Théorie des modèles

Frank Wagner

Leçon 1

Langage et structure

En théorie des modèles on n'analyse pas une seule structure, comme les entiers où les complexes, mais on prend une *classe* de structures, et on cherche à déterminer les propriétés communes des structures dans cette classe. En général, une telle classe est aussi déterminée par des propriétés, comme par exemple la classe des corps, ou la classe des groupes abéliens. Parlons donc des propriétés.

Pour exprimer une propriété, il nous faut d'abord un langage.

Définition 1.1 Un *langage* $\mathcal{L}$ est l'union (disjointe) d'un ensemble $\mathcal{C}$ de symboles de constantes, d'un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonctions, et d'un ensemble $\mathcal{R}$ de symboles de relations. A chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque $R \in \mathcal{R}$ est associé un entier, l'*arité*, qui indique le nombre d'arguments.

En plus, on aura les variables, qui seront notés $x, y, z, \ldots, x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Remarque 1.2 Une fonction d'arité 0 est une constante. Il y a deux relations d'arité 0 : la relation $\top$ qui est toujours vraie, et la relation $\perp$ qui est toujours fausse.

Exemple 1.3

1. Le langage des ordres $\mathcal{L}_{ord}$ ne contient ni constantes ni fonctions, mais deux relations binaires $=$ et $<$.
2. Le langage des groupes $\mathcal{L}_{gp}$ contient une constante 1, une fonction unaire $^{-1}$, une fonction binaire $*$, et une relation binaire $=$.
3. Le langage $\mathcal{L}_{ann}$ des anneaux contient trois fonctions binaires (d'arité deux) $+$, $-$ et $*$, une relation binaire $=$, et deux constantes 0 et 1.

On utilise ce langage pour former des mots et des phrases.

Définition 1.4 Soit $\mathcal{L}$ un langage. La collection des *$\mathcal{L}$-termes* est défini récursivement par :

- toute constante et toute variable est un $\mathcal{L}$-terme.
- si $f \in \mathcal{F}$ est une fonction n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des $\mathcal{L}$-termes, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un $\mathcal{L}$-terme.

Une *$\mathcal{L}$-formule atomique* est une expression de la forme $R(t_1, \ldots, t_n)$, où $R \in \mathcal{R}$ est une relation n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des $\mathcal{L}$-termes. La collection des *$\mathcal{L}$-formules* est défini récursivement par :

- une $\mathcal{L}$-formule atomique est une $\mathcal{L}$-formule.
- si φ et ψ sont des $\mathcal{L}$-formules, leurs *combinaisons booléennes* $(\varphi \wedge \psi)$ (*conjonction, et*), $(\varphi \vee \psi)$ (*disjonction, ou*) et $\neg\varphi$ (*négation, non*) sont des $\mathcal{L}$-formules.
- si φ est une $\mathcal{L}$-formule et x est une variable, les *quantifications* $\forall x\varphi$ (*universelle, quel que soit*) et $\exists x\varphi$ (*existentielle, il y a*) sont des $\mathcal{L}$-formules. Les occurrences de la variable x dans ces formules sont *liées* à ce quanteur $\forall$ ou $\exists$ (sauf si elles sont déjà liées à un quanteur dans φ). Une variable qui n'est pas liée est *libre*.

Un *énoncé*, ou une *formule close*, est une formule sans variable libre ; une formule *positive* est une formule sans négation.

Exemple 1.5

1. Les seuls termes de $\mathcal{L}_{ord}$ sont les variables ; les $\mathcal{L}_{ord}$-formules atomiques sont les égalités et les inégalités.
2. Parmi les termes de $\mathcal{L}_{gp}$, il y a les produits des variables et leurs inverses (le produit vide étant égale à 1) ; en effet, modulo les lois de groupe chaque terme est équivalent à un tel produit. Donc les $\mathcal{L}_{gp}$-formules atomiques sont les équations.
3. Parmi les termes de $\mathcal{L}_{ann}$, il y a les polynômes (en plusieurs variables) à coefficients dans $\mathbb{Z}$, où l'entier n est une abréviation pour $1 + \ldots + 1$ (somme de n fois 1), et x^n dénote $x * \cdots * x$ (produit de n fois x) ; dans un anneau commutatif tout terme est équivalent à un tel polynôme. Donc, dans un anneau commutatif, les $\mathcal{L}_{ann}$-formules atomiques sont les équations polynômiales.

Lemme 1.6 [Lecture unique]

1. *Soit t un $\mathcal{L}$-terme. Alors soit t est une constante ou une variable (uniquement déterminée), soit il y a une fonction f d'arité n, et des $\mathcal{L}$-termes $t_n, \ldots, t_n$, uniquement déterminés, tels que t est $f(t_1, \ldots, t_n)$.*

2. *Soit φ une $\mathcal{L}$-formule. Alors φ tombe dans un (et un seul) des cas suivants :*

   (a) *φ est atomique et il y a une relation R d'arité n, et des $\mathcal{L}$-termes $t_n, \ldots, t_n$, uniquement déterminés, tels que φ est $R(t_1, \ldots, t_n)$,*

   (b) *Il y a une formule ψ uniquement déterminée telle que φ est $\neg\psi$.*

   (c) *Il y a deux formules ψ_1 et ψ_2 uniquement déterminées telles que φ est $(\psi_1 \wedge \psi_2)$.*

   (d) *Il y a deux formules ψ_1 et ψ_2 uniquement déterminées telles que φ est $(\psi_1 \vee \psi_2)$.*

   (e) *Il y a une formule ψ et une variable x uniquement déterminées telles que φ est $\exists x \psi$.*

   (f) *Il y a une formule ψ et une variable x uniquement déterminées telles que φ est $\forall x \psi$.*

Démonstration :

1. Par récurrence sur le nombre d'étapes dans la construction d'un terme (que l'on ne suppose pas encore unique) on se rend compte que dans un terme

   - il y a le même nombre de "(" que de ")", et
   - toute virgule "," est précédée par plus de "(" que de ")".

   Notons qu'un terme formé par itération comporte au moins les deux parenthèses, donc est de longueur au moins deux. Donc, si t est un mot de longueur un (un seul symbole), t est soit une constante, soit une variable, qui est évidemment uniquement déterminée. Si t est de longueur supérieure à un, t n'est ni constante ni variable. Donc t est créé itérativement ; le premier symbole de t est une fonction $f \in \mathbb{F}$, déterminée uniquement, d'une certaine arité n. Comme t est un terme, il y a des termes $t_1, \ldots, t_n$ tels que t est $f(t_1, \ldots, t_n)$. Supposons donc que cette lecture n'est pas unique, qu'il y a d'autres termes $s_1, \ldots, s_n$ tels que t se lit aussi $f(s_1, \ldots, s_n)$. Si s_1 n'est pas le même que t_1, alors soit s_1 est un segment initial propre de t_1, soit t_1 en est un de s_1. Donc soit t_1 est $s_1, \ldots$, soit s_1 est $t_1, \ldots$; dans les deux cas la virgule est précédée par autant de "(" que de ")", une contradiction. Donc t_1 est le même que s_1, et on peut répéter avec t_2 et s_2, ensuite t_3 et s_3, etc.

2. Par récurrence sur le nombre d'étapes dans la construction d'une formule (que l'on ne suppose pas encore unique) on se rend compte que dans une formule

   - il y a le même nombre de "(" que de ")", et
   - tout "$\wedge$" et tout "$\vee$" est précédée par plus de "(" que de ")".

   Si une formule φ commence par une négation "$\neg$", on est forcément dans le cas (b), et φ est de la forme $\neg\psi$, où ψ est la formule obtenue en supprimant le premier symbole "$\neg$".

   Si φ commence par un quanteur "$\exists$" ou "$\forall$", on est dans le cas (e) ou (f) ; le second symbole est la variable, et le reste la formule ψ.

   Si φ commence par un symbole de relation $R \in \mathbb{R}$, elle est atomique ; si n est l'arité de R, il existe n termes $t_1, \ldots, t_n$ tels que φ est $R(t_1, \ldots, t_n)$. L'unicité de ces termes se montre comme pour la lecture unique des termes.

   Si φ commence par une parenthèse "(", on est dans le cas (c) ou (d). Supposons par exemple que φ se lit à la fois $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ et $(\psi_1' \wedge \psi_2')$, où ψ_1 est un segment initial propre de ψ_1'. Donc ψ_1' est $\psi_1 \wedge \ldots$, et la virgule est précédée par autant de "(" que de ")", une contradiction. Alors ψ_1 est ψ_1', le prochain symbole est le connecteur booléen ($\wedge$ ou $\vee$, uniquement déterminée), et le reste (sauf la parenthèse finale) est ψ_2. Les autres cas sont analogues. ■

Maintenant que l'on a fixé la syntaxe, il nous faut des objets.

Définition 1.7 Soit $\mathcal{L}$ un langage. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est un ensemble M, le *domaine* de $\mathfrak{M}$ (souvent confondu avec $\mathfrak{M}$), et

- pour chaque symbole $c \in \mathcal{C}$ un élément $c^{\mathfrak{M}} \in M$.

- pour chaque symbole $f \in \mathcal{F}$ d'arité n une fonction $f^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$.

- pour chaque symbole $R \in \mathcal{R}$ d'arité n un sous-ensemble $R^{\mathfrak{M}}$ de M^n.

Définition 1.8 Soit $\mathcal{L}$ une langage, et $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Si $\bar{m}$ est un uple d'éléments de M et $\bar{x}$ est un uple de variables (de la même longueur) dans un terme $t(\bar{x})$, on peut substituer $\bar{m}$ pour toutes les occurences de $\bar{x}$ dans t et obtenir un terme $t(\bar{m})$, un terme à *paramètres* $\bar{m}$. Nous allons définir l'*interprétation* $t^{\mathfrak{M}}$ d'un terme t à paramètres dans $\mathfrak{M}$ *clos* (sans variable) récursivement par :

- l'interprétation d'une constante c est $c^{\mathfrak{M}}$; l'interprétation d'un paramètre m est m.

- si $f \in \mathcal{F}$ est une fonction n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes à paramètres, alors $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}})$.

Donc l'interprétation associe à chaque terme clos (avec paramètres) un élément de M.

De même, pour une formule $\varphi(\bar{x})$, on peut substituer $\bar{m}$ pour toutes les occurences *libres* de $\bar{x}$ dans φ et obtenir une formule $\varphi(\bar{m})$ avec paramètres. (Par unicité de lecture, la liberté d'une variable est uniquement déterminée.) Nous allons définir la *satisfaction* d'une formule close avec paramètres dans $\mathfrak{M}$ récursivement par :

- si $\varphi(\bar{m})$ est $R(t_1(\bar{m}), \ldots, t_n(\bar{m}))$ est une formule atomique, où $R \in \mathcal{R}$ est une relation n-aire et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $\varphi(\bar{m})$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si $(t_1(\bar{m})^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n(\bar{m})^{\mathfrak{M}}) \in R^{\mathfrak{M}}$.

- si φ est $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si φ_1 et φ_2 sont satisfaites dans $\mathfrak{M}$.

- si φ est $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si φ_1 ou φ_2 (ou bien les deux) est satisfaite dans $\mathfrak{M}$.

- si φ est $\neg\psi$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si ψ n'est pas satisfaite dans $\mathfrak{M}$.

- si φ est $\forall x \psi(x)$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ si pour tout $m \in M$ la formule $\psi(m)$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$.

- si φ est $\exists x\psi(x)$, alors φ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$ s'il y a un $m \in M$ tel que $\psi(m)$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$.

Si $\varphi(\bar{m})$ est satisfaite dans $\mathfrak{M}$, on le dénote par $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$; on dit aussi que $\varphi(\bar{m})$ est *vrai* dans $\mathfrak{M}$, ou que $\mathfrak{M}$ *satisfait* $\varphi(\bar{m})$.

Remarque 1.9 C'est cette définition de la satisfaction qui donne le sens usuel au connecteurs booléens et au quanteurs. Avant, ce n'étaient que des symboles manipulés de manière purement syntaxique. Notons également que la définition est possible grâce au lemme d'unicité de lecture.

On peut aussi voir les choses de l'autre côté : si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$, on dit également que $\bar{m}$ satisfait $\varphi(\bar{x})$ dans $\mathfrak{M}$, et on écrit $\bar{m} \models_{\mathfrak{M}} \varphi(\bar{x})$. Souvent on confond f et $f^{\mathfrak{M}}$, R et $R^{\mathfrak{M}}$, et c et $c^{\mathfrak{M}}$. Donc, dans un anneau R, on parlera de $+$, $-$, $*$, et pas de $+^R$, $-^R$, $*^R$.

Convention 1.10 *Dans ce cours, l'égalité $=$ fera partie de tous les langages, et sera toujours interpretée par la vraie égalité. (Si $=$ n'est pas interpreté par la vrai égalité, mais on considère une structure où les axiomes habituels de l'égalité sont satisfaits — qu'elle soit une congruence pour toutes les fonctions et relations —, alors on pourra quotienter par $=$; comme c'est une congruence, ça nous induit une $\mathcal{L}$-structure sur l'ensemble des classes modulo $=$, qu'on peut substituer pour la structure originale.)*

Exemple 1.11

1. Considérons une $\mathcal{L}_{ord}$-structure $\mathfrak{M}$ satisfaisant :

   (a) $\forall x\, \neg x < x$.

   (b) $\forall x\, \forall y\ ((x < y \vee y < x) \vee x = y)$.

