq 0 \vee x_4 \neq 0 \vee x_5 \neq 0)) &\wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =_\Gamma((x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)) &:= \\ \left(\bigwedge_{i=0}^2 (x_i = y_i \wedge y_i = 0)\right) \vee \left(\bigwedge_{i=3}^5 (x_i = y_i \wedge y_i = 0)\right) &\wedge \exists z(z \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=0}^5 (y_i = zx_i)) \end{aligned}$$

$$P_\Gamma(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := (x_0 \neq 0 \vee x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0) \wedge (x_3 = 0 \wedge x_4 = 0 \wedge x_5 = 0)$$

$$L_\Gamma(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := (x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge x_3 = 0) \wedge (x_3 \neq 0 \vee x_4 \neq 0 \vee x_5 \neq 0)$$

$$I_{\Gamma}(x_0, x_1, x_2, 0, 0, 0; 0, 0, 0, x_3, x_4, x_5) := x_0x_3 + x_1x_4 + x_2x_5 = 0$$

La coordinatisation f_{Γ} est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} f_{\Gamma} & : & \delta_{\Gamma}(K^6) \longrightarrow \mathbb{P} \\ & & (a, b, c, 0, 0, 0) \longmapsto \{\lambda(a, b, c) : \lambda \in K^*\} \\ & & (0, 0, 0, a, b, c) \longmapsto \{(x, y, z) \in K^3 : ax + by + cz = 0\} \end{array}$$

Notons que dans cet exemple nous avons commencé avec un plan projectif qui était par hypothèse donné par un corps, ou coordinatisé par un corps. Ce que nous avons fait était de mettre ce lien dans le contexte de l'interprétabilité. Par contre il existe des plans projectifs qui n'ont pas ce genre de liens avec un corps.

Essayons de justifier la remarque que nous avons faite à la fin de l'exemple 2 sur les fibres. Cela nous donnera une caractérisation de l'interprétabilité qui la rend plus naturelle surtout dans le contexte des groupes.

Proposition 5.2 *Soient \mathcal{K} et \mathcal{L} deux langages du premier ordre, \mathcal{A} une \mathcal{K} -structure et \mathcal{B} une \mathcal{L} -structure. Alors, \mathcal{B} est interprétable dans \mathcal{A} si et seulement s'il existe un ensemble 0-définissable $S \subseteq A^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dans \mathcal{A} , une relation d'équivalence E 0-définissable dans \mathcal{A} sur les n -uples de S telle qu'il existe une bijection entre S/E et B qui préserve la structure au sens de la définition 5.1.*

Preuve. Soit Γ une interprétation n -dimensionnelle de \mathcal{B} dans \mathcal{A} . Nous utiliserons la notation de la définition 5.1. L'ensemble S est $\delta_{\Gamma}(A^n)$. La formule $E(\bar{x}, \bar{y})$ définie par $\delta_{\Gamma}(\bar{x}) \wedge \delta_{\Gamma}(\bar{y}) \wedge =_{\Gamma}(\bar{x}, \bar{y})$ est une relation d'équivalence définissable sans paramètres. La surjection f_{Γ} qui coordinatise \mathcal{B} est constante sur les classes d'équivalences de E . En effet $\mathcal{A} \models E(a_0, \dots, a_{n-1}; b_0, \dots, b_{n-1})$ si et seulement si $\mathcal{B} \models f_{\Gamma}(a_0, \dots, a_{n-1}) = f_{\Gamma}(b_0, \dots, b_{n-1})$ d'après la condition 3 de la définition 5.1. Donc il existe une bijection entre les éléments de B et les classes d'équivalence dans $\delta_{\Gamma}(A^n)/E$ et ce fait d'être constant sur les fibres assure que les relations et fonctions soient préservées.

Quant à la suffisance de la condition, soient S et E comme dans l'énoncé. Nous devons trouver une interprétation Γ de \mathcal{B} dans \mathcal{A} à partir de S et de E . Nous posons $\delta_{\Gamma}(x_0, \dots, x_{n-1}) = S(x_0, \dots, x_{n-1})$ et $=_{\Gamma}(\bar{x}, \bar{y})$ est défini par $E(\bar{x}, \bar{y})$. La coordinatisation de f_{Γ} associe à chaque élément (a_0, \dots, a_{n-1}) de S sa classe par rapport à E . L'hypothèse de la préservation de la structure assure qu'une formule ϕ_{Γ} existe pour chaque formule atomique de type mentionné dans la définition 5.1. \square

Dans la proposition 5.2, nous avons supposé la relation d'équivalence 0-définissable. Pour régler celles qui nécessitent des paramètres, on peut ajouter les paramètres nécessaires pour la définition au langage et répéter tout ce qui précède.

La proposition 5.2 rend plus naturel l'exemple suivant dans le contexte des groupes :

Exemple : *Sections définissables* Soient G un groupe et H et K deux sous-groupes tels que $K \leq H$. Si H et K sont définissables dans G alors H/K est une structure interprétable dans G . La relation d'équivalence "être dans la même classe de K " est définissable puisque K est définissable.

Si en plus $K \triangleleft H$ alors H/K est un groupe interprétable dans G . En général si $K \triangleleft H$, H/K est dit une *section* de G . Si H et K sont définissables on dit que H/K est une *section définissable* bien qu'il s'agisse plutôt d'une structure interprétable.

Définition 5.3 *Soit \mathcal{A} une \mathcal{L} -structure. Si X est un ensemble définissable dans \mathcal{A} est que E est une relation d'équivalence définissable sur A , alors X/E est dit un ensemble interprétable dans \mathcal{A} . En d'autres termes, un ensemble interprétable est l'ensemble sous-jacent d'une structure interprétable.*

Dans chaque définition concernant l'interprétabilité, si la coordinatisation est injective, en d'autres termes la relation d'équivalence correspondant aux fibres est l'égalité dans la structure

dans laquelle une autre structure est interprétée alors nous avons une structure définissable. Dans le cas des ensembles nous obtenons la notion d'ensemble définissable. Plus correctement, nous retrouvons cette notion puisque il s'agit de la même définissabilité que dans la section 4.1.

Notre objectif dans le reste de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.4 *Soient \mathcal{K} et \mathcal{L} des langages du premier ordre, \mathcal{A} une \mathcal{K} -structure et \mathcal{B} une \mathcal{L} -structure. Si \mathcal{B} est interprétable dans \mathcal{A} et que $\text{Th}(\mathcal{A})$ est ω -stable, alors $\text{Th}(\mathcal{B})$ est ω -stable aussi. Si de plus $\text{Th}(\mathcal{A})$ est de rang de Morley fini, alors de même pour $\text{Th}(\mathcal{B})$.*

Avant d'arriver à la preuve de ce résultat qui sera un raisonnement par récurrence sur le rang des sous-ensembles définissables, il faudra faire une préparation. Nous étendons d'abord la condition 2 de la définition 5.1 à toutes les formules de \mathcal{L} .

Théorème 5.5 *Soient \mathcal{K} , \mathcal{L} , \mathcal{A} , \mathcal{B} et f_Γ comme dans la définition 5.1. Alors pour toute formule $\phi(\bar{x})$ du langage \mathcal{L} il existe une formule $\phi_\Gamma(\bar{x})$ du langage \mathcal{K} telle que pour tout élément $\bar{a} \in \delta_\Gamma(A^n)$*

$$\mathcal{B} \models \phi(f_\Gamma(\bar{a})) \text{ si et seulement si } \mathcal{A} \models \phi_\Gamma(\bar{a})$$

Preuve. La preuve de ce théorème est par récurrence sur la complexité des \mathcal{L} -formules. La récurrence est amorcée par la condition 3 de la définition 5.1. Les formules ϕ_Γ plus complexes sont obtenues en appliquant les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} (\neg\phi)_\Gamma &= \neg(\phi_\Gamma) \\ (\phi_1 \wedge \phi_2)_\Gamma &= (\phi_1)_\Gamma \wedge (\phi_2)_\Gamma \\ (\phi_1 \vee \phi_2)_\Gamma &= (\phi_1)_\Gamma \vee (\phi_2)_\Gamma \\ (\forall y\phi)_\Gamma &= \forall x_0 \dots x_{n-1} (\delta_\Gamma(x_0, \dots, x_{n-1}) \rightarrow \phi_\Gamma) \\ (\exists y\phi)_\Gamma &= \exists x_0 \dots x_{n-1} (\delta_\Gamma(x_0, \dots, x_{n-1}) \wedge \phi_\Gamma) \end{aligned}$$

□

Le théorème 5.5 nous permettra d'étudier les interprétations dans les extensions élémentaires de \mathcal{A} . Certainement, l'objectif est d'arriver à une conclusion qui dira que l'interprétation dans une extension élémentaire de \mathcal{A} qui utilise les données de l'interprétation Γ correspond à une extension élémentaire de \mathcal{B} . Cela justifie l'usage de la lettre Γ qui jusqu'à maintenant n'a joué aucun rôle sauf celui d'un indice accessoire qui nomme un certain phénomène. Or Γ est un foncteur. Nous n'étudierons pas les détails de cet aspect catégorique qui vont bien au delà de notre sujet. Néanmoins nous noterons $\Gamma(\mathcal{A})$ la structure qui est interprétée dans \mathcal{A} par l'interprétation Γ pour rendre plus clairs les passages aux extensions élémentaires. En particulier, selon notre notation jusqu'à présent $\Gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Avant d'étudier les passages aux extensions élémentaires nous devons vérifier que chaque fois que nous avons les données d'une interprétation Γ dans une \mathcal{K} -structure \mathcal{A} il existe une \mathcal{L} -structure \mathcal{B} dont Γ est l'interprétation dans \mathcal{A} . Cette vérification justifiera la notation $\Gamma(\mathcal{A})$ du dernier paragraphe. Précisons ce que nous entendons par "les données d'une interprétation Γ ". Chaque fois qu'une \mathcal{L} -structure \mathcal{B} est interprétée dans une \mathcal{K} -structure \mathcal{A} par une interprétation Γ (nous continuons d'utiliser la notation de la définition 5.1), certaines conditions exprimées par des énoncés du premier ordre dans \mathcal{L} sont vraies dans \mathcal{A} indépendamment de \mathcal{A} et de \mathcal{B} . Elles sont vraies pour la seule raison que Γ est une interprétation. Il s'agit des conditions suivantes :

1. $=_\Gamma$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $\delta_\Gamma(A^n)$ qui sert de base à la structure interprétée,
2. Pour toute formule atomique ϕ de \mathcal{L} comme dans la condition 2 de la définition 5.1, si $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{m-1}$ sont $=_\Gamma$ -équivalents à $\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{m-1}$ respectivement, en d'autres termes $\mathcal{A} \models =_\Gamma(\bar{a}_i, \bar{b}_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$, alors $\mathcal{A} \models \phi_\Gamma(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{m-1})$,

3. Pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(x)$ de la forme $x = c$ où c est un symbole de constante dans \mathcal{L} , il existe un élément \bar{a} dans $\delta_\Gamma(A^n)$ telle que pour tout $\bar{b} \in \delta_\Gamma(A^n)$, $\mathcal{A} \models \phi_\Gamma(\bar{b})$ si et seulement si $\mathcal{A} \models_{=\Gamma} (\bar{a}, \bar{b})$,
4. Pour toute \mathcal{L} -formule de la forme $\phi(\bar{x}) f(\bar{x}) = c$ où c est un symbole de constante et f est un symbole de fonction dans \mathcal{L} , il existe un élément \bar{a} dans $\delta_\Gamma(A^n)$ telle que pour tout $\bar{b} \in \delta_\Gamma(A^n)$, $\mathcal{A} \models \phi_\Gamma(\bar{b})$ si et seulement si $\mathcal{A} \models_{=\Gamma} (\bar{a}, \bar{b})$.

Notons que ces conditions ne mentionnent pas la coordinatisation qui est d'ailleurs complètement déterminée par la condition 1. Cela était visible dans la preuve de la proposition 5.2 et deviendra clair dans le théorème 5.6. Ces conditions sont les *données de l'interprétation* Γ et leur caractère indépendant du choix de structure permet le passage aux extensions :

Théorème 5.6 *Soient $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \Gamma, \delta_\Gamma(x_0, \dots, x_{n-1})$ et \mathcal{A} comme dans la définition 5.1. En particulier, nous avons les données de l'interprétation Γ décrites ci-dessus. Alors il existe une structure \mathcal{B} interprétable dans \mathcal{A} avec une coordinatisation $f_\Gamma : \delta_\Gamma(A^n) \rightarrow B$.*

Preuve. L'ensemble de base de la structure \mathcal{B} est $\delta_\Gamma(A^n)/_{=\Gamma}$, en d'autres termes pour $\bar{a}, \bar{a}' \in \delta_\Gamma(A^n)$ \bar{a} est équivalent \bar{a}' si et seulement si $\mathcal{A} \models_{=\Gamma} (\bar{a}, \bar{a}')$. La première condition ci-dessus montre que c'est une relation d'équivalence. La coordinatisation est l'application qui associe à chaque $\bar{a} \in \delta_\Gamma(A^n)$ la classe d'équivalence de \bar{a} par rapport à $_{=\Gamma}$. C'est une application surjective.

Quant à la définition de la structure sur l'ensemble de base, pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{L}$, pour tous $\bar{a}_0/_{=\Gamma}, \dots, \bar{a}_{m-1}/_{=\Gamma} \in B$ ($\bar{a}_0/_{=\Gamma}, \dots, \bar{a}_{m-1}/_{=\Gamma} \in R^{\mathcal{B}}$ si et seulement si $\mathcal{A} \models R_\Gamma(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{m-1})$). On fait de même pour les symboles de fonction et les formules contenant des constantes, toujours en utilisant les conditions ci-dessus. Par construction f_Γ est une coordinatisation au sens de la définition 5.1. Nous avons construit la structure $\Gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. \square

Théorème 5.7 *Soient $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \Gamma$ et \mathcal{A} comme dans la définition 5.1. Si \mathcal{A}' est une extension élémentaire de \mathcal{A} alors $\Gamma(\mathcal{A}')$ est une extension élémentaire de $\Gamma(\mathcal{A})$.*

Preuve. Ce théorème est en effet un corollaire du théorème 5.5, des données de l'interprétation Γ et du théorème 5.6. Pour tout $\bar{a}, \bar{a}' \in \delta_\Gamma(A^n)$, $\mathcal{A} \models_{=\Gamma} (\bar{a}, \bar{a}')$ si et seulement si $\mathcal{A}' \models_{=\Gamma} (\bar{a}, \bar{a}')$ comme $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}'$. Donc il existe un plongement $\Gamma(\mathcal{A})$ vers $\Gamma(\mathcal{A}')$. Ce plongement est élémentaire puisque

$$\Gamma(\mathcal{A}) \models \phi_\Gamma(\bar{a}) \text{ si et seulement si } \mathcal{A} \models \phi_\Gamma(\bar{a}) \text{ si et seulement si}$$

$$\mathcal{A}' \models \phi_\Gamma(\bar{a}) \text{ si et seulement si } \Gamma(\mathcal{A}') \models \phi_\Gamma(\bar{a})$$

La première équivalence est par le théorème 5.5, la deuxième par l'inclusion élémentaire de \mathcal{A} dans \mathcal{A}' et la dernière par les théorèmes 5.5 et 5.6. \square

Le résultat suivant est crucial pour la preuve du théorème 5.4 :

Théorème 5.8 *Soient \mathcal{K} et \mathcal{L} deux langages du premier ordre, \mathcal{A} une \mathcal{K} -structure, et Γ une interprétation n -dimensionnelle ($n \in \mathbb{N}^*$) dans \mathcal{A} . Alors si \mathcal{A} est ω -saturée, il en est de même pour $\Gamma(\mathcal{A})$.*

Preuve. Nous continuerons d'utiliser la même notation concernant les interprétations. Soient X un sous-ensemble fini de $\Gamma(\mathcal{A})$ et $\Phi(\bar{x})$ est un ensemble de formules dont les variables libre sont parmi $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ dans le langage \mathcal{L}_X . Nous supposons $\Phi(\bar{x})$ consistant avec $\text{Th}(\mathcal{B})$.

Comme f_Γ est une surjection, pour tout $b \in X$ il existe un n -uplet \bar{a}_b dans $\delta_\Gamma(A^n)$ tel que $f_\Gamma(\bar{a}_b) = b$. Le sous-ensemble Y de A formé par les coordonnées des \bar{a}_b ainsi obtenus est un ensemble fini.

Maintenant nous définissons, en utilisant le théorème 5.5 nous définissons

$$\Phi_\Gamma(\bar{y}) = \{\phi_\Gamma(\bar{y}, \bar{a}_{\bar{x}}) : \phi(\bar{x}, \bar{b}) \in \Phi(\bar{x})\}$$

Nous montrerons que $\Phi_\Gamma(\bar{y})$ est consistant avec $\text{Th}(\mathcal{A})$. Le théorème 5.5 montre que pour $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in \Phi(\bar{x})$,

$$\text{pour tout } \bar{c} \in \delta_\Gamma(A^n), \quad \Gamma(\mathcal{A}) \models \phi(f_\Gamma(\bar{c}), \bar{b}) \leftrightarrow \mathcal{A} \models \phi_\Gamma(\bar{c}, \bar{a}_{\bar{c}})$$

Il découle de cela et de la consistance de $\Phi(\bar{x})$ que les sous-ensembles finis de $\Phi_\Gamma(\bar{y})$ sont réalisables dans \mathcal{A} . Donc $\Phi_\Gamma(\bar{y})$ est consistant et réalisé dans \mathcal{A} par un certain \bar{c} . Alors $f_\Gamma(\bar{c})$ réalise $\Phi(\bar{x})$ par le théorème 5.5. \square

Preuve du théorème 5.4. Soit Γ une interprétation n -dimensionnelle de \mathcal{B} dans \mathcal{A} . Nous utiliserons la notation de la définition 5.1. L'objectif est de montrer que pour toute \mathcal{L} -formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et \bar{a} extrait de la structure A ,

$$\text{RM}_\mathcal{B}(\phi(x_0, \dots, x_{m-1}, f_\Gamma(\bar{a}))) \leq \text{RM}_\mathcal{A}(\phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a}))$$

Les théorèmes 5.7 et 5.8 nous permettent de supposer \mathcal{A} et \mathcal{B} ω -saturés. En remplaçant $\phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a})$ par

$$\delta_\Gamma(\bar{x}_0) \wedge \dots \wedge \delta_\Gamma(\bar{x}_{m-1}) \wedge \phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a})$$

nous supposons que $\phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a})$ définit un sous-ensemble de $\delta_\Gamma(A^n)^m$. Notre but est de montrer que si $\text{RM}_\mathcal{B}(\phi(\bar{x}, f_\Gamma(\bar{a}))) \geq \alpha$ alors $\text{RM}_\mathcal{A}(\phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a})) \geq \alpha$. Le raisonnement est par récurrence sur $\text{RM}_\mathcal{B}(\phi(x_0, \dots, x_{m-1}, f_\Gamma(\bar{a})))$. Nous posons $\bar{x} = (x_0, \dots, x_{m-1})$.

$\text{RM}_\mathcal{B}(\phi(\bar{x}, f_\Gamma(\bar{a}))) \geq 0$ si et seulement si $\mathcal{B} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, f_\Gamma(\bar{a}))$. Le théorème 5.5 implique alors que $\mathcal{A} \models \exists \bar{x}_0 \dots \bar{x}_{m-1} \phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a})$. Donc $\text{RM}(\phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a})) \geq 0$. Nous passons au cas d'un ordinal successeur et posons $\alpha = \beta + 1$. Il existe une famille de \mathcal{L} -formules $\{\psi(\bar{x}, \bar{b}_i) : i \in \mathbb{N}\}$ avec paramètres extraits de B telles que

$$\text{RM}_\mathcal{B}(\phi(\bar{x}, f_\Gamma(\bar{a})) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{b}_i)) \geq \beta$$

et

$$\mathcal{B} \models \forall \bar{x} (\phi(\bar{x}, f_\Gamma(\bar{a})) \rightarrow \neg(\psi_i(\bar{x}, \bar{b}_i) \wedge \psi_j(\bar{x}, \bar{b}_j)) \quad (i \neq j))$$

Soit $\bar{a}_i \in \delta_\Gamma(A^n)$ tel que $f_\Gamma(\bar{a}_i) = \bar{b}_i$. Par le théorème 5.5 et par récurrence

$$\text{RM}_\mathcal{A}(\phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a}) \wedge (\psi_i)_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a}_i)) \geq \beta$$

La condition d'être deux à deux disjoints se traduit en \mathcal{A} en utilisant le théorème 5.5 : pour $i \neq j$

$$\mathcal{A} \models \forall \bar{x}_0 \dots \bar{x}_{m-1} (\phi_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a}) \rightarrow \neg((\psi_i)_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a}_i) \wedge (\psi_j)_\Gamma(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, \bar{a}_j)))$$

Cela finit la preuve. \square

Le théorème 5.4 a une conséquence importante. Quand nous parlons d'une certaine structure ω -stable, nous pouvons la considérer comme une partie interprétable dans une plus grande structure ω -stable. Dans la suite nous parlerons de plus en plus fréquemment des groupes. Jusqu'à maintenant nous avons étudié les groupes plutôt comme des \mathcal{L} -structures où \mathcal{L} est le langage des groupes. Or à partir de maintenant, au moins quand il s'agit des groupes ω -stables, nous sommes en position d'appeler ω -stable tout groupe interprétable dans une structure ω -stable. De même pour les corps... Ceci n'est pas sans effet, car la structure ambiante dans laquelle notre groupe est interprété peut permettre de définir de nouveaux ensembles dans notre groupe qui ne seraient pas définissables à partir du seul langage de groupe. La possible existence de telles définitions est à l'origine d'un bon nombre de problèmes très difficiles en théorie des modèles. Nous reviendrons sur ce sujet plus tard et pour le moment nous nous contentons d'introduire un morceau de terminologie. Nous dirons qu'un groupe (corps) est *pur* quand celui n'est considéré que dans le langage des groupes (corps).

5.2 Le rang rk

La notion centrale de la section 5.1 était celle de structure interprétable. Or, en compagnie de cela, nous avons introduit la notion d'ensemble interprétable qui est formé par les classes d'une relation d'équivalence définissable sur un ensemble définissable. L'ensemble de base d'une structure interprétable est donc un ensemble interprétable. Une autre remarque immédiate à propos des ensembles interprétables est que les ensembles définissables forment le cas particulier dans lequel la relation d'équivalence est l'égalité.

La proposition 5.2 montre que les structures interprétables dans une structure \mathcal{y} sont d'une certaine manière présentes. La même observation est vraie pour les ensemble interprétables aussi. Donc, à partir de maintenant nous considérerons une structure non seulement avec les ensembles définissables qui y sont présents mais aussi les ensembles interprétables. On peut en effet construire une structure plus large contenant tous les ensembles interprétables (donc qui inclut les "quotients") mais cela nécessite certaines technicités que nous préférons éviter pour le moment. Par contre tant que l'on considère des ensembles interprétables individuellement la discussion de la première section montre qu'on peut les traiter comme une partie de notre univers.

Dans ce contexte, nous utiliserons les appellations *fonctions*, *relations interprétables* aussi. Comme dans le cas des ensembles définissables, il s'agit des fonctions ou relations dont les ensembles de base sont interprétables dans la structure donnée.

Rappelons certaines propriétés fondamentales des ensembles interprétables. Evidemment, ces propriétés doivent être vérifiées en utilisant les outils techniques introduits dans la section 5.1. C'est un exercice.

1. L'ensemble des ensembles interprétables est clos par rapport aux opérations booléennes conjonction, disjonction, négation.
2. Le produit cartésien de deux ensembles interprétables est interprétable. Les projections canoniques du produit cartésien de deux ensembles interprétables sont interprétables.
3. Les ensembles finis sont interprétables.
4. Si on quotiente un ensemble interprétable par une relation d'équivalence interprétable on obtient un nouvel ensemble interprétable.

Maintenant nous introduirons une notion de rang de sur les ensembles interprétables d'une structure. Fixons notre notation. Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure. Nous voulons souligner que la définition que nous donnerons sera par rapport à \mathcal{M} , non par rapport à $\text{Th}(\mathcal{M})$. C'est un défaut quand on veut passer aux extensions élémentaires sauf si l'on connaît le comportement du rang par rapport à ces passages (voir le lemme 4.7 1), mais c'est aussi l'une des motivations centrales. Cette notion de rang était introduite pour éviter le plus possible le passage à d'autres structures élémentairement équivalentes.

Définition 5.9 Une fonction rk de l'ensemble des ensembles interprétables dans une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} vers \mathbb{N} sera dite une fonction de rang si elle satisfait les hypothèses suivantes :

- A** Si A est un ensemble interprétable dans \mathcal{M} , alors $\text{rk}(A) \geq n + 1$ si et seulement si A contient une infinité de sous-ensembles interprétables $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ deux à deux disjoints de rang au moins n .
- B** Si A et B sont interprétables dans \mathcal{M} et f est une fonction interprétable de A vers B , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{b \in B : \text{rk}(f^{-1}(b)) = n\}$ est interprétable dans \mathcal{M} .
- C** Si f est une surjection interprétable de A sur B et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{rk}(f^{-1}(b)) = n$ pour tout $b \in B$, alors $\text{rk}(A) = \text{rk}(B) + n$.
- D** Soient A, B deux ensembles interprétables dans \mathcal{M} et f une fonction de A vers B . Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $b \in B$ l'ensemble $f^{-1}(b)$ est infini dès lors qu'il contient au moins m éléments.

Il nous a fallu une étude détaillée et longue pour montrer qu'une structure interprétable dans une structure ω -stable est ω -stable. En ce qui concerne les structures rangées par le rang rk

c'est une conclusion immédiate des définitions : une structure interprétable dans une structure rangée est rangée.

L'axiome **A** implique la fonction rk admette les mêmes valeurs que RM sur une même structure tant que le rang de Morley est fini. Par contre cela ne veut pas dire qu'une structure rangée par rk soit de rang de Morley fini. Etre de rang de Morley fini ou plus généralement ω -stable est plutôt la propriété d'une théorie complète ou de l'un de ses modèles ω -saturés. Il existe d'ailleurs des structures qui ne sont pas ω -stables mais qui admettent une fonction de rang rk . Par contre le théorème suivant, que nous ne démontrerons pas, est vrai

Théorème 5.10 (Burdges-Cherlin, 2001) *La théorie d'une structure rangée par la fonction rk est stable.*

Burdges et Cherlin ont démontré un résultat encore plus fort mais cela exige plus de terminologie.

Dans le sens inverse, même si la théorie d'une structure est de rang de Morley fini, il n'est pas nécessaire que l'un de ses modèles soit rangé par rk . Les axiomes **B**, **C**, **D** ne sont pas des propriétés satisfaites par toutes les structures de rang de Morley fini.