   (c) $\forall x\, \forall y\, \forall z\ \neg((x < y \wedge y < z) \wedge (z = x \vee z < x))$.

   Alors la relation $<^{\mathfrak{M}}$ est anti-réfléxive, totale, et transitive, donc un ordre total. L'orde est sans extrémité si $\mathfrak{M}$ satisfait

   $$\forall x\, \exists y\, \exists z\ (y < x \wedge x < z)\ ;$$

   il est dense si $\mathfrak{M}$ satisfait

   $$\forall x \forall y\ ((x = y \vee y < x) \vee \exists z\, (x < z \wedge z < y)).$$

2. Considérons une $\mathcal{L}_{gp}$-structure $\mathfrak{M}$. Elle est un groupe si elle satisfait :

(a) $\forall x\ (x * 1 = x \wedge 1 * x = x)$.

(b) $\forall x\ (x * x^{-1} = 1 \wedge x^{-1} * x = 1)$.

(c) $\forall x \forall y \forall z\ x * (y * z) = (x * y) * z$.

Le groupe est abélien si $\forall x \forall y\ x * y = y * x$ est vrai.

3. Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}_{ann}$-structure. Elle est un corps (commutatif) si

   (a) $(M, 0, +^{\mathfrak{M}})$ est un groupe abélien. (Qu'est-ce qu'on fait pour l'inverse ?)

   (b) $(M - \{0\}, 1, *^{\mathfrak{M}})$ est un groupe abélien. (Comment dire ça par un énoncé ?)

   (c) $\forall x \forall y \forall z\ x * (y + z) = x * y + x * z$.

Si Φ est un ensemble d'énoncés et $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, on écrit $\mathfrak{M} \models \Phi$ si $\mathfrak{M} \models \varphi$ pour tout $\varphi \in \Phi$; on dit que $\mathfrak{M}$ satisfait Φ, que $\mathfrak{M}$ *réalise* Φ, ou bien que $\mathfrak{M}$ est un *modèle* de Φ.

Définition 1.12 Soient $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ deux $\mathcal{L}$-formules. On dit que $\varphi(\bar{x})$ *implique* $\psi(\bar{x})$ si pour tout $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ et tout $\bar{m} \in M$, si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$, alors $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{m})$.

Deux formules $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont *équivalentes* si φ implique ψ et ψ implique φ.

On a la même définition pour des ensembles $\Phi(\bar{x})$ et $\Psi(\bar{x})$ de $\mathcal{L}$-formules.

Lemme 1.13 *Pour toutes φ et ψ, les formules suivantes sont équivalentes :*

- *φ et $\neg\neg\varphi$.*
- *$\neg(\varphi \wedge \psi)$ et $(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ainsi que $\neg(\varphi \vee \psi)$ et $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$* (de Morgan).
- *$\forall x \neg\varphi$ et $\neg\exists x \varphi$, ainsi que $\exists x \neg\varphi$ et $\neg\forall x \varphi$.*

Démonstration : Par exemple, pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ et tout $\bar{m}$ dans $\mathfrak{M}$ on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models \neg\neg\varphi(\bar{m}) &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models \neg\varphi(\bar{m}) \\ &\Leftrightarrow \text{il n'est pas vrai que } \mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{m}) \\ &\Leftrightarrow \text{il n'est pas vrai que } \mathfrak{M} \not\models \varphi(\bar{m}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 1.14 *Toute formule est équivalente à une formule qui n'utilise qu'un des deux connecteurs booléens, et qu'un des deux quanteurs.*

Démonstration : Grâce au Lemme 1.13 on élimine itérativement un des connecteurs et un des quanteurs. ■

Nous utiliserons aussi les abbréviations suivantes : $(\varphi \rightarrow \psi)$ pour $(\neg\varphi \vee \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ pour $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$. On doit faire attention : ces connecteurs cachent des négations, et sont interdits dans les formules positives.

Exercice 1.15 Deux formules $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ sont équivalentes si et seulement si $\forall \bar{x}\ (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ est vrai dans toute $\mathcal{L}$-structure.

Exercice 1.16 Dans une conjonction ou une disjonction de plusieurs arguments, $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ ou $\varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_n$, tout choix des parenthèses donne une formule équivalente.

A partir d'ici on va supprimer les parenthèses superflues. On notera $\bigwedge_{i \leq n} \varphi_i$ une conjonction $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$, et $\bigvee_{i \leq n} \varphi_i$ une disjonction $\varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_n$.

Définition 1.17 Une formule est *prénexe* si elle est de la forme

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \varphi,$$

où $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ pour tout $i \leq n$, et φ ne contient pas de quanteur.

Exercice 1.18 Toute formule est équivalente à une formule prénexe.

Définition 1.19 Soient $\{\varphi_i : i < n\}$ des formules, et φ une combinaison booléenne des φ_i. Alors φ est en *forme disjonctive* si elle est une disjonction de conjonctions de formules φ_i ou $\neg\varphi_i$; elle est en *forme conjonctive* si elle est une conjonction de disjonctions de formules φ_i ou $\neg\varphi_i$. La forme est *normale* si chaque conjonction/disjonction contient tous les $\{\varphi_i : i < n\}$ précisément une fois, soit positivement, soit en négation.

Exercice 1.20 Toute combinaison booléenne des formules $\{\varphi_i : i < n\}$ est équivalente à une forme disjonctive normale (où la disjonction vide est équivalente à la formule $\perp$), et également à une forme conjonctive normale (où la conjonction vide est équivalente à la formule $\top$).

Leçon 2

Equivalence élémentaire et sous-structures élémentaires

Définition 2.1 Une *$\mathcal{L}$-théorie* T est un ensemble *consistant* de $\mathcal{L}$-énoncés (qui a un modèle) ; elle est *complète* si pour chaque énoncé φ soit tout modèle de T satisfait φ, soit tout modèle satisfait $\neg\varphi$.

Donc une $\mathcal{L}$-théorie est complète si et seulement si pour tout $\mathcal{L}$-énoncé φ, soit $T \models \varphi$, soit $T \models \neg\varphi$.

Convention 2.2 *Conformément a notre convention sur l'égalité, les axiomes habituels sur $=$ feront partie de toute théorie.*

Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure et A un ensemble d'éléments dans M, la *$\mathcal{L}(A)$-théorie de* $\mathfrak{M}$, notée $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, A)$, est l'ensemble de tous les énoncés à paramètres dans A qui sont satisfaits par $\mathfrak{M}$. Il est évident que c'est une théorie complète. On pose $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) := \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \emptyset)$.

Exemple 2.3

1. La théorie des ordres denses sans extrémité est une $\mathcal{L}_{ord}$-théorie complète.

2. La théorie des groupes abéliens divisibles sans torsion est une $\mathcal{L}_{gp}$-théorie complète. Elle est donnée par la théorie des groupes abéliens, plus

   - $\forall x \, \exists y \; y * \cdots * y = x$ (produit de n fois y), pour tout entier $n > 0$.
   - $\forall x \; (x = 1 \vee \neg \, x * \cdots * x = 1$ (produit de n fois x), pour tout entier $n > 0$.

3. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p fixe est une théorie complète ; elle est donnée par les énoncés suivants :

   (a) Les axiomes des corps (commutatifs).

   (b) Soit $p = 0$, en caractéristique $p > 0$, soit $n \neq 0$ pour tout $n \in \omega$, en caractéristique 0.

   (c) $\forall y_1 \ldots \forall y_n \, \exists x \, x^n + y_1 x^{n-1} + \cdots + y_n = 0$, pour tout $n > 0$.

   On notera que les axiomes (a) et (b) donnent la théorie des corps de caractéristique p, qui est axiomatisable par un seul axiome si et seulement si $p > 0$. Les axiomes (a) et (c) forment la théorie ACF des corps algébriquement clos ; (c) ne s'exprime pas par un nombre fini d'énoncés. Finalement, (a)–(c) axiomatisent la théorie ACF_p des corps algébriquement clos de caractéristique p.

Le maximum que l'on peut dire dans notre langage d'une structure est sa théorie ; nous verrons plus tard que sauf si $\mathfrak{M}$ est fini, il est impossible que $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ caractérise $\mathfrak{M}$ à isomorphisme près. Donc, on définit :

Définition 2.4 Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont *élémentairement équivalentes*, ce qui est noté $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, si elles satisfont les mêmes énoncés.

Exemple 2.5 1. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Z}^2, <_{lex} \rangle$, où $<_{lex}$ est l'ordre lexicographique. Par contre, $\langle \mathbb{N}, < \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, < \rangle$; l'énoncé $\exists x \, \neg \exists y \, y < x$ est vrai dans $\mathbb{N}$ mais faux dans $\mathbb{Z}$.

2. $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle \equiv \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, \bar{0}, + \rangle$, mais $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}^+, 1, * \rangle$: l'énoncé $\forall x \exists y \, y + y = x$ est faux dans $\mathbb{Z}$, mais vrai dans $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $\tilde{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Alors $\langle \tilde{\mathbb{Q}}, 0, 1, +, -, * \rangle \equiv \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, -, * \rangle$ et $\langle \tilde{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle$. Par contre, $\langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, -, * \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Q}(x), 0, 1, +, -, * \rangle$; l'énoncé $\forall x \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \, [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2]^2 = x^2$ est vrai dans $\mathbb{Q}$, mais faux dans $\mathbb{Q}(x)$.

Exercice 2.6 Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont élémentairement équivalentes si et seulement si $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

Définition 2.7 Soit $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{L}$-structure. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ est une *sous-structure* de $\mathfrak{N}$, notée $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, si

- $M \subseteq N$;
- $c^M = c^N$ pour tout $c \in \mathcal{C}$;
- $f^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{N}} \restriction_{M^n}$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ n-aire, et tout $n < \omega$; et
- $R^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{N}} \cap M^n$ pour tout $R \in \mathcal{R}$ n-aire, et tout $n < \omega$.

$\mathfrak{M}$ est une sous-structure *élémentaire* de $\mathfrak{N}$ si pour toute énoncé $\varphi(\bar{m})$ à paramètres dans $\mathfrak{M}$ on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m})$. On dénote cette condition par $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.

Si $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$, on dit que $\mathfrak{N}$ est une *extension élémentaire* de $\mathfrak{M}$.

Remarque 2.8 Si $M \subseteq N$ est un ensemble qui contient les constantes et est clos par toutes les fonctions, alors les restrictions à M des relations de $\mathfrak{N}$ y induisent une $\mathcal{L}$-sous-structure $\mathfrak{M}$.

Exemple 2.9
1. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \preceq \langle \mathbb{R}, < \rangle$ et $\langle \{0\} \times \mathbb{Z}, <_{lex} \rangle \preceq \langle \mathbb{Z}^2, <_{lex} \rangle$. Par contre, $\langle 2\mathbb{Z}, < \rangle \not\preceq \langle \mathbb{Z}, < \rangle$; l'énoncé $\exists x\, (0 < x \wedge x < 2)$ est faux dans $2\mathbb{Z}$ mais vrai dans $\mathbb{Z}$..
2. $\langle \mathbb{Z} \oplus \{0\}, \bar{0}, + \rangle \preceq \langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, \bar{0}, + \rangle$, mais $\langle 2\mathbb{Z}, 0, + \rangle \not\preceq \langle \mathbb{Z}, 0, 0 \rangle$: l'énoncé $\exists x\, x + x = 2$ est faux dans $2\mathbb{Z}$, mais vrai dans $\mathbb{Z}$.
3. $\langle \tilde{\mathbb{Q}}, 0, 1, +, -, * \rangle \preceq \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, -, * \rangle$ et $\langle \tilde{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle \preceq \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, * \rangle$. Par contre, $\langle \mathbb{Q}(x^2), 0, 1, +, -, * \rangle \not\preceq \langle \mathbb{Q}(x), 0, 1, +, -, * \rangle$; l'énoncé $\exists y\, y * y = x^2$ est faux dans $\mathbb{Q}(x^2)$, mais vrai dans $\mathbb{Q}(x)$.

Définition 2.10 Un $\mathcal{L}$-morphisme d'une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ dans une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{N}$ est une application σ de M dans N qui préserve les constantes, les fonctions, et les relations. Donc :

1. $\sigma(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$ pour tout $c \in \mathcal{C}$.
2. $\sigma(f^{\mathfrak{M}}(\bar{m})) = f^{\mathfrak{N}}(\sigma(\bar{m}))$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et $\bar{m} \in M$.
3. $\bar{m} \in R^{\mathfrak{M}}$ si et seulement si $\sigma(\bar{m}) \in R^{\mathfrak{N}}$, pour tout $R \in \mathcal{R}$ et $\bar{m} \in M$.

Un $\mathcal{L}$-morphisme $\sigma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est *élémentaire* si pour tout $\mathcal{L}(M)$-énoncé $\varphi(\bar{m})$ on a $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$.

Un $\mathcal{L}$-*isomorphisme* est un $\mathcal{L}$-morphisme surjectif.