Un exemple de structure de rang de Morley fini qui admet aussi le rang rk est un corps algébriquement clos en une caractéristique donnée (le langage est celui des corps). Nous avons déjà montré que $\text{RM}(x = x) = 1$ en faisant un argument qui ne dépendait pas du modèle fixé pour faire le calcul (ω -saturé ou non). Donc $\text{rk}(x = x) = 1$ pour un modèle fixé. Quant aux axiomes **B**, **C**, **D**, leurs vérifications, tant en utilisant des méthodes de la géométrie algébrique que des méthodes de la théorie des modèles ne sont pas triviales et nécessitent des notions qui vont au delà de ce cours. Cela n'empêche pas que les corps algébriquement clos forment l'une des sources les plus importantes d'exemples de structures rangées par le rang rk . D'ailleurs les corps algébriquement clos ne sont pas un exemple accidentel. Ceci est une conséquence du théorème suivant :

Théorème 5.11 (Poizat, 1987) *Un groupe est rangé par rk si et seulement s'il est de rang de Morley fini.*

Ce théorème sera admis. Sa preuve nécessite des méthodes beaucoup plus avancées que ce que nous sommes capables de donner dans ce cours. Par contre nous démontrerons une de ses étapes fondamentales qui est le théorème des indécomposables de Zil'ber. L'utilité pratique du théorème 5.11 est énorme. D'un côté la fonction rk nous dit que dans un groupe il n'est plus nécessaire de chercher les modèles ω -saturés au moins pour vérifier que le groupe est de rang de Morley fini, de l'autre nous pouvons utiliser toutes les propriétés de RM dans un groupe rangé par rk ce qui serait impossible sans le théorème 5.11.

Finissons cette section avec une remarque à propos des groupes algébriques. Un groupe algébrique G sur un corps algébriquement clos K est interprétable dans K . Son ensemble de base est soit un ensemble de zéros d'un ensemble fini de polynômes soit un quotient par une relation d'équivalence finie d'un tel ensemble. Le même raisonnement s'applique aux graphes de la loi interne de groupe et de l'inversion. Donc, G est rangé par rk et de rang de Morley fini.

5.3 Propriétés de base de rk

Avant d'étudier les groupes de rang de Morley en détail nous donnons certaines propriétés générales du rang rk . Les premiers lemmes ci-dessous n'utilisent que la propriété **A** de rk . Donc, elles sont valables pour toutes les structures de rang de Morley fini, voire ω -stables. D'ailleurs, nous avons déjà démontré la plupart d'entre eux, ce qui justifie le manque de preuves. Nous conseillons aux lecteurs de les faire eux-mêmes.

Nous continuerons de travailler dans une \mathcal{L} -structure fixée \mathcal{M} . Nous supposons aussi que $\text{rk}(\emptyset) = -1$.

Lemme 5.12 *Un ensemble interprétable est infini si et seulement si son rang est strictement positif.*

Lemme 5.13 *Si A et B sont deux ensembles interprétables tels que $A \subseteq B$, alors $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(B)$.*

Lemme 5.14 *Si A et B sont deux ensembles interprétables, alors $\text{rk}(A \cup B) = \max(\text{rk}(A), \text{rk}(B))$.*

Le lemme suivant n'a pas été abordé jusqu'à maintenant mais sa preuve utilise un raisonnement familier.

Lemme 5.15 *Soit A un ensemble interprétable. Alors $\text{rk}(A) \geq n + 1$ si et seulement si A a une infinité de sous-ensembles A_i ($i \in \mathbb{N}$) interprétables tels que $\text{rk}(A_i) = n$ et $\text{rk}(A_i \cap A_j) < n$ pour $i \neq j$.*

Lemme 5.16 *Soit $f : A \rightarrow B$ une surjection interprétable. Alors $\text{rk}(A) \geq \text{rk}(B)$.*

Définition 5.17 *Un ensemble interprétable A est dit d'être de degré 1 si pour tout $B \subseteq A$ interprétable soit $\text{rk}(B) < \text{rk}(A)$ soit $\text{rk}(A \setminus B) < \text{rk}(A)$. A est dit d'être de degré d ($d \in \mathbb{N}^*$) s'il s'écrit comme l'union disjointe de d sous-ensembles interprétables de degré 1 et de rang $\text{rk}(A)$.*

Si la structure est ω -saturée, cette notion de degré correspond à celle introduite dans le chapitre 4.

Lemme 5.18 *Chaque ensemble interprétable a un degré et un seul.*

Lemme 5.19 *Si A et B sont deux ensembles interprétables et que $\text{rk}(A) > \text{rk}(B)$, alors $\text{deg}(A \cup B) = \text{deg}(A)$.*

Lemme 5.20 *Si $A \subseteq B$ sont deux ensembles interprétables et que $\text{rk}(A) = \text{rk}(B)$, alors $\text{deg}(A) \leq \text{deg}(B)$.*

Lemme 5.21 *Soit $f : A \rightarrow B$ une bijection interprétable. Alors $\text{rk}(A) = \text{rk}(B)$ et $\text{deg}(A) = \text{deg}(B)$.*

A partir de ce point nous aurons besoin des axiomes autres que **A.**

Lemme 5.22 *Soient A et B deux ensembles interprétables. Alors $\text{rk}(A \times B) = \text{rk}(A) + \text{rk}(B)$.*

Preuve. Axiome **C**. \square

Lemme 5.23 *Soient A et B deux ensembles interprétables, et $C \subseteq A \times B$ interprétable aussi. Alors les ensembles $A(b) = \{a \in A : (a, b) \in C\}$ sont interprétables et s'ils sont tous de même rang $\text{rk } r$, alors $\text{rk}(C) = r + \text{rk}(B)$.*

Preuve. $A(b)$ est définissable à partir des interprétations de A et de C . En effet, la formule $\exists y((x, y) \in C)$ donne cette définition. Donc $A(b)$ est un ensemble interprétable. Le lemme 5.22 montre que $\text{rk}(A(b) \times \{b\}) = \text{rk}(A(b))$. S'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\text{rk}(A(b)) = r$ pour tout $b \in B$ alors l'égalité de rang découle d'une application de l'axiome **C** à la projection de C sur B . \square

L'énoncé suivant exige un raisonnement plus compliqué.

Proposition 5.24 *Si A et B sont deux ensembles interprétables alors $\text{deg}(A \times B) = \text{deg}(A)\text{deg}(B)$.*

Preuve. Le lemme 5.22 nous permet de supposer $\text{deg}(A) = \text{deg}(B) = 1$. Nous montrerons que si $A \times B = C_1 \sqcup C_2$, l'union disjointe de deux ensembles interprétables, alors l'un de ces deux ensembles est de rang strictement inférieur à $\text{rk}(A) + \text{rk}(B)$.

Nous définissons pour tout $a \in A$ et $b \in B$ les ensembles suivants :

$$B_i(a) = \{b \in B : (a, b) \in C_i\} \quad (i = 1, 2)$$

$$A_i(b) = \{a \in A : (a, b) \in C_i\} \quad (i = 1, 2)$$

Ce sont bien sûr des ensembles interprétables. Encore quelques définitions :

$$A_i = \{a \in A : \text{rk}(B_i(a)) = \text{rk}(B)\}$$

$$B_i = \{b \in B : \text{rk}(A_i(b)) = \text{rk}(A)\}$$

Montrons que A_i et B_i sont interprétables. Soit f_i la restriction à C_i de la projection sur la première coordonnée. C'est une application interprétable et pour tout $a \in A$, $\{a \in A : \text{rk}(f_i^{-1}(a)) = \text{rk}(B)\}$ est interprétable d'après l'axiome **B**. Les éléments de cet ensemble sont de la forme $\{a\} \times B_i(a)$ où $\text{rk}(B_i(a)) = \text{rk}(B)$. Comme il existe une bijection interprétable entre $\{a\} \times B_i(a)$ et $B_i(a)$, $\{a \in A : \text{rk}(f_i^{-1}(a)) = \text{rk}(B)\}$ est exactement A_i . Donc A_i est interprétable et le même raisonnement marche pour B_i .

Comme A est connexe et que $A = A_1 \sqcup A_2$, seulement l'un des deux A_i est générique dans A . Nous pouvons supposer $\text{rk}(A_1) = \text{rk}(A)$ et $\text{rk}(A_2) < \text{rk}(A)$. Nous verrons que cela forcera $\text{rk}(C_2) < \text{rk}(A \times B)$. Notons d'abord que

$$C_2 \subseteq \{(a, b) \in A \times B : a \in A_1, b \in B_2(a)\} \sqcup (A_2 \times B)$$

Comme $\text{rk}(A_2 \times B) = \text{rk}(A_2) + \text{rk}(B) < \text{rk}(A) + \text{rk}(B) = \text{rk}(A \times B)$, il suffit de montrer que l'ensemble $D = \{(a, b) \in A \times B : a \in A_1, b \in B_2(a)\}$ est interprétable et $\text{rk}(D) < \text{rk}(A \times B)$. L'interprétabilité est plus ou moins claire, il faut vérifier de quoi dépend $B_2(a)$ pour un a donné. Quant à $\text{rk}(D)$, nous définissons $D_r = \{(a, b) \in D : \text{rk}(B_2(a)) = r\}$. Le même type de raisonnement que celui utilisé pour montrer l'interprétabilité des A_i montre que les D_r sont interprétables. De plus ils partitionnent D en un nombre fini d'ensembles interprétables (le rang est fini). Or comme B est connexe, pour tout $a \in A_1$, $\text{rk}(B_2(a)) < \text{rk}(B)$. Donc $\text{rk}(D_r) \leq \text{rk}(A) + r < \text{rk}(A) + \text{rk}(B)$ pour tout r . Le lemme 5.14 montre alors que $\text{rk}(D) < \text{rk}(A \times B)$. \square

Dans la section 4.3 nous avons introduit la notion de sous-groupe uniformément définissable. Bien sûr il n'y a aucune raison pour restreindre cette notion aux sous-groupes ni à la définissabilité.

Définition 5.25 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure, $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une \mathcal{L} -formule dont les variables libres sont exactement $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$ et $E(\bar{x}, \bar{x}'; \bar{y})$ une autre \mathcal{L} -formule dont les variables libres sont $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ et $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$ telles que sur un ensemble définissable C de paramètres, $E(\bar{x}, \bar{x}', \bar{c})$ définit une relation d'équivalence sur $\phi(\bar{x}, \bar{c})$. Alors la famille $\phi(\bar{x}, \bar{c})/E(\bar{x}, \bar{x}', \bar{c})$ est dite uniformément interprétable.

Lemme 5.26 On retient la notation de la définition 5.25. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{\bar{c} \in C : \text{rk}(\phi(\bar{x}, \bar{c})/E(\bar{x}, \bar{x}', \bar{c})) = r\}$ est définissable dans \mathcal{M} .

Preuve. On pose $V = \{(\bar{x}, \bar{c}) \in M^n \times C : \mathcal{M} \models \phi(\bar{x}, \bar{c})\}$ et on définit une relation d'équivalence sur V de la façon suivante :

$$(\bar{x}, \bar{c}) \sim (\bar{x}', \bar{c}')$$

si et seulement si $\bar{c} = \bar{c}'$ et $\mathcal{M} \models E(\bar{x}, \bar{x}', \bar{c})$. C'est une relation d'équivalence interprétable.

La projection sur la deuxième coordonnée $\pi : V/\sim \rightarrow C$ est une application interprétable et l'axiome **B** montre que l'ensemble $\{\bar{c} \in C : \text{rk}(\pi^{-1}(\bar{c})) = r\}$ est définissable. Or ce dernier ensemble est en bijection définissable avec $\{\bar{c} \in C : \text{rk}(\phi(\bar{x}, \bar{c})/E(\bar{x}, \bar{x}', \bar{c})) = r\}$. \square

Corollaire 5.27 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure. Si $\phi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ est une \mathcal{L} -formule, alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{\bar{a} \in M^m : \text{rk}(\phi(M^n, \bar{a})) = r\}$ est définissable.

5.4 Groupes de rang de Morley fini

A partir de cette section nous nous concentrons sur les groupes rangés par le rang rk . Nous utiliserons toutes les propriétés de ce rang et la notation rk sera gardée. Cela ne nous coute rien grâce au théorème 5.11. Nous savons que nous sommes toujours dans une structure de rang de Morley fini. Donc, au lieu d'utiliser l'appellation lourde d'être rangé par le rang rk nous continuerons d'utiliser celle d'être de rang de Morley fini.

Nous permettons l'usage des paramètres dans les interprétation. Soulignons encore une fois que nous travaillerons dans le même modèle fixé sauf mention contraire. Les discussions de la section précédente montrent que cela n'est pas un problème. Plus tard, il nous faudra considérer le passage aux extensions ω -saturés mais cela est encore loin.

Avant de commencer l'étude de la structure algébrique des groupes de rang de Morley fini, donnons quelques exemples.

1. Les groupes algébriques sur des corps algébriquement clos
2. \mathbb{Z}_{p^∞}

Conjecture de Cherlin et Zil'ber : Un groupe simple et infini de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Nous avons vu dans la section 4.3 certaines propriétés des groupes ω -stables qui sont bien sûr aussi des propriétés des groupes de rang de Morley fini. La condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables et la notion de composantes connexe qui en découle continueront de jouer un rôle primordial dans ce qui suit. Nous utiliserons donc sans mentionner la proposition 4.29 et toute la discussion qui la suit.

Dans la section 4.3 était introduite aussi la notion de groupe connexe qui dans le contexte des groupes ω -stables se traduit par le fait d'être égal à sa composante connexe. Etre connexe est une condition très forte que nous illustrons maintenant avec un exemple simple. Pour cela nous introduisons la notion d'*action interprétable* d'un groupe sur un ensemble.