Lemme 2.11 *1. Un $\mathcal{L}$-morphisme est injectif.*

2. Un $\mathcal{L}$-morphisme préserve les formules sans quanteurs.

3. Un $\mathcal{L}$-isomorphisme est bijectif et élémentaire.

Démonstration :

1. Si $\sigma(m) = \sigma(m')$ pour $m, m' \in M$, alors $m = m'$ par préservation de la relation $=$.

2. Par récurrence sur le nombre des opérations booléennes.

3. Par récurrence sur le nombre des symboles logiques. Par 1. et 2. un $\mathcal{L}$-isomorphisme est bijectif et préserve les formules atomiques. Le cas des opérations booléennes étant trivial, on considère une formule de la forme $\exists x\, \varphi(x, \bar{m})$ vraie dans $\mathfrak{M}$. Donc il y a $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, et par hypothèse de récurrence $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(m_0), \sigma(\bar{m}))$, d'où $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \sigma(\bar{m}))$. Réciproquement, si $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \sigma(\bar{m}))$, il y a $n_0 \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \varphi(n_0, \sigma(\bar{m}))$; par surjectivité on trouve $m_0 \in M$ avec $n_0 = \sigma(m_0)$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(m_0), \sigma(\bar{m}))$ implique $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. Le cas d'un quanteur universel est analogue (ou bien on remplace $\forall x$ par $\neg\exists x \neg$). ■

Exercice 2.12 Un $\mathcal{L}$-morphisme préserve les quanteurs existentiels de la gauche à la droite, et les quanteurs universels de la droite à la gauche.

Exercice 2.13 Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des $\mathcal{L}$-structures avec $M \subseteq N$. Alors $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathfrak{N}$ si et seulement si l'injection canonique est un $\mathcal{L}$-morphisme.

Exercice 2.14 Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.
- $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}, M)$.
- l'inclusion $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est un $\mathcal{L}$-morphisme élémentaire.

Exercice 2.15 Soient $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}'$ des $\mathcal{L}$-structures.

1. Si $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N} \preceq \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}'$.

2. Si $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.

Trouver un exemple avec $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$, mais $\mathfrak{N} \not\preceq \mathfrak{N}'$.

Lemme 2.16 *Soit $(\mathfrak{M}_i : i < \omega)$ une chaîne élémentaire de $\mathcal{L}$-structures ($\mathfrak{M}_i \preceq \mathfrak{M}_{i+1}$ pour tout $i < \omega$). Alors la réunion $\mathfrak{M} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{M}_i$ est canoniquement une $\mathcal{L}$-structure qui satisfait $\mathfrak{M}_i \preceq \mathfrak{M}$ pour tout $i < \omega$.*

Démonstration : Soit $M = \bigcup_{i<\omega}$. On définit une $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{M}$ sur M comme suit :

- $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{M}_0}$ pour tout $c \in \mathcal{C}$; on notera que $\mathfrak{M}_0 \preceq \mathfrak{M}_i$ pour tout $i < \omega$ par l'exercice précédant, et donc $c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{M}_i}$ pour tout $i < \omega$.

- $f^{\mathfrak{M}}(\bar{m}) = f^{\mathfrak{M}_i}(\bar{m})$ si $\bar{m} \in M_i$, pour tout $f \in \mathcal{F}$ (d'arité n, disons) ; comme $f^{\mathfrak{M}_i} = f^{\mathfrak{M}_j} \restriction M_i^n$ pour $i < j$, ceci est bien défini et $f^{\mathfrak{M}_i} = f^{\mathfrak{M}} \restriction M_i^n$ pour tout $i < \omega$.

- $R^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{i<\omega} R^{\mathfrak{M}_i}$ pour tout $R \in \mathcal{R}$ (d'arité n, disons) ; comme $R^{\mathfrak{M}_i} = R^{\mathfrak{M}_j} \cap M_i^n$ pour $i < j$, ceci définit une relation sur M^n telle que $R^{\mathfrak{M}_i} = R^{\mathfrak{M}} \cap M_i^n$ pour tout $i < \omega$.

Il s'en suit que $\mathfrak{M}_i$ est une sous-structure de $\mathfrak{M}$ pour tout $i < \omega$. Pour vérifier qu'elle soit élémentaire, il nous suffit de voir par récurrence sur le nombre de symboles logiques que les quanteurs existentiels sont préservés de la droite à la gauche. Supposons donc que $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$, où $\varphi(x, \bar{m})$ est une formule à paramètres dans $\mathfrak{M}_i$. Donc il y a $m_0 \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, et il y a $j \geq i$ tel que $m_0 \in M_j$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{M}_j \models \varphi(m_0, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{M}_j \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. Comme $\mathfrak{M}_i \preceq \mathfrak{M}_j$, on a $\mathfrak{M}_i \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. ■

Il n'est pas toujours facile de vérifier qu'une sous-structure est élémentaire, puisque l'on doit connaître la satisfaction des énoncés dans les deux structures. Voici un critère utile qui ne mentionne que la satisfaction dans la grande structure :

Proposition 2.17 Test de Tarski *Soit $\mathfrak{M}$ une sous-structure de $\mathfrak{N}$. Alors $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ si et seulement si pour toute formule $\varphi(x)$ à paramètres dans $\mathfrak{M}$, si $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x)$, alors il y a $m \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{N} \models \varphi(m)$.*

Démonstration : Si $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x)$, alors $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x)$ et on trouve $m \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m)$, d'où $\mathfrak{N} \models \varphi(m)$.

Pour le réciproque, nous supposerons que le critère soit satisfait. Nous démontrerons par induction sur le nombre de symboles logiques d'un énoncé φ à paramètres dans $\mathfrak{M}$ que $\mathfrak{M} \models \varphi$ si et seulement $\mathfrak{N} \models \varphi$. Comme $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$, il suffit de traiter le cas d'un quanteur existentiel. Supposons donc que $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. Alors il y a $m_0 \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. Réciproquement, si $\mathfrak{N} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$, alors par hypothèse il y a $m_0 \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{N} \models \varphi(m_0, \bar{m})$. Par hypothèse de récurrence $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, \bar{m})$, et $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$. ■

Mais comment peut-on trouver ce témoin m_0 du test de Tarski ?

Définition 2.18 Soit T une $\mathcal{L}$-théorie. Pour chaque $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x, \bar{y})$ considérons un nouveau symbole de fonction $f_\varphi(\bar{y})$, et posons

$$\mathcal{L}_{Skolem} = \mathcal{L} \cup \{f_\varphi : \varphi \text{ une } \mathcal{L}\text{-formule}\}.$$

La *skolemisation* T_{Skolem} de T est la théorie suivante :

$$T \cup \{\forall \bar{y}\, [\exists x\, \varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(f_\varphi(\bar{y}), \bar{y})] : \varphi \text{ une } \mathcal{L}\text{-formule}\}.$$

Les f_φ s'appellent *fonctions de Skolem* pour la théorie T.

Remarque 2.19 Pour être précis, on doit également inclure dans T_{Skolem} les énoncés précisant que l'égalité soit une congruence pour toutes les fonctions de Skolem ainsi introduits.

Lemme 2.20 *La skolemisation d'une théorie consistante est consistante. Plus précisement, tout modèle de T a une expansion à un modèle de T_{Skolem}.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de T ; nous choisissons un élément $m_0 \in M$ et interprétons f_φ sur $\mathfrak{M}$ comme suivant :

- Si $\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi(x, \bar{m})$, on choisit $m_\varphi \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \varphi(m_\varphi, \bar{m})$ et met $f_\varphi(\bar{m}) = m_\varphi$.
- Si $\mathfrak{M} \models \neg\exists x\, \varphi(x, \bar{m})$, alors $f_\varphi(\bar{m}) = m_0$.

Il est évident que cette structure $\mathfrak{M}_{Skolem}$ satisfait T_{Skolem}. ■

Les fonctions de Skolem n'ont rien de canonique ; leur existence est une conséquence de l'axiome du choix. On appelle $\mathfrak{M}_{Skolem}$ une skolemisation de $\mathfrak{M}$.

Lemme 2.21 *Soit $\mathfrak{N}$ une structure, et $A \subseteq N$. La clôture M de A par toutes les constantes, toutes les fonctions dans $\mathcal{F}$ et toutes les fonctions de Skolem est une sous-structure élémentaire $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{N}$.*

DÉMONSTRATION : Comme M est clos par les fonctions dans $\mathcal{F}$, il est une sous-structure ; si $\mathfrak{N} \models \exists x\, p(x, \bar{m})$ avec $\bar{m} \in M$, alors $f_\varphi(\bar{m}) \in M$ est le témoin pour l'application du test de Tarski. ■

Corollaire 2.22 LÖWENHEIM-SKOLEM DESCENDANT *Soit $\mathfrak{N}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie, $A \subseteq N$, et λ un cardinal infini avec $|A| + |\mathcal{L}| \leq \lambda \leq |N|$. Alors il y a une sous-strucure élémentaire $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ contenant A de cardinal λ.*

DÉMONSTRATION : On peut supposer que $|A| = \lambda$. Choisissons une skolemisation de $\mathfrak{N}$, et considérons la clôture M de A sous les fonctions de $\mathcal{F}$ et les fonctions de Skolem. Comme il y a $|\mathcal{L}| + \aleph_0$ formules et donc fonctions de Skolem, $|M| = |A| = \lambda$; par le lemme précédent $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$. ■

2.1 Annexe : Ordinaux et cardinaux

Définition 2.23 Soit $\langle I, \leq \rangle$ un ordre total. Un sous-ensemble $X \subseteq I$ est un *ségment initial* si pour tout $x \in X$ et $y \in I$ avec $y \leq x$ on a $y \in X$. L'ordre $\langle I, \leq \rangle$ est un *bon-ordre* si tout sous-ensemble non-vide a un élément minimal. Une injection d'un bon-ordre I dans un bon-ordre J est une application $f : I \to J$ qui préserve l'ordre, et tel que $f(I)$ soit un ségment initial de J.

Un sous-ensemble d'un bon-ordre est également un bon-ordre.

Exercice 2.24 Le produit lexicographique de deux bon-ordres est un bon-ordre.

Lemme 2.25 *Soient I et J deux bon-ordres. Alors soit I s'injecte dans J, soit J s'injecte dans I, et l'injection est unique. En particulier, si chacun s'injecte dans l'autre, $I \cong J$.*

Démonstration : Montrons d'abord l'unicité d'une injection de I dans J. Sinon, il existe un $x \in I$ minimal tel que deux injections de I dans J puissent différer sur x. Mais alors l'image Y de $\{i \in I : i < x\}$ dans J est le même pour toute injection, et l'image de x est nécessairement l'unique élément minimal de $J \setminus Y$, contradiction.

Supposons qu'il existe un $x \in I$ tel que le ségment initial $I(x) = \{i \in I : i \leq x\}$ ne s'injecte pas dans J ; on choisit x minimal. Donc pour tout $x' < x$ le ségment initial $I(x')$ s'injecte dans J. Par unicité, pour $x'' \leq x' < x$ l'injection de $I(x'')$ est la réstriction de l'injection de $I(x')$ à $I(x'')$. Ces injections sont donc compatibles, et leur réunion done une injection f de $\{i \in I : i < x\}$ dans J. Si l'image Y est J entier, alors J est isomorphe à $\{i \in I : i < x\}$ et s'injecte donc dans I. Sinon, il existe un unique élément y minimal dans $J \setminus Y$, et $f \cup \{x \mapsto y\}$ est une injection de $I(x)$ dans J, contradiction.

Donc, si J ne s'injecte pas dans I, tout ségment initial $I(x)$ pour $x \in I$ s'injecte dans J ; par unicité ces injections sont compatibles, et leur réunion donne une injection de I dans J. ■

Définition 2.26 Un *ordinal* est une classe d'isomorphismes de bon-ordres. Pour deux ordinaux α, β on dit que $a \leq \beta$ s'il existe une injection d'un représentant de α dans un représentant de β.

Evidemment la définition de $\leq$ ne dépend pas des représentants choisis. Par le lemme 2.25 la relation $\leq$ est un ordre total sur les ordinaux. A partir de maintenant on ne va plus distinguer entre un ordinal et un de ses représentants.

Exercice 2.27 $\leq$ est un bon-ordre sur les ordinaux, et α est le bon-ordre sur les ordinaux $< \alpha$.

Exercice 2.28 S'il y a une application de α dans β préservant l'ordre, alors $\alpha \leq \beta$.

Définition 2.29 Soient α et β deux ordinaux.

- La *somme* $\alpha+\beta$ est (la classe d'isomorphisme de) le bon-ordre de la concaténation $\alpha\hat{\ }\beta$: d'abord α, ensuite β, ou encore l'ordre lexicographique sur $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$.
- Le *produit* $\alpha \cdot \beta$ est l'ordre lexicographique sur $\beta \times \alpha$.

On dénote par 0 le bon-ordre sur $\emptyset$, et par 1 le bon-ordre sur $\{0\}$. Le bon-ordre minimal infini est noté ω ; c'est l'ordre sur les entiers naturels.

Exercice 2.30 $\alpha + 1$ est le plus petit bon-ordre strictement plus grand que α, le *successeur* de α.

Exercice 2.31 La somme et le produit sont associatifs, et distributif à gauche.