L'étude de l'action d'un groupe G sur un ensemble X d'une optique proche de la théorie des modèles peut se faire en considérant le langage $\mathcal{L}^+ = \{G, X, \cdot, {}^{-1}, 1, *\}$ et une \mathcal{L}^+ -structure $(G, X, \cdot, {}^{-1}, 1, *)$ où l'ensemble de base d'un modèle est l'union disjointe $G \sqcup X$. Les opérations de groupe sont interprétées comme d'habitude et $*$ correspond à l'action de G sur X . Ce n'est bien sûr pas suffisant puisqu'il faut dire comment \cdot et ${}^{-1}$ s'étendent sur M , et $*$ sur G . En ce qui concerne l'action de G sur X ce sont des extensions qui n'ont aucune utilité mais pour assurer la consistance de notre formalisme il faut définir ces trois opération sur $G \sqcup X$ entier. Une solution sans peine est de déclarer que la valeur dans chaque non intéressant est 1. Par exemple si $\alpha, \beta \in X$, alors $\alpha \cdot \beta = \alpha * \beta = 1$.

Une solution aux complications du dernier paragraphe est d'emmener l'action du groupe G sur l'ensemble X à l'intérieur de G . Ceci consiste à considérer l'action du groupe G par translation (à gauche ou à droite dépendant de vos goûts à condition de garder une certaine consistance) sur les stabilisateurs des points de X . Si $\alpha \in X$, l'action de G sur l'orbite α^G est équivalente à l'action de G sur G/G_α . En particulier si l'action de G sur X est transitive, l'action de G sur X est équivalente à l'action de G sur G/G_α . En utilisant cette approche nous pouvons définir maintenant une *action interprétable* d'un groupe G sur un ensemble X comme une action où les stabilisateurs sont interprétables dans G .

Le lemme suivant sera fréquemment utilisé dans le contexte des groupes de rang de Morley fini. Comme la notion de composante connexe est valable dans le contexte des groupes ω -stables et que la composante connexe d'un groupe ω -stable se comporte de la même façon que celle d'un groupe de rang de Morley fini, nous l'énonçons pour les groupes ω -stables.

Lemme 5.28 *Soit G un groupe ω -stable qui agit interprétablement sur un ensemble X fini. Alors l'action de G est triviale.*

Preuve. Les stabilisateurs des points sont d'indice fini dans G . \square

Une conséquence immédiate de ce lemme est que dans un groupe connexe tout sous-groupe normal et fini est central.

5.5 Génériques

Dans cette section nous étudierons la notion d'*ensemble générique* dans le contexte des groupes de rang de Morley fini. C'est une notion fondamentale. Nous espérons que le rôle qu'elle joue dans la preuve du théorème principal de cette section (le théorème 5.33 ci-dessous) peut donner une idée de son importance.

Nous introduirons la notion de généricité dans le contexte des théories ω -stables. Mais la même définition peut se faire dans un contexte où il existe une notion de rang satisfaisant l'axiome **A** du rang rk .

Définition 5.29 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure ω -stable, en d'autres termes $\text{Th}(\mathcal{M})$ est ω -stable. Si A est un ensemble interprétable dans \mathcal{M} et B est un sous-ensemble interprétable de A , B est dit *générique dans A* s'il est de même rang de Morley que A .

Dans le lemme suivant, pour deux ensembles A et B , $A\Delta B$ est leur différence symétrique $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Lemme 5.30 Soit \mathcal{M} une structure de rang de Morley fini (ou bien une structure rangée par le rang rk). Si A , B et C sont trois sous-ensembles interprétables de la même puissance cartésienne de M tels que $\text{rk}(A\Delta B) < \text{rk}(A)$ et $\text{rk}(A\Delta C) < \text{rk}(A)$. Alors $\text{rk}(B\Delta C) < \text{rk}(A)$.

Preuve. Exercice. \square

Définition 5.31 Soit G un groupe de rang de Morley agissant sur un ensemble X interprétablement. Pour $Y \subseteq X$ un sous-ensemble définissable de X le stabilisateur de Y est l'ensemble $\text{Stab}(Y) = \{g \in G : \text{rk}(gY\Delta Y) < \text{rk}(Y)\}$.

Remarquons que si $\text{deg}(Y) = 1$ alors $\text{Stab}(Y) = \{g \in G : \text{rk}(gY \cap Y) = \text{rk}(Y)\}$. Il faut souligner que le stabilisateur tel qu'il est introduit dans la définition 5.31 ne stabilise pas nécessairement Y . Pour un élément $g \in \text{Stab}(Y)$, gY intersecte Y "largement". Pourtant c'est suffisant pour obtenir un groupe définissable. En fait, cette notion était introduite par Poizat pour étudier l'action de G sur ses types et dans ce contexte-là, le stabilisateur est un vrai stabilisateur, celui d'un type. C'est une autre approche aux groupes ω -stables qui, entre autres choses, permet d'obtenir les résultats de cette section.

Lemme 5.32 Nous gardons la notation de la définition 5.31.

1. $\text{Stab}(Y)$ est un sous-groupe définissable de G .
2. Si Y est générique dans X alors $|G : \text{Stab}(Y)| < \infty$.

Preuve. 1. Il découle du lemme 5.30 que $\text{Stab}(Y)$ est un sous-groupe. La définissabilité est une conclusion qui découle du corollaire 5.27.

2. Montrons d'abord que nous pouvons supposer que $\text{deg}(Y) = 1$. Donc on suppose le résultat connu quand $\text{deg}(Y) = 1$. Soit $d = \text{deg}(Y)$. Alors $Y = Z_1 \sqcup \dots \sqcup Z_d$, l'union disjointe de d sous-ensembles génériques de degré 1. Ces ensembles sont génériques dans X aussi. Alors le résultat pour le degré 1 montre que $|G : \text{Stab}(Z_i)| < \infty$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Donc $|G : \bigcap_{i=1}^d \text{Stab}(Z_i)| < \infty$. Or $\bigcap_{i=1}^d \text{Stab}(Z_i) \leq \text{Stab}(Y)$. Donc $|G : \text{Stab}(Y)| < \infty$.

Donc on suppose $\text{deg}(Y) = 1$. Nous pouvons aussi supposer que $X = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_d$, l'union disjointe des ensembles génériques de degré 1 et que $Y_1 = Y$ (pourquoi?). On pose $G_i = \{g \in G : \text{rk}(gY_1\Delta Y_i) < \text{rk}(Y)\} = \{g \in G : \text{rk}(gY_1 \cap Y_i) = \text{rk}(Y)\}$ d'après notre hypothèse sur le degré des Y_i . Si $g, h \in G_i$, comme par définition $\text{rk}(gY_1\Delta Y_i) < \text{rk}(Y)$ et que $\text{rk}(hY_1\Delta Y_i) < \text{rk}(Y)$ le lemme 5.30 montre que $\text{rk}(gY\Delta hY) < \text{rk}(Y)$. Cela équivaut à $\text{rk}(h^{-1}gY\Delta Y) < \text{rk}(Y)$.

En d'autres termes chaque G_i est une classe de $\text{Stab}(Y)$ dans G . Or pour chaque $g \in G$, $\text{rk}(gY \cap Y_i) = \text{rk}(Y)$ pour un certain i . Comme $\text{deg}(Y) = 1$, cette dernière condition équivaut à $\text{rk}(gY \triangle Y_i) < \text{rk}(Y)$. Donc $g \in G_i$. Nous avons montré que $G = G_1 \sqcup \dots \sqcup G_d$. Cela finit la preuve. \square

Le théorème suivant est très utile. La preuve que nous donnons ici est fort différente de celle de Cherlin. Elle était obtenue par Borovik et Nésin. Il faut remarquer que le résultat est vrai pour les groupes ω -stables en général.

Théorème 5.33 (Cherlin, 1978) *Un groupe G de rang de Morley fini est connexe si et seulement s'il est de degré 1.*

Preuve. La suffisance de la condition est claire puisque les classes d'un sous-groupe définissable sont des translatés de ce sous-groupe et donc ont même rang que le sous-groupe en question, en l'occurrence la composante connexe. On suppose donc G connexe. Soit $n = \text{rk}(G)$ et $d = \text{deg}(G)$. Supposons par l'absurde $d > 1$. Il existe donc deux sous-ensembles définissables A et B génériques dans G et disjoints. Le lemme 5.32 2 et l'hypothèse de connexité montrent que $G = \text{Stab}(A) = \text{Stab}(B)$. L'action est par translation à gauche.

On définit les ensembles suivants :

$$U = \{(a, b) \in A \times B : ab \in A\} \text{ et } V = \{(a, b) \in A \times B : ab \in B\}$$

$U = \bigsqcup_{b \in B} (Ab^{-1} \cap A) \times \{b\}$ et $V = \bigsqcup_{a \in A} \{a\} \times (a^{-1}B \cap B)$. Comme $G = \text{Stab}(A) = \text{Stab}(B)$, $\text{rk}(U) = \text{rk}(V) = n + n = 2n$ en utilisant le lemme 5.23. Or U et V sont disjoints et $\text{rk}(A \times B) = 2n$ tandis que d'après le lemme 5.24 $\text{deg}(A \times B) = 1$, une contradiction. \square

Corollaire 5.34 *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et X, Y deux sous-ensembles génériques de G . Alors $G = XY$.*

Preuve. Soient $g \in G$, et Y et X deux ensembles génériques. Alors $Y^{-1} = \{y^{-1} : y \in Y\}$ est aussi générique. De même pour gY^{-1} . Comme G est connexe, d'après le théorème 5.33 $\text{deg}(G) = 1$. Il en découle que $gY^{-1} \cap X \neq \emptyset$ (en effet cette intersection est générique). Donc il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $gy^{-1} = x$. Nous obtenons $g = xy$. \square

Nous montrons maintenant une caractérisation de généricité indépendante du rang de Morley trouvée par Poizat et qui lui a permis d'étendre cette notion aux groupes stables.

Lemme 5.35 (Poizat, 1987) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Soient A générique dans G et B un sous-ensemble définissable de G . L'ensemble $\{g \in G : \text{rk}(gA \cap B) = \text{rk}(B)\}$ est générique dans G .*

Preuve. Soit $C = \{(g, a) \in G \times A : ga \in B\}$. Alors

$$C = \bigsqcup_{a \in A} Ba^{-1} \times \{a\} = \bigsqcup_{g \in G} \{g\} \times (g^{-1}B \cap A)$$

La première égalité montre que $\text{rk}(C) = \text{rk}(B) + \text{rk}(A)$. Soit, en utilisant la deuxième égalité, π la projection de C sur la première coordonnée. Les ensembles

$$G_i = \{g \in G : \text{rk}(\pi^{-1}(g)) = i\} = \{g \in G : \text{rk}(g^{-1}B \cap A) = i\}$$

sont définissables d'après l'axiome **B**. On pose $C_i = \pi^{-1}(G_i)$. Comme sur G_i les fibres de π sont de rang constant i , d'après l'axiome **C** $\text{rk}(C_i) = \text{rk}(G_i) + i$. Comme le rang est fini le lemme 5.14 montre qu'il existe i_0 tel que C_{i_0} soit générique dans C . Alors $\text{rk}(A) + \text{rk}(B) = \text{rk}(C) = \text{rk}(C_{i_0}) = \text{rk}(G_{i_0}) + i_0$. Or pour tout i , $\text{rk}(A) = \text{rk}(G) \geq \text{rk}(G_i)$ et $\text{rk}(B) = \text{rk}(g^{-1}B) \geq i$. Donc pour assurer l'égalité $\text{rk}(C) = \text{rk}(G_{i_0}) + i_0$, il est nécessaire que $\text{rk}(A) = \text{rk}(G_{i_0})$ et $\text{rk}(B) = i_0$. En d'autres termes, l'ensemble $\{g \in G : \text{rk}(g^{-1}B \cap A) = \text{rk}(B)\}$ est générique dans G . Equivalamment l'ensemble $\{g \in G : \text{rk}(B \cap gA) = \text{rk}(B)\}$ est générique dans G . \square

Théorème 5.36 (Poizat, 1987) *Soient G un groupe de rang de Morley fini et A un sous-ensemble définissable de G . A est générique si et seulement si un nombre fini de translatés de A couvrent G .*

Preuve. Nous pouvons supposer G connexe (pourquoi?). La suffisance de la condition est claire. Donc nous supposons A générique dans G . Si $G \setminus A$ est un ensemble fini $\{g_1, \dots, g_l\}$, alors $G = g_1 a^{-1} A \cup \dots \cup g_l a^{-1} A \cup A$ où a est un élément quelconque de A . Si $G \setminus A$ est infini, par le lemme 5.35, il existe $g \in G$ tel que $gA \cap (G \setminus A)$ soit générique dans $G \setminus A$. Alors soit $\text{rk}((G \setminus A) \setminus gA) < \text{rk}(G \setminus A)$, soit $\text{deg}(G \setminus gA) < \text{deg}(G \setminus A)$. On finit par récurrence sur le rang et le degré. \square

5.6 Théorème des indécomposables de Zil'ber

Dans cette section nous démontrerons un théorème fondamental de Boris Zil'ber sur les groupes de rang de Morley fini : *le théorème des indécomposables*. Non seulement ce théorème a été indispensable pour la solution des problèmes plutôt modèle théoriques mais sans un tel résultat il serait impossible de parler de la définissabilité d'un grand nombre de sous-groupes d'un groupe de rang de Morley fini. A la fin de cette section nous énoncerons plusieurs corollaires dans cette direction. Commençons avec la notion centrale du théorème de Zil'ber.

Définition 5.37 *Soient G un groupe et H un sous-groupe définissable de G . Un sous-ensemble définissable X de G est dit H -indécomposable si ou bien les éléments de X se répartissent en une infinité de classes modulo H , ou bien sont tous contenus dans une même classe modulo H . X est dit indécomposable s'il est H -indécomposable pour tout sous-groupe définissable H de G . Notons que dans cette définition, les classes de H doivent être choisies d'une façon consistante, soit toujours à gauche, soit toujours à droite.*

Une remarque immédiate est qu'un sous-groupe définissable est indécomposable si et seulement s'il est connexe.

Bien que le théorème principal de cette section soit fausse même pour les groupes ω -stables de rang de Morley infini, nous pouvons démontrer un critère utile d'indécomposabilité pour les groupes stables.

Lemme 5.38 *Soient G un groupe stable, S un sous-groupe définissable et X un sous-ensemble définissable de G qui est S -normal, en d'autres termes pour tout $s \in S$, $X^s = X$. X est indécomposable s'il est H -indécomposable pour tout sous-groupe H définissable et S -normal de G .*

Preuve. Soit H un sous-groupe définissable de G . Nous supposons que

$$X \subseteq g_1 H \sqcup \dots \sqcup g_n H$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $g_1, \dots, g_n \in G$. Comme X est supposé S -normal, pour tout $s \in S$

$$X \subseteq g_1^s H^s \sqcup \dots \sqcup g_n^s H^s$$

D'après le corollaire 4.27, il existe un nombre fini m tel que l'intersection $P = \bigcap_{s \in S} H^s$ soit égale à

$$H^{s_1} \cap \dots \cap H^{s_m}$$

Il en découle que

$$(\dagger) \quad X \subseteq \bigcap_{i=1}^m (g_1^{s_i} H^{s_i} \sqcup \dots \sqcup g_n^{s_i} H^{s_i}) = \bigcup_{j=1}^n (\bigcap_{i=1}^m g_j^{s_i} H^{s_i})$$

Pour j et l fixés,

$$g_j^{s_l} P = g_j^{s_l} (\bigcap_{k=1}^m H^{s_k}) = \bigcap_{k=1}^m g_j^{s_l} H^{s_k}$$

Nous obtenons alors

$$\cup_{l=1}^m g_j^{s_l} P = \cup_{l=1}^m (\cap_{k=1}^m g_j^{s_l} H^{s_k}) = \cap_{k=1}^m (\cup_{l=1}^m g_j^{s_l} H^{s_k}) \supseteq \cap_{k=1}^m g_j^{s_k} H^{s_k}$$

et en utilisant (†)

$$X \subseteq \cup_{j=1}^n (\cup_{l=1}^m g_j^{s_l} P)$$

Or P est S -normal. Donc, par hypothèse $X \subseteq gP$ pour un certain $g \in G$. Comme $P \leq H$, $X \subseteq gH$. \square

Avant de démontrer le théorème des indécomposables nous donnons une application du lemme 5.38. Cette application sera très utile pour l'étude des groupes de rang de Morley fini. Néanmoins il reste valable dans le contexte plus général des groupes ω -stables aussi.

Proposition 5.39 *Soient G un groupe ω -stable et H un sous-groupe définissable et connexe de G . Si $x \in G$ alors x^H est un ensemble indécomposable.*

Preuve. Comme x^H est un ensemble H -normal, d'après le lemme 5.38 il suffit de montrer que x^H est Q -indécomposable pour tout sous-groupe Q qui est définissable et H -normal. Soit donc Q un tel sous-groupe. Supposons $x^H \subseteq g_1 Q \sqcup \dots \sqcup g_m Q$. Nous pouvons supposer que $g_1 = x$. En plus, minimisons m . En conséquence, pour tout $h \in H$, il existe un g_i et un seul tel que $x^h \in g_i Q$. Donc, pour tout g_i et pour tout $h \in H$, il existe un g_j et un seul tel que $g_i^h Q = g_j Q$. Donc, le groupe H agit sur cet ensemble $\{g_1 Q, \dots, g_m Q\}$. Cette action est interprétable dans G puisque les stabilisateurs sont de la forme $H_i = \{h \in H : g_i^{-1} g_i^h \in Q\}$. Comme l'ensemble sur lequel H agit est fini et que H est connexe, l'action est triviale d'après le lemme 5.28. Il en découle que $x^H \subseteq g_1 Q$. \square

Le lemme suivant sera utilisé dans la preuve du théorème des indécomposables. Nous utiliserons la notation suivante : Si A et B sont deux sous-ensembles nonvides d'un groupe G , alors $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Si $A = B$, on utilisera parfois la notation A^2 . Bien sûr cette définition s'étend à un nombre fini quelconque de facteurs.

Lemme 5.40 *Soient G un groupe de rang de Morley fini et B un sous-ensemble indécomposable de G tel que $1 \in B$ et que $\text{rk}(BB) = \text{rk}(B)$. Alors BB est un sous-groupe définissable et connexe de G .*

Preuve. Si B est fini alors $B = \{1\}$, et il n'y a rien à faire. Donc nous pouvons supposer B infini. Nous considérons l'action de G sur lui-même par translation à gauche. Soit $H = \text{Stab}(B)$. D'après le lemme 5.32, H est un définissable.

Nous montrerons d'abord que $B \subseteq H$. Pour cela, il suffit de montrer qu'un nombre fini de translatés de H couvrent B puisque H est indécomposable et que $1 \in B$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, il existe une famille infinie $\{b_j \in B : j \in J\}$ d'éléments de B telle que $B \subseteq \bigsqcup_{j \in J} b_j H$ et que pour $i \neq j$, $b_i H \neq b_j H$, et dont aucune sous-famille finie ne suffirait à couvrir B . Il découle de cela et de la définition de la définition 5.31 que pour $i \neq j$, $\text{rk}(b_i B \Delta b_j B) = \text{rk}(B)$. Ecrivons $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_d$ où chaque B_i est générique dans B et est de degré 1. Pour chaque couple $(i, j) \in J \times J$, il existe $B_{l_{i,j}}$ ($1 \leq l_{i,j} \leq d$) tel que $\text{rk}(b_i B_{l_{i,j}} \cap b_j B_{l_{i,j}}) < \text{rk}(B)$. Comme J est un ensemble infini tandis qu'il existe un nombre fini de B_l , il existe B_{l_0} ($1 \leq l_0 \leq d$) tel que $\text{rk}(b_i B_{l_0} \cap b_j B_{l_0}) < \text{rk}(B)$ pour une infinité de couples (i, j) . Nous pouvons appliquer le lemme 5.15 à la famille des ensembles définissables $\{b_i B_{l_0} : i \in J_0\}$ où J_0 est la sous-famille de J formée par les coordonnées des couples (i, j) telles que $\text{rk}(b_i B_{l_0} \cap b_j B_{l_0}) < \text{rk}(B)$ pour conclure que $\text{rk}(BB) > \text{rk}(B)$. Cela contredit notre hypothèse $\text{rk}(BB) = \text{rk}(B)$. Cette contradiction montre qu'une famille infinie J n'existe pas et que donc $B \subseteq H$.

Nous montrerons maintenant que $H = BB^{-1}$. Comme H est un groupe, il découle du dernier paragraphe que $B^{-1} \subseteq H$. Par ailleurs, comme $H = \text{Stab}(B)$, pour tout $h \in H$, $\text{rk}(hB \cap B) = \text{rk}(B)$. Comme B est infini, $hB \cap B \neq \emptyset$. Donc il existe $b \in B$ tel que $hb \in B$ et équivalamment que $h \in Bb^{-1}$. Cela montre que $H = BB^{-1}$.

Il découle du dernier paragraphe que H est connexe. En effet, comme B est indécomposable et qu'il est contenu dans H , il est contenu dans une seule classe de H° . Or $1 \in B$. Donc $B \subseteq H^\circ$. Donc $B^{-1} \subseteq H^\circ$ aussi.

Finalement nous montrons que $H = BB$. Nous considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Psi & : B \times B \longrightarrow H \\ (b_1, b_2) & \longmapsto b_1 b_2^{-1} \end{aligned}$$

Pour $h \in H$, les fibres ont la forme $\{(hb, b) : b \in B\}$. L'axiome C montre alors que $2\text{rk}(B) = \text{rk}(H) + \text{rk}(B)$. Donc B est générique dans H . D'après le corollaire 5.34, $H = BB$. \square

Maintenant nous démontrons le théorème des indécomposables :

Théorème 5.41 (Zil'ber, 1977) *Soient G un groupe de rang de Morley fini, $\{A_i : i \in I\}$ une famille de sous-ensembles indécomposables de G chacun contenant $\{1\}$. Alors le sous-groupe $\langle A_i : i \in I \rangle$ de G est définissable et connexe. En plus il existe $\{i_1, \dots, i_m\}$ tels que*

$$\langle A_i : i \in I \rangle = A_{i_1} \dots A_{i_m}$$

m est borné par $2\text{rk}(G)$.

Preuve. Notons avant de commencer la preuve que si dans un groupe de rang de Morley fini X et Y sont deux ensembles indécomposables chacun contenant 1, alors l'ensemble XY est aussi indécomposable (pourquoi?). Nous construisons une suite de sous-ensembles de G . Soit $B_1 = A_1$. Supposons que B_i ($i \in \mathbb{N}^*$) soit obtenu, alors nous définissons $B_{i+1} = B_i^2 A_j$ où j est choisi tel que $\text{rk}(B_{i+1}) > \text{rk}(B_i)$. La construction se termine quand il n'est plus possible d'augmenter le rang. Comme G est de rang de Morley fini, il existe donc k pour lequel la construction se termine. Nous posons alors $B = B_k$.

La remarque au début de la preuve montre que B est indécomposable. La terminaison de la construction à B implique que $\text{rk}(BB) = \text{rk}(B)$ parce que $B \subseteq B^2 \subseteq B^2 A_j$ pour tout $j \in I$ puisque $1 \in B \cap A_j$. D'après le lemme 5.40, BB est un sous-groupe définissable et connexe de G .

Par construction, $BB \leq \langle A_i : i \in I \rangle$. Montrons finalement que pour tout $i \in I$ $A_i \leq BB$. Or $BB \subseteq BBA_i$ ($i \in A_i$), et $\text{rk}(BB) = \text{rk}(BBA_i)$. De plus, BB est un sous-groupe définissable et BBA_i est indécomposable. Alors $BBA_i \subseteq BB$. En particulier $A_i \subseteq BB$ parce que $1 \in BB$.

La borne sur m est une conséquence de la construction de B . A chaque étape où il y a un nouveau B_i le rang augmente d'au moins 1. Donc la terminaison ne peut arriver à plus de $\text{rk}(G)$ étapes. Comme le sous-groupe engendré par les A_i est de la forme BB , il existe au plus $2\text{rk}(G)$ A_i qui interviennent. \square

Le théorème des Indécomposables est un théorème très important et très fréquemment utilisé à la fois dans des preuves plus abstraites relevant de la théorie des modèles "pures" et dans des contextes liés à des applications algébriques. Il a d'ailleurs un analogue bien connu en géométrie algébrique que vous pouvez trouver dans le livre de Humphreys sur les groupes algébriques linéaires dans la section "Generation by irreducible sets". Le théorème 5.11 est un autre endroit où le théorème des indécomposables est crucial. Rappelons que l'hypothèse de la finitude du rang de Morley est nécessaire.

Un usage fréquent dans des contextes algébriques du théorème des indécomposables consiste à vérifier que certains sous-groupes sont définissables. Nous espérons que les corollaires suivants convaincront les lecteurs de l'importance fondamentale du théorème des indécomposables sans lequel il n'est pas du tout clair pourquoi aucun des groupes mentionnés ci-dessous serait définissable. D'ailleurs, en général ils ne le sont pas. Les lecteurs qui connaissent la théorie des groupes algébriques peuvent comparer les corollaires ci-dessous à leurs analogues dans les groupes algébriques sur des corps algébriquement clos.

Nous commençons par un corollaire qui est plus fréquemment utilisé que le théorème 5.41.

Corollaire 5.42 *Soient G un groupe de rang de Morley fini et $\{H_i : i \in I\}$ une famille de sous-groupes définissables et connexes de G . Alors le sous-groupe $\langle H_i : i \in I \rangle$ est définissable et connexe.*

Corollaire 5.43 *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe définissable et connexe. Si X est un sous-ensemble nonvide de G , alors $[H, X]$ est un sous-groupe définissable et connexe de G .*

Preuve. D'après le lemme 5.39, l'ensemble $x^{-H} = \{h^{-1}x^{-1}h : h \in H\}$ est indécomposable pour tout $x \in X$. Il en découle que $x^{-H}x$ l'est aussi. L'ensemble $x^{-H}x$ contient 1 pour tout $x \in X$. Comme le groupe $[H, X] = \langle x^{-H}x : x \in X \rangle$, le théorème 5.41 s'applique. \square

Rappelons une certaine notation (certainement pas la seule notation) pour les séries dérivées et les séries centrales descendantes dans un groupe quelconque G . Soit G un groupe. On définit $G^{(0)} = G$ et $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$. En ce qui concerne la série descendante $G^0 = G$ et $G^{n+1} = [G, G^n]$.

Corollaire 5.44 *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe. Alors les sous-groupes G^n et $G^{(n)}$ sont définissables et connexes.*

Le théorème suivant de Reinhold Baer que nous admettrons permet de généraliser le corollaire 5.44 :

Théorème 5.45 (Baer) *Soient G un groupe quelconque et A et B deux sous-groupes de G qui se normalisent. Si l'ensemble $X = \{[a, b] : a \in A, b \in B\}$ est fini alors le groupe $[A, B]$ est fini.*

Corollaire 5.46 *Soient G un groupe de rang de Morley fini et A et B deux sous-groupes définissables de G qui se normalisent. Alors le sous-groupe $[A, B]$ est définissable et sa composante connexe est $[A^\circ, B][A, B^\circ]$.*

Il est possible d'améliorer encore le corollaire 5.46 en utilisant des résultats de Maxwell Rosenlicht.

Le cas particulier suivant du corollaire 5.46 est important :

Corollaire 5.47 *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors les sous-groupes G^n et $G^{(n)}$ sont définissables.*

Chapitre 6

Corps et groupes résolubles

Le théorème 6.6 “ was perhaps the first indication that model theorists and group theorists have serious business to do together.” Wilfrid Hodges, *Model Theory*, p.258

6.1 Corps de rang de Morley fini

Dans cette section nous démontrerons l’un des deux plus anciens résultats concernant les structures algébriques de rang de Morley fini. C’est le théorème d’Angus Macintyre sur les corps de rang de Morley fini. L’autre résultat aussi est un théorème de Macintyre qui était parmi les exercices : l’étude des groupes ω -stables et abéliens.