Lemme 2.32 *Si α est un ordinal, alors soit $\alpha = 0$, soit il existe un ordinal β tel que $\alpha = \beta + 1$ (un ordinal* successeur*), soit α est la réunion des images des injections des ordinaux $\beta < \alpha$ (un ordinal* limite*). Ces trois possibilités s'excluent mutuellement.*

DÉMONSTRATION : Si α est ni 0 ni limite, alors il y a $x \in \alpha$ tel que x n'est pas dans l'image d'une injection d'un ordinal $\beta < \alpha$. On choisit x minimal possible. Soit $I(x) = \{y \in \alpha : y \leq x\}$. Si $I(x) < \alpha$, alors x est dans l'injection de $I(x)$ dans α, contradiction. Donc $I(x) \geq \alpha$, d'où $I(x) = \alpha$; avec $\beta = \{y \in \alpha : y < x\}$ on a $\alpha = \beta + 1$. ■

Convention 2.33 *Un ordinal a un représentant canonique, qui est donné par la récurrence transfinie suivante :*

- 0 *est le plus petit ordinal.*
- *Le successeur d'un ordinal* α *est l'ordinal* $\alpha \cup \{\alpha\}$.
- *Un ordinal limite est la réunion de tous ses prédecesseurs.*

Donc $0 = \emptyset$,$1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $\ldots$, $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. La réunion d'une famille quelconque d'ordinaux est encore un ordinal, qui est le sup de la famille.

Exercice 2.34 Sont équivalents pour deux ordinaux α et β :

$$(a)\ \alpha < \beta \qquad (b)\ \alpha \subset \beta \qquad (c)\ \alpha \in \beta.$$

Définition 2.35 L'*exponentiation* α^β est l'unique fonction qui satisfait

- $\alpha^0 = 1$,
- $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$,
- $\alpha^\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$ pour un ordinal limite λ.

Exercice 2.36 Soit $2 := 1 + 1$. Montrer que :

$$(a)\ 1 + \omega = \omega < \omega + 1 \quad (b)\ \omega = 2 \cdot \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2 \quad (c)\ 2^\omega = \omega < \omega^2.$$

Définition 2.37 Soient X et Y deux ensembles. Alors la *cardinalité de* X *est plus petit que la cardinalité de* Y, noté $|X| \leq |Y|$, s'il existe une injection de X dans Y. On dit que X et Y *ont même cardinalité* si $|X| \leq |Y|$ et $|Y| \leq |X|$.

Le théorème de Schröder-Bernstein affirme qu'il y a toujours une bijection entre deux ensembles de même cardinalité. Avec l'axiome de choix, tout ensemble est bien-ordonnable ; les cardinalités de deux ensembles sont alors toujours comparables.

Définition 2.38 Un *cardinal* est un ordinal minimal dans sa classe de même cardinalité ; le cardinal d'un ensemble X, noté $|X|$, est le cardinal correspondant à la cardinalité de X.

Le plus petit cardinal infini est ω, il est également noté $\aleph_0$. Plus généralement, pour un ordinal α, le α-me cardinal infini est noté $\aleph_\alpha$.

Définition 2.39 Soient κ et λ deux cardinaux.

- La *somme (cardinale)* $\kappa + \lambda$ est le cardinal de leur somme ordinale.
- Le *produit (cardinal)* $\kappa \cdot \lambda$ est le cardinal de leur produit ordinal.
- La puissance κ^λ est le cardinal de l'ensemble des fonctions de λ dans κ.

La somme et le produit sont commutatifs, associatifs, et distributif.

Proposition 2.40 *Soient κ, λ deux cardinaux, dont un infini. Alors leur somme est égal au plus grand; si les deux sont non-nuls, le produit est égal au plus grand.*

Démonstration : Si $\kappa \leq \lambda$, alors $\kappa + \lambda$ est borné par la cardinalité du produit ordinal $2 \cdot \lambda = \lambda$.

Pour le produit, on montre par récursion transfinie que $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$. Pour cela, on définit une relation $\prec$ sur $\aleph_\alpha^2$ par $(\beta, \gamma) \prec (\beta', \gamma')$ si $\max\{\beta, \gamma\} < \max\{\beta', \gamma'\}$ ou $\max\{\beta, \gamma\} = \max\{\beta', \gamma'\}$ et $(\beta, \gamma) < (\beta', \gamma')$ dans l'ordre lexicographique.

On voit facilement que $\prec$ définit un bon-ordre. Mais tout ségment initial de ce bon-ordre est sous-ensemble de $\delta \times \delta$ pour un ordinal $\delta < \aleph_\alpha$, donc avec $|\delta| < \aleph_\alpha$. Par hypothèse de récurrence $|\delta \times \delta| < \aleph_\alpha$; la réunion de tous ces ségments initiaux est donc de cardinal au plus $\aleph_\alpha$. ■

Théorème 2.41 (Cantor) $2^\kappa > \kappa$ *pour tout cardinal* κ.

Démonstration : Supposons $2^\kappa \leq \kappa$, et soit f une injection dans κ des fonctions de κ dans 2. Soit g la fonction de κ dans 2 telle que

- $g(i) \neq (f^{-1}(i))(i)$ si $i \in f(2^\kappa)$.
- $g(i) = 0$ sinon.

Alors g est différent de toutes les fonctions dans 2^κ, contradiction. ■

Exercice 2.42 Montrer que si α et β sont deux ordinaux dénombrables, alors la puissance *ordinale* α^β est dénombrable.

Leçon 3

La compacité

Voici le théorème le plus fondamental en théorie des modèles :

Théorème 3.1 COMPACITÉ *Soit* Φ *un ensemble d'énoncés tel que tout sous-ensemble fini de* Φ *a un modèle. Alors* Φ *a un modèle.*

Le réciproque est bien sûr évident.

DÉMONSTRATION : On appellera *finiment consistent* un ensemble d'énoncés dont toutes les parties finies ont un modèle. Donc il s'agit de démontrer qu'un ensemble finiment consistant est consistant.

Lemme 3.2 *Si* Ψ *est finiment consistant et* φ *est un énoncé, alors soit* $\Psi \cup \{\varphi\}$*, soit* $\Psi \cup \{\neg\varphi\}$ *est finiment consistent.*

DÉMONSTRATION : Supposons que ni $\Psi \cup \{\varphi\}$, ni $\Psi \cup \{\neg\varphi\}$ soit finiment consistant. Donc il y a deux parties finies Ψ_0 et Ψ_1 de Ψ, telles que ni $\Psi_0 \cup \{\varphi\}$, ni $\Psi_1 \cup \{\neg\varphi\}$ sont consistants. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de $\Psi_0 \cup \Psi_1$, qui existe par hypopthèse. Mais alors soit $\mathfrak{M} \models \varphi$ et $\Psi_0 \cup \{\varphi\}$ est consistant, soit $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$ et $\Psi_1 \cup \{\neg\varphi\}$ est consistant, contradiction. ■

Lemme 3.3 *La réunion d'une chaîne croissante d'ensembles d'énoncés* Ψ_i *finiment consistants est finiment consistant.*

DÉMONSTRATION : Tout sous-ensemble fini de la réunion des Ψ_i est déjà sous-ensemble de Ψ_{i_0} pour i_0 suffisamment grand, et a donc un modèle par hypothèse. ■

Remarque 3.4 Le lemme est valable pour toute chaîne $(\Psi_i : i \in I)$ pour un ordre total (I, i) telle que $i \leq j$ implique $\Psi_i \subseteq \Psi_j$.

Lemme 3.5 *Tout ensemble Ψ d'énoncés finiment consistant peut etre complété en un ensemble $\bar{\Psi} \supseteq \Psi$ d'énoncés finiment consistant, tel que pour tout énoncé φ soit $\varphi \in \bar{\Psi}$, soit $\neg\varphi \in \bar{\Psi}$.*

DÉMONSTRATION : On énumère les $\mathcal{L}$-énoncés comme $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, et on pose $\Psi_0 := \Psi$. Supposons qu'on ait trouve Ψ_i tel que pour tout $j < i$ soit $\varphi_j \in \Psi_i$ soit $\neg\varphi_j \in \Psi_i$. Alors par le lemme 3.2 soit $\Psi_i \cup \{\varphi_i\}$, soit $\Psi_i \cup \{\neg\varphi_i\}$ est finiment consistant, et on trouve Ψ_{i+1}.

Aux étapes limites, on prend la réunion des Ψ_i précédents, ce qui est finiment consistant par le lemme 3.3. A la fin, la réunion de tous les Ψ_i donne l'ensemble $\bar{\Psi}$ recherché. ■

Notons que si Ψ est finiment consistant, il est impossible que φ et $\neg\varphi$ soient simultanément dans Ψ.

Lemme 3.6 *Si Ψ est finiment consistant, Ψ_{Skolem} est finiment consistant.*

DÉMONSTRATION : Si Ψ_0 est un sous-ensemble fini de Ψ_{Skolem}, soit $\Psi_1 := \Psi_0 \cap \Psi$. Alors $\Psi_0 \subseteq \Psi_{1Skolem}$; par hypothèse Ψ_1 a un modèle $\mathfrak{M}$, qui a une expansion $\mathfrak{M}_{Skolem} \models \Psi_{1Skolem}$ par le lemme 2.20. Donc les parties finies de Ψ_{Skolem} ont des modèles. ■

Maintenant on itère alternativement entre complétion et skolemisation : On pose $\Phi_0 := \Phi$, $\Phi_{2i+1} := \bar{\Phi}_{2i}$ et $\Phi_{2i+2} := \Phi_{2i+1Skolem}$. Soit $\tilde{\Phi} := \bigcup_{i<\omega} \Phi_i$. Alors tous les Φ_i sont finiment consistants par les lemmes 3.5 et 3.6, et $\tilde{\Phi}$ est finiment consistant par le lemme 3.3. En plus, $\tilde{\Phi}$ est complètement skolemisé : pour toute formule $\varphi(x, \bar{y})$ dans son langage $\tilde{\mathcal{L}}$ (qui est l'itération infinie des skolemisations) il y a une fonction f_φ telle que $\forall \bar{y}\, [\exists x\, \varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \varphi(f_\varphi(\bar{y}, \bar{y})]$ est dans $\tilde{\Phi}$. Et $\tilde{\Phi}$ est complète : pour tout $\tilde{\mathcal{L}}$-énoncé φ soit $\varphi \in \tilde{\Phi}$, soit $\neg\varphi \in \tilde{\Phi}$ (et jamais les deux).

On va maintentant construire un modèle $\mathfrak{M}$ de $\tilde{\Phi}$, et donc de Φ. Le domaine M est l'ensemble des $\tilde{\mathcal{L}}$-termes clos, quotienté par l'égalité. On pose

- $c^{\mathfrak{M}} := c/=$, pour toute constante c ;
- $f^{\mathfrak{M}}(t_1/=, \ldots, t_n/=) := f(t_1, \ldots, t_n)/=$, pour toute fonction n-aire de $\tilde{\mathcal{L}}$ (y inclus les fonctions de Skolem), et $\tilde{\mathcal{L}}$-termes clos $t_1, \ldots, t_n$.

- $R^{\mathfrak{M}} := \{(t_1/=, \dots, t_n/=) \in M^n : R(t_1, \dots, t_n) \in \tilde{\Phi}\}$, pour toute relation n-aire R.

Comme $\tilde{\Phi}$ implique que $=$ est une congruence pour toutes les $\tilde{\mathcal{L}}$-fonctions et -relations, $\mathfrak{M}$ est bien défini. On va montrer par récurrence sur le nombre de symboles logiques que $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{t}/=)$ si et seulement si $\varphi(\bar{t}) \in \tilde{\Phi}$, pour tout $\tilde{\mathcal{L}}$-énoncé $\varphi(\bar{t})$, où $\bar{t}$ sont des $\tilde{\mathcal{L}}$-termes clos. On notera qu'en outre des paramètres $\bar{t}/=$ la formule φ peut contenir des $\tilde{\mathcal{L}}$-termes clos (non quotientés par $=$).

C'est par définition des $R^{\mathfrak{M}}$ si φ est atomique. Pour les connecteurs booléens, $\mathfrak{M} \models \neg\psi$ si et seulement si $\mathfrak{M} \not\models \psi$, si et seulement si $\psi \notin \tilde{\Phi}$, si et seulement si $\neg\psi \in \tilde{\Phi}$ (la dernière équivalence est par complétude et consistance finie).

Pour la conjonction, $\mathfrak{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ si et seulement si $\mathfrak{M} \models \varphi_1$ et $\mathfrak{M} \models \varphi_2$, si et seulement si $\varphi_1 \in \tilde{\Phi}$ et $\varphi_2 \in \tilde{\Phi}$. Par complétude et consistance finie le dernier est équivalent à $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \tilde{\Phi}$; le cas d'une disjonction est analogue.

Il nous restent les énoncés φ de la forme $\exists x\, \psi(x, \bar{t}/=)$, pour des $\tilde{\mathcal{L}}$-termes $\bar{t}$. Si $\exists x\, \psi(x, \bar{t}) \in \tilde{\Phi}$, comme

$$\forall \bar{y}\, [\exists x\, \psi(x, \bar{y}) \to \psi(f_\psi(\bar{y}), \bar{y})]$$

est dans $\tilde{\Phi}$, il est impossible par consistance finie que

$$\neg\psi(f_\psi(\bar{t}), \bar{t})$$

soit dans $\tilde{\Phi}$. Par complétude, $\psi(f_\psi(\bar{t}), \bar{t}) \in \tilde{\Phi}$; par hypothèse de récurrence $\mathfrak{M} \models \psi(f_\psi(\bar{t}/=), \bar{t}/=)$, et donc $\mathfrak{M} \models \exists x\, \psi(x, \bar{t}/=)$.