La conclusion du théorème de Macintyre sur les corps est valable dans un contexte plus large que celui des corps de rang de Morley fini. En effet la preuve que nous donnerons ci-dessous avec quelques changements modèle théoriques se généralise au contexte ω -stable (voir par exemple la section 3.a de *Groupes Stables* par Poizat). Il faut noter que d’autres généralisations ont été obtenues, notamment par Cherlin et Shelah concernant les corps *superstables*, la conclusion étant la même, que le corps, s’il est infini, est algébriquement clos. Par contre la classe des corps stables est plus large et leur étude est loin d’être achevée (voir les travaux d’Elisabeth Bouscaren, Françoise Delon, Margit Messmer, Frank Wagner). Soulignons que malgré le théorème 6.1, les corps de rang de Morley fini ne cessent de faire l’objet des travaux profonds à cause de certains problèmes ouverts dont nous parlerons dans ce chapitre.

Avant de commencer la preuve nous devons préciser ce que nous entendons par le mot corps. C’est un corps commutatif. Un théorème de Cherlin montre qu’il n’existe pas de corps noncommutatif de rang de Morley fini mais cela dépend du théorème de Macintyre.

Théorème 6.1 (Macintyre, 1971) *Un corps infini de rang de Morley fini est algébriquement clos*

Nous aurons besoin de certains résultats de la théorie de Galois :

1. Soient F un corps et E une extension de F . Alors les énoncés suivants sont équivalents :
 - (i) E est le corps de rupture d’un polynôme séparable $f(X)$ sur F .
 - (ii) $F = \text{Inv}(G)$ où G est un groupe fini d’automorphismes de E et $\text{Inv}(G)$ est l’ensemble des éléments de E fixés par G .
 - (iii) E est une extension normale et séparable de dimension finie.

De plus si E et F sont comme dans (i) et que $G = \text{Gal}(E/F)$, alors $F = \text{Inv}(G)$. Si E et F sont comme dans (ii), alors $G = \text{Gal}(E/F)$.

2. *Le théorème fondamental de la théorie de Galois* : Soit E une extension d’un corps F satisfaisant les conditions équivalentes du fait 1. Soit G le groupe d’automorphismes de E fixant point par point F ($\text{Gal}(E/F)$). Il existe alors une bijection entre les sous-groupes de G et les

corps intermédiaires entre E et F décrite par :

$$H \leq G \longrightarrow \text{Inv}(H) = \{x \in E : x \text{ est fixé par tout } h \in H\}$$

$$F \leq K \leq E \longrightarrow \text{Gal}(E/K)$$

3. Soient F un corps qui contient les n èmes racines de l'unité et E une extension cyclique de dimension n de F . Alors $E = F(u)$ où $u^n \in F$.

4. Soient F un corps de caractéristique $p \neq 0$ et E/F une extension cyclique de dimension p de F . Alors $E = F(c)$ où $c^p - c \in F$.

Le lemme suivant contient un ingrédient important modèle théorique du théorème de Macintyre. Il s'agit de la connexité des groupes additif et multiplicatif des corps de rang de Morley fini. Cette propriété (ou l'unicité du générique) s'étend aux corps stables.

Lemme 6.2 *Soit K un corps infini de rang de Morley fini. Nous avons alors les conclusions suivantes :*

1. Les groupes K_+ et K^\times sont connexes (le terme connexe est au sens des groupes de rang de Morley fini).
2. L'équation $X^n = a$ a une solution dans K pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in K$.
3. Si la caractéristique de K est $p \neq 0$, alors l'équation $X^p + aX + b = 0$ a une solution dans K pour tout $a, b \in K$.
4. Si L est une extension de degré fini de K alors L est interprétable dans K . Donc L a les propriétés démontrées dans les points précédents.

Preuve. 1. Soit K_+° la composante connexe de K_+ . Pour $\lambda \in K$, la multiplication par λ est un automorphisme de la structure K_+ . Donc K_+° est stable sous l'action de cet automorphisme. Il en découle que K_+° est un idéal du corps K . Comme K est supposé infini, $K_+^\circ \neq 0$. Alors, comme K est un corps, il ne reste qu'une possibilité, $K_+^\circ = K_+$.

Comme nous considérons K_+ comme un réduit de la structure de corps, la définition de K_+° et la conséquence (le théorème de Cherlin) sur le degré fait intervenir tous les sous-ensembles définissables à partir du corps K . Donc la conclusion de connexité du paragraphe précédent implique que le corps K est de degré 1. Alors K^* en tant que groupe est de degré 1 aussi. Donc, K^* est connexe.

2. On considère l'homomorphisme multiplicatif qui associe x^n à chaque $x \in K^*$. C'est un endomorphisme à fibres finies. Donc, par l'axiome C, le rang de l'image est égal à celui de K^\times . Comme ce dernier est connexe par le premier point, l'endomorphisme est surjectif.

3. En caractéristique p , l'application qui associe à chaque $x \in K$, l'élément $x^p + ax$ est un endomorphisme additif à fibres finies. Donc, on applique le même raisonnement que dans le point précédent au groupe additif de K .

4. Exercice. \square

Preuve du théorème 6.1. Supposons par l'absurde qu'existe un corps infini de rang de Morley fini qui n'est pas algébriquement clos. Comme tout corps de caractéristique 0 est parfait, le point 2 du lemme 6.2 montre qu'un corps infini de rang de Morley fini est parfait. Donc, les extensions algébriques de notre corps de rang de Morley fini qui n'est pas algébriquement clos sont séparables. Cela prouve l'existence des extensions finies satisfaisant les conditions équivalentes de premier fait ci-dessus (des extensions finies de Galois).

Nous considérons les paires K/F d'extensions de corps telles que K/F soit une extension de Galois de F qui est un corps infini de rang de Morley fini non algébriquement clos. Parmi ces extensions nous fixons une de degré minimal. Si $F < L < K$ est un corps intermédiaire, alors $L < K$ est aussi une extension de Galois (le fait 2) ce qui contredit la minimalité du degré de K/F . Donc, il n'existe pas de sous-extension propre de K/F et on conclut que K/F est cyclique de degré premier p en utilisant le fait 2. Comme le corps de rupture du polynôme $X^p - 1$ est

de degré strictement inférieur à p sur F , F contient toutes les racines p èmes de l'unité. Il existe deux cas possibles :

$\text{car}(F) = p$: Le fait 4 ci-dessus montre que K est le corps de rupture du polynôme $X^p - X - a$ pour un certain $a \in F$. D'après le lemme 6.2 3, F contient une racine de ce polynôme. Cela contredit l'hypothèse de minimalité du degré de K/F .

$\text{car}(F) \neq p$: Comme les racines p èmes de l'unité sont dans F , le fait 3 ci-dessus implique que $K = F(\alpha)$ avec $\alpha^p = a$ et $a \in F$. Or le lemme 6.2 montre que le polynôme $X^p - a$ a déjà une racine dans F , ce qui contredit la minimalité du degré de K/F . \square

Le théorème 6.1 est très appliqué puisqu'il donne une description très restrictive de la structure d'un corps interprétable dans une structure de rang de Morley fini. Par contre, ce n'est pas un théorème de classification des corps de rang de Morley fini. Un tel corps peut hériter des propriétés additionnelles de la structure dans laquelle il est interprété sans que ces propriétés soient définissables à partir de sa pure structure de corps. C'est un problème ouvert jusqu'à quel point une telle interprétation est possible. Pour préciser, nous mentionnons un fameux problème ouvert concernant les corps de rang de Morley fini, et très fortement lié aux groupe de rang de Morley fini.

Question : Existe-t-il une structure de rang de Morley fini

$$\langle K, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1, T \rangle$$

où $\langle K, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1 \rangle$ est un corps algébriquement clos et T un symbole de relation unaire nommant un sous-groupe infini de K^\times ? Une telle structure est connue sous le nom de *mauvais corps*.

Dans la section suivante nous verrons comment les mauvais corps apparaissent dans le contexte des groupes résolubles de rang de Morley fini. Notons que depuis la fin des années 80, des résultats profonds ont été obtenus liés à ce problème dont les plus notables sont ceux d'Udi Hrushovski, qui a construit des contrexemples à une autre formulation plus faible de la notion de mauvais corps, de Bruno Poizat qui, en élaborant les méthodes de Hrushovski, a trouvé des exemples de corps qui méritent d'être appelés mauvais mais qui sont de rang de Morley infini, et de Frank Wagner qui a montré que l'existence des mauvais corps en caractéristique non nulle est peu probable. Nous essayerons de parler de ce dernier théorème un peu plus tard.

6.2 Groupes résolubles ; Théorème de Zil'ber

Dans cette section nous démontrons un théorème très important et très appliqué de Zil'ber qui lie les groupes résolubles de rang de Morley fini aux corps.

Définition 6.3 Soient G un groupe de rang de Morley fini et $H \leq G$. Un sous-groupe A de G est dit H -minimal si A est infini, définissable, H -normal et minimal par rapport à ces propriétés.

Remarquons qu'un sous-groupe G -minimal est connexe.

Le lemme suivant dont la preuve est un exercice sera utilisé dans la preuve du théorème 6.5.

Lemme 6.4 Soit G un groupe de rang de Morley fini. Soient A et H deux sous-groupes définissables tels que $A \triangleleft G$, $A \cap H = 1$ et $G = AH$. Donc G est le produit semidirect de A et H . En plus A est supposé H -minimal. Alors pour tout $a \in A \setminus C_A(H^\circ)$, il existe un l tel que $A = \{a^{h_1} \dots a^{h_l} : h_1, \dots, h_l \in H\}$.

Théorème 6.5 Soit G un groupe de rang de Morley fini. On suppose l'existence de deux sous-groupes A et H de G qui ont les propriétés suivantes :

- (i) $G = AH$, $A \triangleleft G$ et $A \cap H = 1$.
- (ii) A et H sont infinis, définissables et abéliens ; A est H -minimal.
- (iii) $C_H(A) = 1$. En d'autres termes, l'action de H sur A est fidèle.

Nous avons alors les conclusions suivantes :

1. L'anneau $K = \mathbb{Z}[H]/\text{ann}_{\mathbb{Z}[H]}(A)$ est un corps algébriquement clos. Il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que tout élément de K soit représenté par un endomorphisme de la forme $\sum_{i=1}^l h_i$ ($h_i \in H$).

2. $A \cong K_+$ et H est isomorphe à un sous-groupe T de K^\times . H agit sur A par multiplication (action linéaire), et donc

$$G = A \rtimes H \cong \left\{ \begin{pmatrix} t & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in T, a \in K \right\}$$

K agit sur A^\times librement.

3. $K = \underbrace{T + \dots + T}_l$, et pour tout $a \in A^\times$, $A = \{\sum_{i=1}^l h_i a : h_i \in H\}$.

Preuve.

Première étape : Nous montrons d'abord comment on obtient la structure d'anneau à partir des endomorphismes de A induits par l'action de H . Il existe un homomorphisme de H vers $\text{End}(A)$, qui est injectif comme $C_H(A) = 1$ par hypothèse. En particulier nous pouvons voir H comme un sous-groupe du monoïde multiplicatif de $\text{End}(A)$. Soit K le sous-anneau engendré par H dans $\text{End}(A)$. Comme H est abélien, K est un anneau commutatif. Un élément $r \in K$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^n k_i h_i$ avec $n \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{Z}$ et $h_i \in H$. L'action de r sur un élément $a \in A$ est décrite de la façon suivante :

$$ra = \left(\sum_{i=1}^n k_i h_i \right) a = \prod_{i=1}^n a^{h_i^{k_i}}$$

Il découle de cette description que chaque élément $r \in K$ induit un endomorphisme définissable (à partir de G) de A .

Nous utiliserons la notation additive. Donc nous noterons ha , l'élément a^h du groupe A . Remarquons les deux conclusions suivantes :

$$ra = \sum_{i=1}^n (k_i h_i a)$$

$$K \cong \mathbb{Z}[H]/\text{ann}_{\mathbb{Z}[H]}(A)$$

où $\mathbb{Z}[H]$ est l'anneau de groupe. A est un K -module.

Deuxième étape : Maintenant nous montrons le premier point de l'énoncé. Nous commençons par montrer que les éléments de K sont des automorphismes de A . Soit donc $r \in K$ un endomorphisme non nul de A . Le noyau $\ker(r) = \{a \in A : ra = 0\}$ est un sous-groupe définissable de A . De plus il est H -normal. L'hypothèse de H -minimalité de A et le fait que $r \neq 0$ montrent que $\ker(r)$ est un groupe fini. Montrons que ce groupe est trivial. Supposons par l'absurde que $\ker(r) \neq 0$. Comme $\ker(r)$ est fini et que A est connexe par H -minimalité, r est un endomorphisme surjectif en utilisant l'axiome C. Cela implique que $\ker(r^{n+1}) > \ker(r^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 5.28, H° centralise $\ker(r^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $C_A(H^\circ)$ est un groupe infini. Or ce groupe est H -normal. L'hypothèse de H -minimalité de A implique que H° centralise A . Cela contredit la fidélité de l'action. Donc $\ker(r) = 0$ est r est un automorphisme de A .

Deuxièmement nous montrons que K est interprétable dans G . Comme l'action de H sur A est fidèle, il existe $a \in A \setminus C_A(H^\circ)$, auquel nous pouvons appliquer le lemme 6.4 et conclure que, dans la notation additive,

$$(*) \quad A = \left\{ \sum_{i=1}^l h_i a : h_1, \dots, h_l \right\}$$

Si $r \in K$, alors il existe h_1, \dots, h_l tels que $r(a) = \sum_{i=1}^l h_i a = (\sum_{i=1}^l h_i) a$. Le paragraphe précédent montre alors que $r = \sum_{i=1}^l h_i$. A partir de ces données, on peut écrire une interprétation de K dans G (comment?) en utilisant le formalisme qui était introduit dans la section 5.1.