Réciproquement, si $\mathfrak{M} \models \exists x\, \psi(x, \bar{t}/=)$, alors il y a un $\tilde{\mathcal{L}}$-terme clos t_0 tel que $\mathfrak{M} \models \psi(t_0/=, \bar{t}/=)$. Par hypothèse de récurrence $\psi(t_0, \bar{t}) \in \tilde{\Phi}$; par consistance finie $\neg\exists x\, \psi(x, \bar{t})$ n'est pas dans $\tilde{\Phi}$, et par complétude $\exists x\, \psi(x, \bar{t})$ l'est.

Ceci términe la demonstration du théorème de la compacité. ■

Exemple 3.7 Il n'y a pas d'ensemble Φ de $\mathcal{L}_{ord}$-énoncés dont les modèles sont précisément les ordres finis.

Démonstration : Supposons que Φ est un tel ensemble, et considérons l'ensemble de $\mathcal{L}$-énoncés Ψ suivant :

$$\Phi \cup \{\exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j : n < \omega\}.$$

Pour tout sous-ensemble fini Ψ_0 de Ψ soit n_0 maximal tel que Ψ_0 contient l'énoncé $\exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j$, et soit $\mathfrak{M}_0$ un ordre fini de cardinalité n_0. Comme $\mathfrak{M}_0 \models \Phi$ et a n_0 éléments, $\mathfrak{M}_0 \models \Psi_0$. Donc chaque sous-ensemble fini de Ψ a un modèle ; par compacité Ψ a un modèle $\mathfrak{M}$. Comme $\mathfrak{M} \models \Phi$, il est un ordre fini. Mais $\mathfrak{M}$ a au moins n éléments pour chaque $n < \omega$, contradiction. ■

Exercice 3.8 Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble $\Phi(x)$ de $\mathcal{L}_{gp}$-formules tel que dans tout groupe G un élément g satisfait $\Phi(x)$ si et seulement si l'ordre de g est fini.

Exercice 3.9 Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble Φ de $\mathcal{L}_{ann}$-énoncés dont les modèles sont précisement les corps finis.

Exercice 3.10 Démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble $\Phi(x)$ de $\mathcal{L}_{ann}$-formules tel que dans tout corps K un élément a satisfait $\Phi(x)$ si et seulement s'il est algébrique sur le corps premier (c'est-à-dire, satisfait une équation polynômiale non-triviale à coefficients entiers).

Exemple 3.11

1. Les entiers non-standard

   Soit c une nouvelle constante, et Φ la $\mathcal{L}_{ann} \cup \{c\}$-théorie suivante :

   $$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}_{ann}}(\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \dot{-}, * \rangle, \mathbb{N}) \cup \{\exists x\, n * x = c : n > 0\}$$

   (on pose $n \dot{-} m = 0$ si $m \geq n$). Tout sous-ensemble fini de Φ a un modèle : on prend $\mathbb{N}$ lui-même, on interprète c par un entier suffisament divisible. Soit $\mathbb{N}^*$ un modèle de tout Φ. Alors l'inclusion $n \mapsto n^{\mathbb{N}^*}$ est élémentaire ; c'est un modèle non-standard de l'arithmétique. Notons que $c^{\mathbb{N}^*}$ est un entier non-standard qui est divisible par tout entier standard.

2. Les réels non-standard

   Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ann} \cup \{c, <\}$, et Φ la $\mathcal{L}$-théorie suivante :

   $$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}_{ann} \cup \{<\}}(\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, *, < \rangle, \mathbb{R}) \cup \{0 < c < \frac{1}{n} : n > 0\}.$$

   Tout sous-ensemble fini de Φ ayant $\mathbb{R}$ comme modèle (avec une interprétation de c assez proche de 0), on trouve un modèle $\mathbb{R}^*$ de Φ entier, les réels non-standard. L'inclusion $r \mapsto r^{\mathbb{R}^*}$ est élémentaire.

Pour chaque $r \in \mathbb{R}^*$ borné (tel qu'il y a $r \in \mathbb{R}$ avec $r^* < r$ on trouve un unique réel $\mathrm{st}(r^*) \in \mathbb{R}$ tel que $|r^* - \mathrm{st}(r^*)| < \frac{1}{n}$ pour tout $n < \omega$. On appèle $\mathrm{st}(r^*)$ la partie *standard* du réel non-standard r^*.

Notons que ni les entiers ni les réels non-standards ne sont déterminés à isomorphisme près.

Maintenant nous allons voir que l'équivalence élémentaire ne peut pas déterminer le cardinal d'une $\mathcal{L}$-structure, sauf si elle est finie.

Lemme 3.12 *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie. Alors il y a $\mathfrak{N} \succeq \mathfrak{M}$ arbitrairement large.*

Démonstration : Soit λ un cardinal arbitraire, $\{c_i : i < \lambda\}$ des nouvelles constantes, et

$$\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \{c_i \neq c_j : i \neq j\}.$$

Alors chaque sous-ensemble fini de Φ ne mentionne qu'un nombre fini de constantes, que l'on peut interpréter dans $\mathfrak{M}$. Donc chaque sous-ensemble fini de Φ a un modèle ; par compacité il y a un modèle $\mathfrak{N}$ de Φ. Évidemment $|\mathfrak{N}| \geq \lambda$. En plus, on a une injection canonique de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$, qui envoie un élément $m \in \mathfrak{M}$ sur la réalisation $m^{\mathfrak{N}}$ de sa constante dans $\mathfrak{N}$.

Soit maintenant $\varphi(\bar{m}) \in \mathcal{L}(\bar{m})$ pour un $\bar{m} \in \mathfrak{M}$. Alors

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{m}) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m}),$$

donc l'inclusion est élémentaire. ■

Corollaire 3.13 Löwenheim-Skolem ascendant *Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie. Alors pour tout $\lambda \geq |\mathcal{L}| + |M|$ il a une extension élémentaire $\mathfrak{N} \succeq \mathfrak{M}$ de cardinal λ.*

Démonstration : Par le lemme 3.12 on trouve $\mathfrak{N}' \succeq \mathfrak{M}$ de cardinal au moins λ ; par Löwenheim-Skolem descendant il y a $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{N}'$ contenant $\mathfrak{M}$ de cardinal λ, et $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$. ■

Leçon 4

Le va-et-vient

Commençons par un petit jeu : Soit $\mathfrak{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, et $\varphi(\bar{m})$ un énoncé à paramètres dans M. On supposera que φ est sous forme prénexe :

$$Q_1\bar{x}_1\, Q_2\bar{x}_2 \ldots Q_n\bar{x}_n\psi(\bar{m}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n),$$

où les $\bar{x}_i$ sont des uples de variables (pas nécessairement de même longueur), ψ est sans quanteur, et les Q_i sont des quanteurs alternants (si Q_i est $\forall$, alors Q_{i+1} est $\exists$, et vice versa). L'entier n s'appelle le *rang d'alternance* de φ.

Le jeu est joué par deux joueurs, $\forall$belard et $\exists$loise ; si Q_1 est $\forall$ alors $\forall$belard commence, sinon c'est $\exists$loise. Le premier joueur choisit un uple $\bar{a}_1$ de longueur $|\bar{x}_1|$, ensuite le deuxième répond en choisissant $\bar{a}_2$ de longueur $|\bar{x}_2|$, le premier choisit ensuite $\bar{a}_3$ etc. A la fin, quand $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ ont été choisis, $\exists$loise gagne si $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{m}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$.

Une *stratégie* (pour gagner) pour $\exists$loise est un méthode pour répondre aux choix de $\forall$belard afin de gagner. On ne demande pas que cette méthode soit effective, que l'on puisse donner un algorithme pour déterminer les réponses d'$\exists$loise. Dire que $\exists$loise a une stratégie équivaut à dire que $\exists$loise peut toujours gagner, quoi que fait $\forall$belard.

Proposition 4.1 *$\exists$loise a une stratégie si et seulement si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$.*

Démonstration : Par récurrence sur le rang d'alternance. Si le rang est zéro, il n'y a rien à démontrer. Considérons donc un énoncé $\varphi(\bar{m})$ de rang d'alternance $n+1$. Il est soit de la forme $\forall\bar{x}\,\varphi'(\bar{m}, \bar{x})$, soit de la forme $\exists\bar{x}\,\varphi'(\bar{m}, \bar{x})$, où le rang d'alternance de φ' est n. On va traiter le premier cas, le deuxième étant analogue.

Si $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$, alors quel que soit le choix $\bar{a}_1$ de $\forall$belard, $\mathfrak{M} \models \varphi'(\bar{m}, \bar{a}_1)$; par hypothèse de récurrence $\exists$loise a une stratégie pour $\varphi'(\bar{m}, \bar{a}_1)$, qu'elle utilise pour gagner le $\varphi(\bar{m})$-jeu.

Réciproquement, si $\mathfrak{M} \models \neg\varphi(\bar{m})$ il y a $\bar{a}_1$ (qui sera le premier choix d'$\forall$belard) tel que $\mathfrak{M} \models \neg\varphi'(\bar{m}, \bar{a}_1)$; si on fait passer la négation par les quanteurs pour obtenir une formule sous forme prénexe, on échange les rôles d'$\forall$belard et d'$\exists$loise. Par hypothèse $\exists$loise a une stratégie pour ce nouveau jeu, dont $\forall$belard peut se servir pour gagner les étapes restantes du $\varphi(\bar{m})$-jeu. Donc $\exists$loise n'a pas de stratégie pour le $\varphi(\bar{m})$-jeu. ■

Il convient de noter que soit $\exists$loise, soit $\forall$belard a une stratégie. En fait, c'est toujours le cas dans les jeux finis à information complète (les deux joueurs possèdent toute l'information) sans partie nulle.

Maintenant, on veut comparer deux structures. Disons qu'une formule $\varphi(\bar{x})$ est *effilée* si les arguments des fonctions et des relations (autres que l'égalité) ne sont que des variables et des constantes.

Lemme 4.2 *Toute formule est équivalente à une formule effilée.*

Démonstration : Une formule $\varphi(f(\bar{x}))$ est équivalente à $\exists y\ [y = f(\bar{x}) \wedge \varphi(y)]$, où y est une nouvelle variable. Le lemme suit alors par induction pour les formules sans quanteurs ; pour les autres, il suffit de les réécrire sous forme prénexe et de traiter leur partie sans quanteur. ■

Définition 4.3 Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures, et $\bar{m} \in M$ et $\bar{n} \in N$ deux uples de même longueur. Pour un entier k le *jeu d'Ehrenfeucht-Fraïssé* de longueur $k \geq 0$ est le suivant : A l'étape i (avec $0 < i \leq k$)

va	ou	$\forall$belard choisit $a_i \in M$ et $\exists$loise choisit $b_i \in N$,
vient		$\forall$belard choisit $b_i \in N$ et $\exists$loise choisit $a_i \in M$.

A la fin $\exists$loise gagne si pour toute formule atomique effilée en $x_1, \ldots, x_k$

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}, \bar{a}) \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n}, \bar{b}).$$

Si $\exists$loise a une stratégie, $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ et $(\mathfrak{N}, \bar{n})$ sont *k-équivalents*, noté $(\mathfrak{M}, \bar{m}) \approx_k (\mathfrak{N}, \bar{n})$.

Le lemme suivant découle immédiatment de la définition :

Lemme 4.4 $(\mathfrak{M},\bar m) \approx_{k+1} (\mathfrak{N},\bar n)$ *si et seulement si pour tout* $a \in M$ *il y a* $b \in N$*, et pour tout* $b \in N$ *il y a* $a \in M$*, tel que* $(\mathfrak{M},\bar m a) \approx_k (\mathfrak{N},\bar n b)$. ■

Exercice 4.5 La k-équivalence $\approx_k$ est une relation d'équivalence.

Exercice 4.6 Dans l'ordre discret $\mathbb{N}$, deux paires $(0,m)$ et $(0,n)$ sont $(k+1)$-équivalentes si et seulement si $m = n$ ou $2^k < \min\{m,n\}$.

Définissons le *rang de quantification* d'une formule :

- $\mathrm{rq}(\varphi) = 0$ si φ est atomique.
- $\mathrm{rq}(\neg\varphi) = \mathrm{rq}(\varphi)$; $\mathrm{rq}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{rq}(\varphi \vee \psi) = \max\{\mathrm{rq}(\varphi), \mathrm{rq}(\psi)\}$.
- $\mathrm{rq}(\forall x\varphi) = \mathrm{rq}(\exists x\varphi) = rq(\varphi) + 1$.

Théorème 4.7 Fraïssé-Hintikka *Soit* $\mathcal{L}$ *un langage fini. Alors pour tout uple* $\bar x$ *de variables et tout* $k < \omega$ *il y a un ensemble fini* $\Phi_k(\bar x)$ *de formules de rang de quantification au plus* k *deux-à-deux contradictoires (qui dépend de la longueur de* $\bar x$*), tel que*

1. $\forall \bar x \bigvee \Phi_k(\bar x)$ *est vrai dans toute* $\mathcal{L}$*-structure.*
2. *Pour deux* $\mathcal{L}$*-structures* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N}$*, et uples* $\bar m \in M$ *et* $\bar n \in N$ *de longueur* $|\bar x|$*, on a* $(\mathfrak{M},\bar m) \approx_k (\mathfrak{N},\bar n)$ *si et seulement si* $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar m) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar n)$ *pour tout* $\varphi \in \Phi_k(\bar x)$ *(et la formule* $\varphi \in \Phi_k$ *satisfaite par* $\bar m$ *et* $\bar n$ *est unique).*
3. *Pour toute formule* $\psi(\bar x)$ *éffilée de rang de quantification au plus* k *il y a une disjonction de formules dans* $\Phi_k(\bar x)$ *équivalente à* $\psi(\bar x)$*. (La disjonction vide est la formule* $\perp$ *qui est toujours fausse.)*

En particulier, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'uples de longueur ℓ *modulo* k*-équivalence, pour tout* $k, \ell \geq 0$*.*

Démonstration : Par récurrence sur k, pour tout uple $\bar x$ simultanément. Comme le langage est fini, il n'y a qu'un nombre fini de formules atomiques effilées en variables libres $\bar x$, disons $\{\psi_i(\bar x) : i < n\}$. On prend Φ_0 l'ensemble de toutes les formules

$$\bigwedge_{i<n} \neg^{s_i}\psi_i(\bar x), \quad \text{pour } (s_i : i < n) \in \{0,1\}^n$$

(où $\neg^0\psi$ est la formule ψ, et $\neg^1\psi$ est $\neg\psi$). Alors deux uples $\bar{m} \in \mathfrak{M}$ et $\bar{n} \in \mathfrak{N}$ satisfont les mêmes formules dans $\Phi_0(\bar{x})$ si et seulement s'ils satisfont les mêmes formules atomiques effilées, c'est-à-dire si et seulement s'ils sont 0-équivalents. Il est évident que deux formules dans $\Phi_0(\bar{x})$ sont contradictoires, et $\bigvee \Phi_0(\bar{x})$ est vraie pour tout $\bar{x}$. Finalement, si ψ est une formule éffilée sans quanteurs, elle est combinaison booléenne des formules ψ_i ; sous forme disjonctive normale elle sécrit comme réunion de formules dans $\Phi_0(\bar{x})$.

Supposons qu'on ait trouvé $\Phi_k(\bar{x}, y) = \{\vartheta_i(\bar{x}, y) : i \in I\}$. On prend $\Phi_{k+1}(\bar{x})$ la collection de formules $\bigwedge_{i\in J} \exists y\, \vartheta_i(\bar{x}, y) \wedge \bigwedge_{i\notin J} \neg\exists y\, \vartheta_i(\bar{x}, y)$, pour $J \subseteq I$ (et la conjonction vide est $\top$). Il est évident que les formules dans $\Phi_{k+1}(\bar{x})$ sont deux-à-deux contradictoires, et que leur disjonction est toujours vraie. Supposons que $(\mathfrak{M}, \bar{m}) \approx_{k+1} (\mathfrak{N}, \bar{n})$, et que $\mathfrak{M} \models \exists y\, \vartheta_i(\bar{m}, y)$. Soit $a \in M$ un témoin pour le quanteur existentiel; par le lemme 4.4 il existe $b \in N$ tel que $(\mathfrak{M}, \bar{m}a) \approx_k (\mathfrak{N}, \bar{n}b)$. Alors $\mathfrak{N} \models \vartheta_i(\bar{n}, b)$ par définition de $\Phi_k(\bar{x}, y)$, d'où $\mathfrak{N} \models \exists y\, \vartheta_i(\bar{n}, y)$. Par symétrie $\mathfrak{N} \models \exists y\, \vartheta_i(\bar{n}, y)$ implique $\mathfrak{M} \models \exists y\, \vartheta_i(\bar{m}, y)$, d'où $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n})$, pour tout $\varphi(\bar{x}) \in \Phi_{k+1}(\bar{x})$.

Réciproquement, supposons que $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ si et seulement si $\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n})$ pour tout $\varphi \in \Phi_{k+1}(\bar{x})$. Alors $\mathfrak{M} \models \exists y\, \vartheta_i(\bar{m}, y)$ si et seulement si $\mathfrak{N} \models \exists y\, \vartheta_i(\bar{n}, y)$ pour tout $i \in I$. Soit donc $a \in M$. Comme $\models \forall \bar{x} y \bigvee_{i\in I} \vartheta_i(\bar{x}, y)$, il existe $i \in I$ tel que $\mathfrak{M} \models \vartheta_i(\bar{m}, a)$. Alors $\mathfrak{M} \models \exists y\, \vartheta_i(\bar{m}, y)$, et $\mathfrak{N} \models \exists y\, \vartheta_i(\bar{n}, y)$; si b témoigne ce quanteur existentiel, alors $(\mathfrak{M}, \bar{m}a) \approx_k (\mathfrak{N}, \bar{n}b)$. Par symétrie, pour tout $b \in N$ on trouve $a \in M$ avec la même propriété, et $(\mathfrak{M}, \bar{m}) \approx_{k+1} (\mathfrak{N}, \bar{n})$ par le lemme 4.4.

Finalement, considérons une formule de rang de quantification inférieur ou égal à $k+1$. Comme les formules dans Φ_{k+1} sont deux-à-deux contradictoires et leur disjonction est toujours vraie, alors pour $\Psi_1, \Psi_2 \subseteq \Phi_{k+1}$:

- $\neg \bigvee \Psi_1$ est équivalent à $\bigvee(\Phi_{k+1} \setminus \Psi_1)$,
- $\bigvee \Psi_1 \wedge \bigvee \Psi_2$ est équivalente à $\bigvee(\Psi_1 \cap \Psi_2)$, et
- $\bigvee \Psi_1 \vee \bigvee \Psi_2$ est équivalente à $\bigvee(\Psi_1 \cup \Psi_2)$.

Il suffit donc de traiter le cas d'une formule existentielle $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$, où $\mathrm{rq}(\psi) \leq k$. Par hypothese de récurrence, $\psi(\bar{x}, y)$ est équivalente à une disjonction $\bigvee_i \vartheta_i(\bar{x}, y)$ de formules dans $\Phi_k(\bar{x}, y)$. Donc $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$ est équivalente à $\bigvee_i \exists y\, \vartheta_i(\bar{x}, y)$. Sous forme disjonctive normale par rapport à l'ensemble $\{\exists y\, \vartheta(\bar{x}, y) : \vartheta \in \Phi_k(\bar{x}, y)\}$ cela donne une disjonction de formules dans $\Phi_{k+1}(\bar{x})$. $\blacksquare$

Corollaire 4.8 *Soit $\mathcal{L}$ un langage fini. Alors $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ et $(\mathfrak{N}, \bar{n})$ sont élémentairement équivalents si et seulement s'ils sont k-équivalents pour tout $k < \omega$.*

Démonstration : Immédiat. ■

Remarque 4.9 Si le langage est infini, le résultat n'est plus vrai, car il y aura un nombre infini de formules atomiques effilées à variables libres $\bar{x}$. Donc on doit considérer les sous-langages finis :

> $(\mathfrak{M}, \bar{m}) \equiv (\mathfrak{N}, \bar{n})$ si et seulement si pour tout $k < \omega$ et tout sous-langage $\mathcal{L}_0$ fini $(\mathfrak{M}, \bar{n}) \restriction_{\mathcal{L}_0} \approx_k (\mathfrak{N}, \bar{n}) \restriction_{\mathcal{L}_0}$.

Exemple 4.10 En utilisant le corollaire 4.8 on voit que les groupes $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, 0, + \rangle$ sont élémentairement équivalents dans le langage $\mathcal{L}_{gp}$. Pour chaque $n < \omega$ soit $D_n(x)$ le prédicat unaire des entiers divisible par n. Donc $D_n(x)$ est défini par la formule $\exists y\, y + \cdots + y = x$ (somme de longueur n). Si $\mathcal{L}'$ est le langage des groupes enrichi par les prédicats D_n, alors $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ restent élémentairement équivalents dans $\mathcal{L}'$, car ces prédicats sont définissables dans $\mathcal{L}_{gp}$. Mais $\forall$belard gagnerai le jeu de longueur 1 en choisissant $(0, q) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ non-nulle et divisible.

Voici une autre formulation :

Définition 4.11 Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. Un 0-*isomorphisme (local)* de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est une application partielle σ de M dans N de domaine fini, telle que pour toute $\mathcal{L}(\mathrm{dom}(\sigma))$-formule $\varphi(\bar{m})$ atomique effilée $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(\bar{m}))$. Un $(k+1)$-*isomorphisme* de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est une application partielle σ de M dans N telle que

va	et	pour tout $m \in M$ il y a $n \in N$,
vient		pour tout $n \in N$ il y a $m \in M$

tel que $\sigma \cup \{m \mapsto n\}$ est un k-isomorphisme de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$.

Exercice 4.12 $(\mathfrak{M}, \bar{m}) \approx_k (\mathfrak{N}, \bar{n})$ si et seulement si il y a un k-isomorphisme de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ qui envoie $\bar{m}$ sur $\bar{n}$.

Il n'y a rien qui nous contraint de nous arrêter après un nombre fini d'étapes. On peut alors définir les jeu d'Ehrenfeucht-Fraïssé de longueur α pour tout ordinal α. Quant aux k-isomorphismes, on ajoutera à la définition 4.11 :

- Si α est un ordinal limite, une application partielle de M dans N est un *α-isomorphisme* si σ est un β-isomorphisme pour tout $\beta \in \alpha$.

Remarque 4.13 On notera que les conditions pour les ordinaux infinis sont différents pour les jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé et les α-isomorphismes. Par exemple, pour l'ω-isomorphisme $\exists$loise doit gagner le k-jeu pour chaque $k < \omega$, mais avec une stratégie qui peut dépendre de k. Par contre, pour gagner le ω-jeu, il lui faut une stratégie qui survit les ω étapes du jeu. Donc elle a besoin d'une stratégie *uniforme* pour tous les $k < \omega$.

Exemple 4.14

1. Les ordres $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ et $\langle \{0,1\} \times \mathbb{Z}, <_{lex} \rangle$ sont $(\omega + 1)$-isomorphes dans le langage $\mathcal{L}_{ord}$, mais ni $(\omega + 2)$-isomorphes, ni ω-équivalents.

2. Les groupes $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, 0, + \rangle$ sont ω-isomorphes dans le langage $\mathcal{L}_{gp}$, mais ni $(\omega + 1)$-isomorphes ni ω-équivalents.

3. Le corps des réels $\mathbb{R}$ et un corps réel non-standard sont ω-isomorphes dans le langage $\mathcal{L}_{ann}$, mais ni $(\omega + 1)$-isomorphes ni ω-équivalents.

Ceci est un effet de *saturation* (ou plutot d'absence de saturation).

Définition 4.15 Une structure $\mathfrak{M}$ est ω-saturée si pour tout uple fini $\bar{m} \in M$ tout ensemble $\Phi(x)$ de $\mathcal{L}(\bar{m})$-formules en une variable x a une réalisation dans $\mathfrak{M}$ si et seulement si $\Phi(x)$ est finiment réalisable dans $\mathfrak{M}$ (c'est-à-dire toute partie finie de Φ a une réalisation dans $\mathfrak{M}$).

Donc une structure est ω-saturée si on a une version de la compacité (limité à un nombre fini de paramètres) dans la structure elle-même.

Lemme 4.16 *$\mathfrak{M}$ est ω-saturée si et seulement si pour tout uple fini $\bar{m} \in M$ et tout uple dénombrable $\bar{x}$ de variables, tout ensemble $\Phi(\bar{x})$ de $\mathcal{L}(\bar{m})$-formules a une réalisation dans $\mathfrak{M}$ si et seulement si Φ est finiment réalisable dans $\mathfrak{M}$.*

Démonstration : Soit $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, et pour tout $i < \omega$ on pose

$$\begin{aligned}\Phi_i(x_0, \ldots, x_i) &= \{\exists \bar{y}\, \varphi(x_0, \ldots, x_i, \bar{y}) : \\ &\qquad \varphi(x_0, \ldots, x_i, \bar{y}) \text{ une conjonction finie de formules dans } \Phi\}.\end{aligned}$$

Comme chaque sous-ensemble fini de Φ a une réalisation dans $\mathfrak{M}$, chaque sous-ensemble fini de $\Phi_0(x_0)$ a une réalisation dans $\mathfrak{M}$, et on trouve $a_0 \in M$

qui réalise $\Phi_0(x_0)$. Supposons qu'on ait trouvé $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{i-1})$ dans M qui réalisent $\Phi_{i-1}(x_0, \ldots, x_{i-1})$, et soit $\psi_0(\bar{a}, x_i) \wedge \cdots \wedge \psi_k(\bar{a}, x_i)$ une conjonction finie de formules dans $\Phi_i(\bar{a}, x_i)$. Chaque ψ_i est de la fome $\exists \bar{y}\, \varphi_i(\bar{a}, x_i, \bar{y})$, où φ_i est une conjonction finie de formules dans Φ. Mais

$$\bar{a} \models_{\mathfrak{M}} \exists x_i \exists \bar{y} \bigwedge_{j \leq k} \varphi_j(x_0, \ldots, x_i, \bar{y})$$

(c'est une des formules dans Φ_{i-1}), et donc

$$\bar{a} \models_{\mathfrak{M}} \exists x_i \bigwedge_{j \leq k} \exists \bar{y}\, \varphi_j(x_0, \ldots, x_i, \bar{y}).$$

Ça signifie que tout sous-ensemble fini de $\Phi_i(\bar{a}, x_i)$ a une réalisation dans $\mathfrak{M}$; par ω-saturation on y trouve une réalisation $a_i \models_{\mathfrak{M}} \Phi_i(\bar{a}, x_i)$.

La suite $(a_i : i < \omega)$ réalisera $\Phi(\bar{x})$. ■

Exercice 4.17 Soit $\mathfrak{N}$ une structure ω-saturée, et $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ dénombrable. Montrer que $\mathfrak{M}$ s'injecte élémentairement dans $\mathfrak{N}$.