Montrons maintenant que K est un corps. Si $r \in K$ et $r(a) = b$, alors il existe $s \in K$ tel que $s(b) = a$ par le paragraphe précédent. Notre conclusion concernant les noyaux des éléments de K implique alors que $rs = 1$. Donc, K est un corps interprétable dans G . Le théorème 6.1 montre alors que K est un corps algébriquement clos.

Troisième étape : Nous finissons la preuve. Montrons d'abord que K agit sur A^\times librement. En effet, c'est le même type de raisonnement que ci-dessus. Si $r \in K$ et $a \in A^\times$ sont tels que $r(a) = a$ alors $a \in \ker(r - 1)$ et donc $r = 1$. En particulier, H agit sur A^\times librement et $C_A(H^\circ) = 1$.

L'application de K_+ vers A définie par $r \mapsto r(a)$, où a est l'élément fixé à la deuxième étape, est un isomorphisme de groupes. En effet, la surjectivité est assurée par (*), tandis que la conclusion sur les noyaux de la première étape démontre l'injectivité.

Si $b \in A$, (*) montre qu'il existe $h_1, \dots, h_k \in H$ tels que $b = r(a) = \sum_{i=1}^l h_i a$. Si $h \in H$, alors $b^h = (\sum_{i=1}^l h_i a)^h$ et par définition de l'action de K sur A , cet élément de A est $\sum_{i=1}^l h h_i a = h b$. Cela vérifie l'énoncé sur la linéarité de l'action de H sur A . La représentation matricielle du point 2 et l'existence du sous-groupe T de K^\times découlent de cela et du fait que H soit vu comme un sous-groupe de $\text{End}(A)$ (la première étape) donc de K^\times .

Dernièrement nous montrons que le nombre naturel l ne dépend pas du choix de a . Cela démontrera le troisième point et finira la preuve du théorème de Zil'ber. Nous avons déjà montré que $C_A(H^\circ) = 1$. Donc soit $b \in A^\times$. Alors il existe $r \in K$ tel que $r(a) = b$. Or nous savons que $Ka = A$. Donc $A = Ka = (Kr)a = K(ra) = Kb$. \square

Le théorème 6.5 est le cas minimal dans le chemin qui aboutit au résultat suivant de Zil'ber :

Théorème 6.6 *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe, résoluble et non nilpotent. Alors un corps algébriquement clos est interprétable dans G . Plus précisément, G a deux sections définissables dont l'une est isomorphe au groupe additif d'un corps algébriquement clos et l'autre à un sous-groupe infini du groupe multiplicatif du même corps.*

Nous ne démontrerons pas ce théorème. Le théorème 6.5 doit donner une certaine idée de ce qui est en jeu. Les idées qui contribuent à la preuve du théorème 6.6 permettent d'obtenir d'autres théorèmes liés aux groupes résolubles de rang de Morley fini. Comme cela était visible dans la preuve du théorème 6.5, une certaine tentative de *linéariser* certaines actions tout en cherchant une structure de corps est un des points communs. Cela est plus facilement faisable dans un groupe résoluble ce qui a permis de démontrer une longue liste de résultats sur les groupes résolubles de rang de Morley fini. Nous citons un théorème indépendamment démontré par Ali Nesin et Zil'ber, et qui est utilisé dans la preuve du théorème 6.6.

Théorème 6.7 (Nesin (1989); Zilber (1973)) *Soit G un groupe résoluble et connexe de rang de Morley fini. Alors $G' = [G, G]$ est nilpotent.*

C'est une propriété bien connue des groupes algébriques. D'ailleurs dans le contexte des groupes algébriques il est possible d'obtenir une information plus précise et de conclure que le groupe dérivé est un groupe formé des éléments unipotents. Par contre dans le contexte abstrait des groupes de rang de Morley fini, un analogue général de la notion d'unipotence n'a pas encore été trouvé.

Les théorèmes de ce type soulignent les similarités entre les groupes algébriques sur des corps algébriquement clos et les groupes de rang de Morley fini. Par contre il existe des groupes de rang de Morley fini très non algébriques mais sont tous nilpotents. En particulier, les groupes simples et algébriques sur des corps algébriquement clos sont les seuls exemples de groupes simples et infinis de rang de Morley fini.

Nous finissons cette section en remarquant deux aspects particulièrement importants des théorèmes 6.5 et 6.6. Nous avons parlé des mauvais corps dans la section précédente. La preuve du théorème 6.5 montre comment ces structures apparaissent dans l'étude des groupes de rang de Morley fini. Le sous-groupe H , tant qu'il n'est pas isomorphe à K^\times , définit un sous-groupe infini et propre de K^\times . Cette définition est héritée par le corps parce que celui-ci est interprété dans

une structure ambiante plus large, en l'occurrence un groupe résoluble. Il ne serait pas possible de définir un tel sous-groupe à partir du langage pur des corps. C'est le point où le théorème de Macintyre (voire le théorème 6.5) ne sont plus suffisants. Ils sont trop faibles pour obtenir une réponse précise sur les propriétés additionnelles qu'on peut imposer sur une structure de rang de Morley fini sans détruire la propriété d'être de rang de Morley fini.

Le deuxième aspect à souligner est l'hypothèse de non nilpotence dans le théorème 6.6. En fait, cette hypothèse est présente dans l'énoncé du théorème 6.5 aussi mais sans être exprimé explicitement. Dans un groupe nilpotent une telle action fidèle serait impossible. D'ailleurs il existe une longue liste de groupes nilpotents de rang de Morley fini qui ne permettent pas l'interprétation d'un corps. Les plus compliqués ont été construits par Andreas Baudisch en suivant les méthodes introduites par Hrushovski.

Comme l'interprétation d'un corps élargit notre compréhension d'un groupe, il a été question si on peut faire une telle interprétation dans un groupe simple de rang de Morley fini. Ceci est possible dans un groupe simple et algébrique sur un corps algébriquement clos en utilisant les sous-groupes dits de *Borel* qui sont les sous-groupes clos, connexe, résolubles et maximaux par rapport à ces propriétés. Il faut souligner que les sous-groupes de Borel d'un groupe simple et algébrique ne sont pas nilpotents et si on leur applique l'analyse de Zil'ber on interprète un corps isomorphe à celui sur lequel le groupe simple ambiant est défini. A ce jour le problème suivant est resté ouvert :

Question : Existe-t-il un groupe nonrésoluble et connexe de rang de Morley fini dont tous les sous-groupes définissables et connexes sont nilpotents ? Un tel groupe de rang de Morley fini est dit un *mauvais groupe*.

La discussion qui précède la question montre qu'un mauvais groupe simple est un contreexemple à la conjecture de Cherlin et Zil'ber. Il est assez facile de montrer que si un mauvais groupe existe, il en existe un qui est simple. Il y a d'autres définitions de cette notion dans la littérature mais nous retiendrons celle que nous avons donnée.

Chapitre 7

Corps et généricité

Dans ce chapitre nous étudierons certains liens entre les corps (plus précisément mauvais corps en caractéristique p) de rang de Morley fini et la notion de généricité. Cette étude dépend d'un théorème très important de Frank Wagner et permet d'obtenir de résultats de conjugaison de certaines familles de sous-groupes des groupes de rang de Morley fini. Nous commencerons en exposant un résumé de la preuve du théorème de Wagner.

7.1 Corps

Nous introduisons une notion importante de la théorie des modèles.

Définition 7.1 Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre, \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure et $X \subseteq M$. Un élément $a \in M$ est dit algébrique sur X si l'orbite de a sous l'action du groupe d'automorphismes de \mathcal{M} qui fixent X point par point est fini. La clôture algébrique de X , notée $\text{acl}(X)$, est l'ensemble des éléments algébriques sur X .

Une motivation pour la notion de clôture algébrique au sens de la théorie des modèles est la notion similaire de la théorie des corps. Par contre, même quand les structures considérées sont définies sur des corps, il n'est pas nécessaire que ces deux notions soient équivalentes. Le théorème de Wagner ci-dessous résulte de la recherche d'un contexte où une telle équivalence existe. Dans tous les raisonnements que nous essayerons d'exposer, l'appellation corps sera utilisée pour des structures de corps qui peuvent avoir des propriétés additionnelles, en d'autres termes des propriétés qui ne sont pas nécessairement définissables à partir du pur langage des corps $\{+, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1\}$.

Notons aussi que ce que nous appelons "théorème" ci-dessous n'était pas appelé théorème par Wagner, ni énoncé sous cette forme. Par contre ce point de vue des résultats de Wagner et l'information qu'il fournit pour la section suivante semblent justifier notre choix. Bien évidemment les mêmes résultats peuvent être étudiés d'autres optiques aussi. C'est ce que Wagner a récemment fait en trouvant des liens entre les mauvais corps en caractéristique non nulle et certaines conjectures de l'arithmétique.

Dans la suite, pour un corps K , nous noterons K_a la clôture algébrique du corps premier de K relativement à K .

Théorème 7.2 (Wagner, 1999) Soit $\mathcal{K} = (K, +, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1, T)$ un corps de rang de Morley fini en caractéristique $p \neq 0$ avec $T \leq K^\times$. Alors $(K_a, K_a \cap T, \dots) \preceq (K, T, \dots)$.

Lemme 7.3 (Wagner, 1999) Soient \mathcal{L} un langage du premier ordre et \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure telle que tout ensemble définissable sans paramètres dans \mathcal{M} ait une intersection non vide avec $\text{acl}(\emptyset)$. Alors $\text{acl}(\emptyset) \preceq \mathcal{M}$.

Preuve. La preuve est une application du test de Tarski. Soit $X_0 = \phi(\bar{x}; \bar{a})$ où \bar{a} est un n -uple de $\text{acl}(\emptyset)$. Alors il existe un nombre fini de conjugués de X_0 sous l'action des automorphismes de \mathcal{M} . Nous les notons X_0, \dots, X_n et nous posons $X = \bigcup_{i=0}^n X_i$. L'ensemble X est stable sous l'action des automorphismes de \mathcal{M} . Donc, par hypothèse, $X \cap \text{acl}(\emptyset) \neq \emptyset$. Il existe donc $0 \leq i \leq n$ tel que $X_i \cap \text{acl}(\emptyset) \neq \emptyset$. Or X_0 est l'image de X_i sous l'action d'un automorphisme de \mathcal{M} . Donc, $X_0 \cap \text{acl}(\emptyset) \neq \emptyset$.

La conclusion du dernier paragraphe montre que si $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ est comme ci-dessus et que $\mathcal{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{a})$, alors il existe \bar{b} extrait de $\text{acl}(\emptyset)$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{b}, \bar{a})$. En plus $\text{acl}(\emptyset)$ est une sous-structure de \mathcal{M} (pourquoi?). Donc on peut conclure en utilisant le test de Tarski que $\text{acl}(\emptyset) \preceq \mathcal{M}$. \square

Lemme 7.4 *Un corps (commutatif) de rang de Morley fini n'a pas de sous-anneau infini définissable et propre.*

Preuve. Soient K un corps de rang de Morley fini et k un sous-anneau infini définissable et propre de K . Montrons d'abord que k est un corps.

Les idéaux non nuls et définissables de k sont aussi des groupes additifs définissables dans la structure et ils sont donc rangés. Alors il en existe qui sont minimaux. Soit I un tel idéal minimal. Si a est un élément non nul de I , alors $I = Ra$. Soit maintenant $x \in R^\times$. Nous montrerons que x est inversible dans R , ce qui finira la preuve. Or $I = Rax$ aussi, puisque $ax \neq 0$ par le fait que K soit intègre. Alors il existe y tel que $axy = a$. Alors on simplifie toujours en utilisant l'intégrité et on trouve $xy = 1$.

Le théorème de Macintyre sur les corps montre alors que k est algébriquement clos. Si $k < K$ alors K/k est de degré infini et K contient des copies de k^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cela contredit la finitude du rang de K . \square

Lemme 7.5 (Wagner, 1990) *Soient K un corps de rang de Morley fini et X un sous-ensemble infini et définissable de K . Alors il existe a_1, \dots, a_n dans K_a tels que $K = a_1X + \dots + a_nX$.*

Preuve. Un usage du lemme de König similaire au raisonnement utilisé dans la preuve du théorème 4.10 permet trouver un sous-ensemble additivement indécomposable Y de X dans une extension élémentaire K' de K . Soit $y \in Y$. On pose $Y' = Y - y$. Pour $a \in K_a$ l'ensemble aY' est infini et additivement indécomposable. En plus il contient 0. Alors, le théorème des indécomposables de Zil'ber montre que le groupe additif $A = \langle aY' : a \in K_a \rangle$ s'écrit $a_1Y' + \dots + a_nY'$ où les a_i proviennent de K_a . Or l'ensemble $\{x \in K' : xA \leq A\}$ est un sous-anneau définissable de K' qui contient K_a . Alors d'après le lemme 7.4, $K' = \{x \in K' : xA \leq A\}$. Donc A est un idéal de K' . Comme $A \neq 0$, $A = K'$. Il en découle que $a_1X + \dots + a_nX \supseteq K' + (a_1 + \dots + a_n)y = K'$. La même égalité est vraie dans K aussi. \square

La preuve du théorème 7.2 utilise le théorème suivant de Wagner :

Théorème 7.6 (Wagner, 1990) *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Si $H \leq G$ est un sous-groupe quelconque (pas nécessairement définissable) de G et que X est générique dans $d(H)$ alors $X \cap H \neq \emptyset$.*

Notons que ce théorème est valable pour les groupes stables à condition de faire les changements nécessaires pour que son énoncé ait un sens.