La proposition suivante nous fournit des modèles ω-saturés.

Proposition 4.18 *Soit $\mathfrak{M}$ une structure. Alors il y a $\mathfrak{N} \succeq \mathfrak{M}$ qui est ω-saturée.*

Démonstration : Soit $\{\Phi_i(x) : i \in I\}$ la collection des ensembles de formules à une variable libre x et à nombre fini de paramètres dans M qui sont finiment réalisables dans M. Si $\{c_i : i \in I\}$ sont des nouvelles constantes, alors

$$\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, M) \cup \bigcup_{i \in I} \Phi_i(c_i)$$

est finiment réalisable dans $\mathfrak{M}$ (en interpretant c_i par un élément qui réalise la partie finie de Φ_i utilisée), et a donc un modèle $\mathfrak{M}'$ par compacité. En identifiant $m \in M$ et $m^{\mathfrak{M}'}$, on obtient $\mathfrak{M}'$ comme extension élémentaire de $\mathfrak{M}$; chaque $\Phi_i(x)$ est réalisé par $c_i^{\mathfrak{M}'} \in M'$.

Itérativement on obtient une suite $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \preceq \mathfrak{M}_1 \preceq \mathfrak{M}_2 \preceq \cdots$ telle que chaque ensemble de formules en une variable libre et avec un nombre fini de paramètres dans $\mathfrak{M}_i$ finiment réalisable dans $\mathfrak{M}_i$ est réalisé dans $\mathfrak{M}_{i+1}$. Soit $\mathfrak{N} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{M}_i$. Alors $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$; comme tout uple fini de paramètres se trouve déjà dans $\mathfrak{M}_i$ pour i assez grand, et $\mathfrak{M}_i \preceq \mathfrak{N}$ implique qu'un ensemble de formules à paramètres dans $\mathfrak{M}_i$ finiment réalisable dans $\mathfrak{N}$ l'est déjà dans $\mathfrak{M}_i$, et est donc réalisé dans $\mathfrak{M}_{i+1} \preceq \mathfrak{N}$, la structure $\mathfrak{N}$ est ω-saturée. ■

Théorème 4.19 *Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont des $\mathcal{L}$-structures ω-saturées, alors les conditions suivantes sont équivalentes pour deux uples $\bar{m} \in M$ et $\bar{n} \in N$:*

1. *$\bar{m}$ et $\bar{n}$ sont ω-isomorphes.*
2. *$(\mathfrak{M}, \bar{m})$ et $\mathfrak{N}, \bar{n})$ sont élémentairement équivalents.*
3. *$(\mathfrak{M}, \bar{m}) \approx_\omega (\mathfrak{N}, \bar{n})$.*

Démonstration : Si $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ et $(\mathfrak{N}, \bar{n})$ sont ω-isomorphes, ils sont ω-isomorphes — et donc élémentairement équivalents par le corollaire 4.8 — pour chaque sous-langage fini de $\mathcal{L}$. Mais ça signifie qu'ils sont élémentairement équivalents.

Maintenant supposons que $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ et $(\mathfrak{N}, \bar{n})$ sont élémentairement équivalents. Il nous suffira de trouver pour chaque $m_0 \in M$ un $n_0 \in N$, et pour chaque $n_0 \in N$ un $m_0 \in M$, tels que $\bar{m}m_0$ et $\bar{n}n_0$ sont élémentairement équivalents ; ce choix sera la stratégie d'$\exists$loise. Par symétrie, on peut fixer $m_0 \in M$; soit $\Phi(\bar{x}, x_0)$ l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules satisfaites dans $\mathfrak{M}$ par $\bar{m}m_0$. Alors $\mathfrak{M} \models \exists x_0 \bigwedge \Phi_0(\bar{m}, x_0)$ pour chaque sous-ensemble fini $\Phi_0(\bar{x}, x_0)$ de Φ ; comme $\bar{m}$ et $\bar{n}$ sont élémentairement équivalents, $\mathfrak{N} \models \exists x_0 \bigwedge \Phi_0(\bar{n}, x_0)$. Par ω-saturation on trouve $n_0 \in N$ tel que $n_0^k \models_{\mathfrak{N}} \Phi(\bar{n}, x_0)$. Donc $(\mathfrak{M}, \bar{m}m_0)$ et $(\mathfrak{N}, \bar{n}n_0)$ sont élémentairement équivalents.

Finalement, l'ω-équivalence implique l'ω-isomorphie. ■

Corollaire 4.20 *Deux structures dénombrables ω-saturées élémentairement équivalentes sont isomorphes.*

Démonstration : Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux telles structures, et $(m_i : i < \omega)$ et $(n_i : i < \omega)$ des énumérations de M et de N. On considère le jeu (gagné par $\exists$loise) où $\forall$belard choisit m_i à l'étape $2i$ et n_i à létape $2i + 1$. À la fin, l'application $m_i \mapsto n_i$ sera un $\mathcal{L}$-morphisme total et surjectif, donc un isomorphisme. ■

Leçon 5

Elimination des quanteurs

Définition 5.1 Une théorie T *élimine les quanteurs* si toute formule $\varphi(\bar{x})$ est équivalente modulo T à une formule sans quanteurs.

Plus généralement, un ensemble $\mathfrak{E}$ de $\mathcal{L}$-formules est un *ensemble d'élimination* si toute formule est équivalente modulo T à une combinaison booléenne de formules dans $\mathfrak{E}$.

Donc une théorie élimine les quanteurs si la collection des formules atomiques (ou bien des formules sans quanteurs) est un ensemble d'élimination. Voici un critère pour vérifier qu'un ensemble $\mathfrak{E}$ est un ensemble d'élimination :

Théorème 5.2 *Un ensemble $\mathfrak{E}$ de formules est un ensemble d'élimination pour une théorie T si pour tous modèles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de T deux uples $\bar{m} \in \mathfrak{M}$ et $\bar{n} \in \mathfrak{N}$ qui satisfont les mêmes formules dans $\mathfrak{E}$ (dans leurs modèles respectifs) satisfont les mêmes formules.*

Il est nécessaire que l'hypothèse soit satisfaite pour tous modèles $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ de T, et tous $\bar{m} \in \mathfrak{M}$, $\bar{n} \in \mathfrak{N}$. Notons que le réciproque est évidente.

Démonstration : Supposons qu'une formule $\varphi(\bar{x})$ n'est pas équivalente modulo T à une combinaison booléenne de formules dans $\mathfrak{E}$. Soient $\bar{c}, \bar{d}$ des nouvelles constantes, et considérons

$$\Phi := T \cup \{\psi(\bar{c}) \leftrightarrow \psi(\bar{d}) : \psi \in \mathfrak{E}\} \cup \{\varphi(\bar{c}), \neg\varphi(\bar{d})\}.$$

Si Φ est finiment satisfaisable, on peut trouver un modèle $\mathfrak{M}$ de Φ entier, dans lequel $\bar{c}^{\mathfrak{M}}$ et $\bar{d}^{\mathfrak{M}}$ satisfont les mêmes formules de $\mathfrak{E}$, mais pas les mêmes formules, en contradiction avec nos hypothèses. Donc il y a une partie finie

$T_0 \cup \{\psi_i(\bar{c}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{d}) : i < n\} \cup \{\varphi(\bar{c}), \neg\varphi(\bar{d})\}$ qui n'a pas de modèle, où $T_0 \subseteq T$. Par conséquent, dans chaque modèle $\mathfrak{M} \models T$ la formule φ est équivalente à une des 2^{2^n} combinaisons booléennes des $\{\psi_i : i < n\}$.

Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modèles de T qui satisfont les mêmes énoncés dans $\mathfrak{E}$, ils sont élémentairement équivalents par hypothèse (appliquée aux uples vides) ; en particulier φ est équivalente dans $\mathfrak{M}$ à la même combinaison booléenne des ψ_i que dans $\mathfrak{N}$. Par compacité, un nombre fini d'énoncés dans $\mathfrak{E}$ vrais dans $\mathfrak{M}$ suffit à impliquer, modulo T, que φ est équivalente à une combinaison booléenne $\vartheta_{\mathfrak{M}}$ particulière ; soit $\sigma_{\mathfrak{M}}$ leur conjonction.

Comme il y a au plus $|\mathcal{L}| + \omega$ énoncés dans $\mathfrak{E}$, par compacité il y en a un nombre fini $\sigma_{\mathfrak{M}_0}, \ldots, \sigma_{\mathfrak{M}_k}$ tels que tout modèle en satisfait un. On obtient que $\varphi(\bar{x})$ est équivalent modulo T à $\bigvee_{i \leq k}[\vartheta_{\underset{i}{\mathfrak{M}}}(\bar{x}) \wedge \sigma_{\mathfrak{M}_i}]$. ■

Dans les applications, on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 5.3 *Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux structures ω-saturées. Supposons que deux uples $\bar{m} \in M$ et $\bar{n} \in N$ qui satisfont les mêmes formules atomiques (dans leurs structures respectives) satisfont les mêmes formules de la forme $\exists x\, \varphi(x, \bar{y})$, où φ est sans quanteurs. Alors tout $\mathcal{L}$-morphisme partiel de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est élémentaire.*

Démonstration : Soit σ un $\mathcal{L}$-morphisme partiel qui envoie $\bar{m}$ à $\bar{n}$. Il nous suffit de trouver pour chaque $m_0 \in M$ un $n_0 \in N$, et vice versa, tel que $\bar{m}m_0 \mapsto \bar{n}n_0$ est un $\mathcal{L}$-morphisme partiel. Alors $(\mathfrak{M}, \bar{m})$ et $(\mathfrak{N}, \bar{n})$ seront ω-, et donc élémentairement équivalents.

Par symétrie il suffit de considérer $m_0 \in M$; soit $\Phi(\bar{m}, x)$ l'ensemble des formules sans quanteurs satisfaites par m_0 dans $\mathfrak{M}$. Pour chaque sous-ensemble $\Phi_0(\bar{m}, x)$ fini de Φ on a $\mathfrak{M} \models \exists x \bigwedge \Phi_0(\bar{m}, x)$; par hypothèse $\mathfrak{N} \models \exists x \bigwedge \Phi_0(\bar{n}, x)$, et par ω-saturation on trouve $n_0 \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \Phi(\bar{n}, n_0)$. ■

Corollaire 5.4 *Une théorie T élimine les quanteurs si pour tous modèles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de T deux uples $\bar{m} \in M$ et $\bar{n} \in N$ qui satisfont les mêmes formules atomiques satisfont les mêmes formules de la forme $\exists x \varphi(x, \bar{y})$, où φ est sans quanteur.*

Démonstration : On trouve des extensions ω-saturées $\mathfrak{M}_0 \succeq \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}_0 \succeq \mathfrak{N}$, et on applique le lemme 5.3 pour voir que $\bar{m}$ et $\bar{n}$ satisfont les mêmes formules. Ensuite on utilise le théorème 5.2. ■

L'élimination des quanteurs a une conséquence bien importante.

Définition 5.5 Une théorie T est *modèle-complète* si toute inclusion de modèles de T est élémentaire.

Proposition 5.6 *Une théorie qui élimine les quanteurs est modèle-complète.*

DÉMONSTRATION : Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ des modèles de T avec $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, et $\varphi(\bar{m})$ un énoncé à paramètres dans $\mathfrak{M}$. Alors $\varphi(\bar{x})$ est équivalent dans tout modèle de T à une formule $\psi(\bar{x})$ sans quanteurs, et

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \psi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m}). \quad \blacksquare$$

Exemple 5.7 La $\mathcal{L}_{ann}$-théorie de $\mathbb{R}$ est modèle-complète, mais n'élimine pas les quanteurs : $\exists y\, y^2 = x$ n'est pas équivalente à une formule sans quanteurs. On verra dans le chapitre suivant que $\mathbb{R}$ élimine les quanteurs si on ajoute l'ordre au langage.

On voit que les propriétés d'élimination dépendent du langage choisi !

Remarque 5.8 Soit T une théorie quelconque. Pour toute formule $\varphi(\bar{x})$ on rajoute une nouvelle relation $R_\varphi(\bar{x})$ au langage, et l'axiome $\forall \bar{x}\, [\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow R_\varphi(\bar{x})]$ à la théorie, pour former le langage $\mathcal{L}'$ et la théorie T'. Alors T' elimine facilement les quanteurs : une $\mathcal{L}$-formule φ est équivalente à R_φ ; quant aux $\mathcal{L}'$-formules on remplace d'abord les éventuelles sous-formules R_ψ par ψ pour obtenir une $\mathcal{L}$-formule équivalente. Ceci a pour effet de changer la notion de sous-structure : si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux modèles de T avec $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, ils ont des expansions canoniques a des modèles de T' en interpretant

$$R_\varphi^{\mathfrak{M}} := \{\bar{m} \in M : \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})\}$$

(et similairement pour $\mathfrak{N}$). Mais comme $\mathcal{L}'$-structures on a $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ si et seulement si $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.

Théorème 5.9 *Une théorie est modèle-complète si et seulement si toute formule est équivalente modulo T à une formule existentielle.*

Donc pour une théorie modèle-complète, les formules existentielles forment un ensemble d'élimination, où on n'a même pas besoin des combinaisons booléennes. (Comme $\exists x \varphi(x) \land \exists y \psi(y)$ est équivalent à $\exists x \exists y\, (\varphi(x) \land \psi(y))$, et $\exists x \varphi(x) \lor \exists y \psi(y)$ est équivalente à $\exists x \exists y\, (\varphi(x) \lor \psi(y))$, ça signifie qu'on peut supprimer le quanteur universel dans la forme prénexe.)