La proposition suivante de Wagner est cruciale pour la preuve de son théorème. La preuve, quoique courte, est subtile, et elle nécessite des outils qui n'ont pas été introduits dans ce cours.

Proposition 7.7 (Wagner, 1999) *Soit $\mathcal{K} = (K, \dots)$ un corps de rang de Morley fini. Si X est un ensemble définissable avec paramètres provenant de $\text{acl}(\emptyset)$, alors $X \cap \text{acl}(\emptyset) \neq \emptyset$.*

Le corollaire suivant qui découle immédiatement de la proposition 7.7 est crucial pour le reste.

Corollaire 7.8 (Wagner, 1999) Soit $\mathcal{K} = (K, \dots)$ un corps de rang de Morley fini. Alors $\text{acl}(\emptyset) \preceq \mathcal{K}$.

L'automorphisme de Frobenius est une différence remarquable entre les corps de caractéristique nulle et ceux qui sont de caractéristique $p \neq 0$.

Proposition 7.9 (Wagner, 1999) Soit $\mathcal{K} = (K, \dots)$ une structure de corps de caractéristique $p \neq 0$. Si l'automorphisme σ de Frobenius $x \mapsto x^p$ de $(K, +, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1)$ est aussi un automorphisme de \mathcal{K} , alors $\text{acl}(\emptyset) = K_a$.

Preuve. Clairement $K_a \subseteq \text{acl}(\emptyset)$. Soit $x \in K \setminus K_a$. Alors x a une infinité de conjugués sous l'action des puissances de σ . Or, par hypothèse, σ est aussi un automorphisme de la structure \mathcal{K} . Il en découle que $x \notin \text{acl}(\emptyset)$. \square

Preuve du Théorème 7.2. Soit \mathcal{K} comme dans l'énoncé du théorème. On notera σ l'automorphisme de Frobenius. Comme le groupe multiplicatif d'un corps de caractéristique $p \neq 0$ n'a pas d'élément d'ordre p , T est p -divisible. Donc $\sigma(T) \leq T$. Comme σ préserve les rang et degré de Morley en ce qui concerne la structure algébrique de K , $\sigma(T) = T$. Donc σ est un automorphisme de \mathcal{K} . Alors, d'après la proposition 7.9, $\text{acl}(\emptyset) = K_a$. Il découle du corollaire 7.8 que $(K_a, K_a \cap T, \dots) \preceq (K, T, \dots)$. \square

7.2 Généricité dans les groupes

Dans cette section nous introduirons la notion de *bon tore* qui nous permettra de montrer que certaines familles de sous-groupes d'un groupe de rang de Morley fini forment des unions génériques. Ce genre de résultats de généricité est très important pour comprendre la structure des groupes de rang de Morley fini. Entre autres choses, ils permettent parfois de démontrer que certaines familles de sous-groupes forment une classe de conjugaison. Les théorèmes de conjugaison, à commencer par le théorème de Sylow pour les groupes finis, sont fondamentalement importants pour étudier diverses classes de groupes nonabéliens, et les groupes de rang de Morley fini ne font pas exception à cette règle.

Définition 7.10 (Cherlin, 2002) Un groupe D divisible et abélien de rang de Morley fini est dit un bon tore si tout sous-groupe définissable de D est la clôture définissable de sa torsion.

Le théorème 7.2 est la principale source d'exemples de bons tores.

Lemme 7.11 Soit K un corps de rang de Morley fini de caractéristique $p \neq 0$. Alors K^\times est un bon tore.

Preuve. Soit T un sous-groupe définissable de K^\times . Nous montrerons que $T = d(\text{Tor}(T))$ où $\text{Tor}(T)$ est l'ensemble des éléments de torsion de T , en d'autres termes les éléments d'ordre fini de T . Posons $T_1 = d(\text{Tor}(T))$. La structure (K, T, T_1) est de rang de Morley fini. Comme l'automorphisme de Frobenius est un automorphisme de la structure (K, T, T_1) , le théorème 7.2 montre que $(K_a, K_a \cap T, K_a \cap T_1) \preceq (K, T, T_1)$. Or $T \cap K_a = T_1 \cap K_a$ et cette égalité est préservée dans une extension élémentaire de $(K_a, K_a \cap T, K_a \cap T_1)$. Donc, $T = T_1$. \square

Dans le reste de cette section nous montrerons comment on peut utiliser la notion de bon tore pour arriver à des résultats de généricité. Cela nous permettra de conclure que sous certaines hypothèses les bons tores d'un groupe de rang de Morley fini forment une classe de conjugaison. Une telle conclusion s'avère particulièrement utile dans le contexte des groupes de rang de Morley fini pour plusieurs raisons : comme la notion de bon tore lie un sous-groupe définissable à ses éléments d'ordre fini, un résultat de conjugaison de bons tores a des similarités avec le théorème de Sylow pour les groupes finis. Un tel théorème n'est connu dans le contexte des groupes de rang de Morley fini que pour le nombre premier 2 à moins que d'autres hypothèses soient imposées au groupe de rang de Morley fini étudié (par exemple résolubilité) :

Théorème 7.12 (Borovik-Poizat, 1990) *Les 2-sous-groupes de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini sont conjugués.*

Dans ce contexte où nous avons affaire à des groupes infinis, définissons sans ambiguïté ce que nous entendons par un p -sous-groupe de Sylow : c'est un p -sous-groupe maximal. Rappelons qu'un p -groupe est un groupe dont tous les éléments sont d'ordre une puissance de p . Comme l'existence d'un tel théorème pour les autres nombres premiers est ouvert et qu'un groupe de rang de Morley fini peut en outre contenir des éléments d'ordre infini, tout résultat de conjugaison (ou de généralité) pour les bons tores est utile.

Avant de commencer nos arguments, soulignons une faiblesse de la notion de bon tore. Il n'est pas clair si une extension élémentaire d'un bon tore est un bon tore. Comme nous aurons besoin des arguments de compacité dans ce qui suit, nous supposons que la structure ambiante soit ω -saturée. Ça dévie de la philosophie Borovik-Poizat de la section 5.2 qui évitait de sortir du même modèle en étudiant les groupes de rang de Morley fini mais cela ne cause pas de problème.

Lemme 7.13 *Soit D un bon tore interprétable dans une structure ω -saturée. Toute famille uniformément définissable de sous-groupes de D est finie.*

Preuve. Nous posons $\mathcal{F} = \{\phi(x, \bar{a}) : \bar{a} \in D^n\}$, où les $\phi(x, \bar{a})$ sont des sous-groupes définissables de D obtenus en variant \bar{a} .

Nous montrerons en utilisant la compacité qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$ et que T_1 et T_2 ont les mêmes éléments d'ordre au plus n , alors $T_1 = T_2$. Supposons qu'un tel n n'existe pas. Nous ajoutons au langage deux n -uplets de symboles de constantes \bar{a} et \bar{b} et nous définissons l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{Th}(D) \\ &\cup \{ \text{“}\phi(x, \bar{a}) \text{ et } \phi(x, \bar{b}) \text{ sont des sous-groupes”} \} \\ &\cup \{ \forall x ((x^n = 1) \rightarrow (\phi(x, \bar{a}) \leftrightarrow \phi(x, \bar{b}))) : n \in \mathbb{N}^* \} \\ &\cup \{ \exists x ((\phi(x, \bar{a}) \wedge \neg \phi(x, \bar{b})) \vee (\neg \phi(x, \bar{a}) \wedge \phi(x, \bar{b}))) \} \end{aligned}$$

Par compacité cet ensemble est consistant. Comme D est interprétable dans une structure ω -saturée, D a deux sous-groupes distincts qui partagent les mêmes éléments d'ordre fini. Cela contredit que T est un bon tore.

La conclusion du paragraphe précédent et la finitude des éléments d'ordre p dans un groupe divisible et abélien de rang de Morley fini (DM6, exercice 3) montrent que \mathcal{F} ne contient qu'un nombre fini de sous-groupes. \square

Lemme 7.14 *Soient G un groupe de rang de Morley fini et $B \leq G$ un sous-groupe définissable tels que $|N_G(B) : B| < \infty$. Supposons qu'il existe $X \subseteq B$ définissable et non générique dans B tel que pour tout $g \in G \setminus N_G(B)$, $B \cap B^g \subseteq X$. Alors $\bigcup_{g \in G} B^g$ est générique dans G .*

Preuve. Nous définissons l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \Psi & : & G \times (B \setminus X) \longrightarrow \bigcup_{g \in G} (B \setminus X)^g \\ & & (g, b) \longmapsto b^g \end{array}$$

Nous obtiendrons une majoration des rang des fibres de cette application à laquelle nous appliquerons l'exercice 2 du DM 7. Pour $b_1, b_2 \in (B \setminus X)$ et $g_1, g_2 \in G$, $b_1^{g_1} = b_2^{g_2}$ si et seulement si $b_1^{g_1 g_2^{-1}} = b_2$. Alors $b_1 \in B \cap B^{g_1 g_2^{-1}}$, et le choix de b_1 et la définition de X impliquent que $g_1 g_2^{-1} \in N_G(B)$. Cela montre que la fibre sur $b_1^{g_1}$ est un sous-ensemble de $\{(g_2, b_1^{g_1 g_2^{-1}}) : g_1 g_2^{-1} \in N_G(B)\}$. Cet ensemble s'injecte dans une classe dans G de $N_G(B)$. Donc les rangs des fibres de Ψ sont majorés par $\text{rk}(N_G(B))$. Alors l'exercice susmentionné nous permet de conclure que

$$\text{rk}(G) + \text{rk}(B \setminus X) \leq \text{rk}\left(\bigcup_{g \in G} (B \setminus X)^g\right) + \text{rk}(N_G(B))$$

Or B est d'indice fini dans son normalisateur et X n'est pas générique dans B . Donc $\text{rk}(B \setminus X) = \text{rk}(B) = \text{rk}(N_G(B))$ et nous obtenons

$$\text{rk}(G) \leq \text{rk}\left(\bigcup_{g \in G} (B \setminus X)^g\right) \leq \text{rk}\left(\bigcup_{g \in G} B^g\right)$$

□

Lemme 7.15 *Soient G un groupe de rang de Morley fini ω -saturé et $B \leq G$ un bon tore définissable tel que $|N_G(B) : B| < \infty$. Alors $\bigcup_{g \in G} B^g$ est générique dans G .*

Preuve. Notons d'abord que si $B \triangleleft G$, alors par hypothèse B est d'indice fini dans G et donc B est générique dans G . Donc nous pouvons supposer qu'il existe $g \in G \setminus N_G(B)$.

Le lemme 7.13 montre qu'il existe $g_1, \dots, g_m \in G$ tels que

$$\{B \cap B^g : g \in G\} = \{B \cap B^{g_i} : 1 \leq i \leq m\}$$

Comme pour $g \in G \setminus N_G(B)$, $\text{rk}(B \cap B^g) < \text{rk}(B)$ (B est connexe et nontrivial), $B \cap \left(\bigcup_{g \in G \setminus N_G(B)} B^g\right)$ n'est pas générique dans B d'après le lemme 5.14. La conclusion découle du lemme 7.14. □

Proposition 7.16 *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et ω -saturé, $B \leq G$ un bon tore d'indice fini dans son normalisateur. Si $B_1 \leq G$ est définissable et connexe et que $\mathcal{B}_1 = \bigcup_{g \in G} B_1^g$ est générique dans G alors B est conjugué à un sous-groupe de B_1 .*

Preuve. Nous posons $\mathcal{B} = \bigcup_{g \in G} B^g$, $X = B \setminus \mathcal{B}_1$ et $Y = B \cap \mathcal{B}_1$. Il suffit de démontrer que Y est générique dans B . En effet, le lemme 7.13 montre qu'il existe $g_1, \dots, g_m \in G$ tels que $Y = B \cap \bigcup_{i=1}^m B_1^{g_i}$. Donc si Y est générique dans B , alors il existe g_i tel que $B \cap B_1^{g_i}$ soit générique dans B en utilisant le lemme 5.14. Or B est connexe et donc $B = B \cap B_1^{g_i}$.

Supposons maintenant par l'absurde que Y ne soit pas générique dans B . Nous définissons l'application

$$\begin{aligned} \Psi & : (G/B) \times Y & \longrightarrow & \bigcup_{g \in G} Y^g \\ & (Bg, y) & \longmapsto & y^g \end{aligned}$$

Comme B est commutatif et que $Y \subseteq B$, pour tout $b \in B$, $y^{bg} = y^g$ et l'application est bien définie. En plus, elle est interprétable dans G et surjective. Le lemme 5.16 implique alors que

$$\text{rk}(G/B) + \text{rk}(Y) \geq \text{rk}\left(\bigcup_{g \in G} Y^g\right)$$

L'hypothèse de nongénéricité de Y dans B implique que $\text{rk}(Y) < \text{rk}(B)$. Alors, nous concluons

$$\text{rk}(G) > \text{rk}(G/B) + \text{rk}(Y) \geq \text{rk}\left(\bigcup_{g \in G} Y^g\right)$$

D'après le lemme 7.15, \mathcal{B} est générique dans G . Comme

$$\mathcal{B} = \left(\bigcup_{g \in G} X^g\right) \sqcup \left(\bigcup_{g \in G} Y^g\right),$$

$\bigcup_{g \in G} X^g$ est générique dans G . Or \mathcal{B}_1 est supposé générique dans G qui est connexe. Donc $\mathcal{B}_1 \cap \left(\bigcup_{g \in G} X^g\right) \neq \emptyset$, c'est absurde. □

Corollaire 7.17 *Dans un groupe connexe et ω -saturé de rang de Morley fini, les bons tores d'indice fini dans leurs normalisateurs sont conjugués.*