Démonstration : Si toute formule est équivalente à une formule existentielle, considérons deux modèles $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, et une formule $\varphi(\bar{m})$ vraie dans $\mathfrak{M}$. Elle est équivalente à une formule $\exists \bar{x}\, \psi(\bar{x}, \bar{m})$, et on trouve $\bar{n} \in M$ tels que $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{n}, \bar{m})$. Donc $\mathfrak{N} \models \psi(\bar{n}, \bar{m})$, et $\mathfrak{N} \models \exists \bar{x}\, \psi(\bar{x}, \bar{m})$, d'où $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$. On a bien $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.

Réciproquement, supposons que T soit modèle-complète, et considérons deux modèles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de T, ainsi que deux uples $\bar{m} \in M$ et $\bar{n} \in N$. Supposons que les formules existentielles satisfaites par $\bar{m}$ dans $\mathfrak{M}$ forment un sous-ensemble des formules existentielles satisfaites par $\bar{n}$ dans $\mathfrak{N}$. Soient $\{c_m : m \in M\}$ des nouvelles constantes, et considérons

$$\Phi = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}, N) \cup \{\varphi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}, \bar{n}) : \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \ldots, m_k, \bar{m}), \varphi \text{ atomique}\}.$$

Chaque sous-ensemble fini $\Phi_0(\bar{c}, \bar{n})$ de Φ est interpretable dans $\mathfrak{N}$, comme $\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \bigwedge \Phi_0(\bar{x}, \bar{m})$ implique que $\mathfrak{N} \models \exists \bar{x} \bigwedge \Phi_0(\bar{x}, \bar{n})$. Donc il y a un modèle $\mathfrak{N}'$ de Φ, extension élémentaire de $\mathfrak{N}$, qui contient une copie de $\mathfrak{M}$, l'ensemble $\mathfrak{M}' = \{c_m^{\mathfrak{N}'} : m \in M\}$, comme sous-structure ; notons que l'uple correspondant à $\bar{m}$ est $\bar{n}$. Par modèle-complétude $\mathfrak{M}' \preceq \mathfrak{N}'$. Pour chaque formule on a

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models \varphi(\bar{n}) \Leftrightarrow \mathfrak{N}' \models \varphi(\bar{n}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n}).$$

Donc $\bar{m}$ et $\bar{n}$ satisfont les mêmes formules. Par le théorème 5.2 chaque formule est équivalente à une combinaison booléenne de formules existentielles.

Il nous reste de voir qu'une formule universelle $\varphi(\bar{x})$ est équivalente à une formule existentielle. Soit $\Phi(\bar{x})$ la collection des formules existentielles en $\bar{x}$ qui impliquent $\varphi(\bar{x})$ modulo T, et

$$\Psi(\bar{x}) = \{\neg\psi(\bar{x}) : \psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})\}.$$

Soient $\bar{c}$ des nouvelles constantes, et supposons que

$$T \cup \Psi(\bar{c}) \cup \{\varphi(\bar{c})\}$$

a un modèle $\mathfrak{M}$. Si $\Phi_0(\bar{x})$ est la collection des formules existentielles satisfaites par $\bar{c}^{\mathfrak{M}}$, alors $T \cup \Phi_0(\bar{d}) \cup \{\neg\varphi(\bar{d})\}$ n'a pas de modèle ($\bar{c}$ et $\bar{d}$ doivent satisfaire les mêmes formules par la première partie de la preuve), et il y a une partie finie $\Phi_0'(\bar{d}) \cup \{\neg\varphi(\bar{d})\}$ qui est inconsistante avec T. Mais ça signifie que $\psi(\bar{x}) := \bigwedge \Phi_0'(\bar{x})$ implique $\varphi(\bar{x})$ modulo T. Donc $\psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$, et $\mathfrak{M} \models \neg\psi(\bar{c})$, en contradiction avec $\mathfrak{M} \models \Phi_0'(\bar{c})$.

Il y a donc une partie finie $\Psi_0(\bar{x})$ de $\Psi(\bar{x})$ telle que $T \cup \Psi_0(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ est inconsistant. Donc $\bigwedge \Psi_0(\bar{x})$ implique $\neg\varphi(\bar{x})$ modulo T, et $\varphi(\bar{x})$ implique

$$\psi_0(\bar{x}) := \bigvee \{\psi(\bar{x}) : \neg\psi(\bar{x}) \in \Psi_0(\bar{x})\}$$

modulo T. Comme $\psi(\bar{x})$ implique $\varphi(\bar{x})$ modulo T pour toute $\psi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$, la formule $\varphi(\bar{x})$ est équivalente à $\psi_0(\bar{x})$. ■

Leçon 6

Elimination des quanteurs dans les corps algébriquement et réel clos

6.1 Corps algébriquement clos

Rappelons que la théorie ACF des corps algébriquement clos est donnée par les énoncés suivants :

- La théorie des corps.
- Pour chaque $n < \omega$ l'énonce $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x\, x^n + y_1 x^{n-1} + \cdots + y_n = 0$.

Théorème 6.1 *La théorie des corps algébriquement clos élimine les quanteurs.*

Démonstration : Soient K et L deux corps algébriquement clos, et $\bar{a} \in K$ et $\bar{b} \in L$ deux uples qui satisfont les mêmes formules atomiques. Alors $\bar{a}$ et $\bar{b}$ engendrent des sous-corps A et B isomorphes. Considérons une formule $\varphi(x, \bar{y})$ sans quanteurs ; c'est une disjonction finie de formules de la forme $\bigwedge_{i \in I} f_i(x, \bar{y}) = 0 \wedge \bigwedge_{j \in J} g_j(x, \bar{y}) \neq 0$, où les f_i et g_j sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Comme tous les g_j sont différents de 0 si et seulement si $\prod_{j \in J} g_j \neq 0$, on peut supposer $|J| \leq 1$.

Si $\bigwedge_i f_i(x, \bar{a}) = 0$ définit un ensemble fini dans K (éventuellement vide), il est contenu dans la clôture algébrique $\tilde{A}$ de A, ainsi que toutes les solutions de

$\varphi(x,\bar{a})$. De l'autre coté, si $\bigwedge_i f_i(x,\bar{a})=0$ définit un ensemble infini dans K (ce sont donc des équations polynômiales triviales), c'est K entier, et $\varphi(x,\bar{a})$ définit un ensemble co-fini. La clôture algébrique étant infinie, $\varphi(x,\bar{a})$ a une solution dans $\tilde{A}$.

Dans les deux cas, $\varphi(x,\bar{a})$ a une solution dans K si et seulement si $\varphi(x,\bar{a})$ a une solution dans $\tilde{A}$. De même, $\varphi(x,\bar{b})$ a une solution dans L si et seulement s'il a une solution dans $\tilde{B}$. Or, l'isomorphie de A et B implique l'isomorphie de leurs clôtures algébriques ; on voit que $\varphi(x,\bar{a})$ a une solution dans $\tilde{A}$ (c'est-à-dire dans K) si et seulement si $\varphi(x,\bar{b})$ a une solution dans $\tilde{B}$ (c'est-à-dire dans L). Donc $\bar{a}$ et $\bar{b}$ satisfont les mêmes énoncés de la forme $\exists x\,\varphi(x,\bar{y})$; par le corollaire 5.4 ACF élimine les quanteurs. ■

La modèle-complétude nous donne par un court raisonnement algébrique le fameux théorème des zéros de Hilbert.

Proposition 6.2 *Si K est un corps algébriquement clos, alors tout système fini $\varphi(\bar{x})$ d'équations et d'inéquations à coefficients dans K qui a une solution dans un corps L extension de K a déjà une solution dans K lui-même.*

Démonstration : Soit $\tilde{L}$ la clôture algébrique de L. Alors $\varphi(\bar{x})$ a une solution dans $\tilde{L}$; car $K \preceq \tilde{L}$ par modèle-complétude, $K \models \exists\bar{x}\,\varphi(\bar{x})$. ■

Théorème 6.3 Nullstellensatz *Soit K un corps algébriquement clos, et $f_1(\bar{x}),\dots,f_m(\bar{x}),g(\bar{x})$ des polynômes sur K. Si tout zéro commun de $f_1,\dots,f_m$ est aussi un zéro de g, alors il y a $k\in\mathbb{N}$ tel que g^k est dans l'idéal engendré par $f_1,\dots,f_m$.*

Démonstration : On met $f_0(\bar{x},z)=1-g(\bar{x})z$, et on considère l'idéal I dans $K[\bar{x},z]$ engendré par $f_0,f_1,\dots,f_m$.

Supposons que $I<K[\bar{x},z]$. Alors I est contenu dans un idéal propre maximal M, et $K[\bar{x},zz]/M$ est un corps L. Car M ne peut contenir aucun élément invertible de l'anneau, K s'injecte canoniquement dans L par $a\mapsto a+M$; ceci induit une injection $\sigma : K[\bar{X},Z]\to L[\bar{X},Z]$ des anneaux polynômiaux en $\bar{X}Z$.

On voit facilement que les polynômes $f_0(\bar{X},Z),\dots,f_m(\bar{X},Z)$ ont un zéro commun $(x_0+M,\dots,x_n+M,z+M)$, car

$$f_i(x_0+M,\dots,x_n+M,z+M)=f_i(x_0,\dots,x_n,z)+M\in M.$$

Donc $f_0, \dots, f_m$ ont un zéro commun dans K, qui est impossible, car tout zéro commun $\bar{x}_0$ de $f_1, \dots, f_m$ annule g, d'où $f_0(\bar{x}_0, z) = 1$.

Alors $I = K[\bar{x}, z]$, et il y a des polynômes $p_i(x, z) \in K[\bar{x}, z]$ pour $i \leq m$ tels que $\sum_{i=0}^{m} p_i f_i = 1$; en mettant $z = 1/g(\bar{x})$ et en multipliant par une large puissance g^d de g, on obtient polynômes $\tilde{p}_i(\bar{x}) = g^d(\bar{x}) p_i(\bar{x}, 1/g(\bar{x})) \in K[\bar{x}]$ tels que

$$g^d(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{p}_i(\bar{x}) f_i(\bar{x}). \quad \blacksquare$$

Proposition 6.4 *1. La théorie ACF_p d'un corps algébriquement clos de caractéristique donné p est complète : tout énoncé φ sans paramètres est soit vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique p, soit faux dans tout corps algébriquement clos de caractéristique p. De même pour les énoncés à paramètres $\bar{a}$, pourvu que les corps contiennent le corps engendré par $\bar{a}$.*

2. Soit φ un énoncé sans paramètres. Alors φ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle si et seulement si φ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout p premier sauf un nombre fini.

Démonstration :

1. La première partie découle de la deuxième, car tout corps de caractéristique donnée contient le sous-corps engendré par 0 et 1 (le corps premier). Soit donc $\varphi(\bar{a})$ un énoncé à paramètres $\bar{a}$, et K et L deux corps algébriquement clos contenant le corps A engendré par $\bar{a}$. Alors $\bar{a}$ satisfait les mêmes formules sans quanteurs dans K, dans A et dans L, et donc les mêmes formules ; en particulier $K \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow L \models \varphi(\bar{a})$.

2. Pour un énoncé φ considérons $\Phi = \mathrm{ACF}_0 \cup \{\varphi\}$. S'il y a des corps algébriquement clos de caractéristique arbitrairement grande qui satisfont φ, alors chaque partie finie de Φ a un modèle, comme elle ne peut contenir qu'un nombre fini d'axiomes de la forme $1 + \cdots + 1 \neq 0$. Donc Φ a un modèle, un corps algébriquement clos de caractéristique 0 qui satisfait φ, et φ est vrai dans chaque tel corps.

   Pour le réciproque on considera $\neg\varphi$. $\blacksquare$

En particulier, tout énoncé est soit vrai dans tous les corps algébriquement clos sauf un nombre fini, soit faux dans tous les corps algébriquement clos sauf un nombre fini.

Définition 6.5 Une fonction $f(x)$ est *pseudo-rationelle* si elle est de la forme $\sqrt[p^n]{g(x)/h(x)}$, où p est la caractéristique du corps, $n \in \mathbb{N}$, et g, h sont des polynômes. (Si $p = 0$, en doit prendre $n = 0$ et $p^n = 1$; on obtient une fonction rationelle.)

Une fonction est pseudo-rationelle *par morceaux* (définissables) s'il y a une partition de son domaine en un nombre fini de parties définissables, telle que f est pseudorationelle sur chaque partie.

Une fonction pseudo-rationelle est définie par la formule $y^{p^n}h(x) = g(x)$; réciproquement, par élimination des quanteurs, on voit facilement qu'une fonction dont le graphe est donné par une formule (une fonction *définissable*) dans un corps algébriquement clos est pseudo-rationelle par morceaux.

Corollaire 6.6 Principe d'Ax *Si K est un corps algébriquement clos et $A \subseteq K^n$ est définissable, toute application définissable injective de A dans A est surjective.*

Démonstration : Soit K un corps avec une fonction définissable $f : A \to A$ qui est injective mais pas surjective. Si $\bar{a}$ sont les paramètres utilisés pour définir f et A, ce fait s'exprime par une formule $\varphi(\bar{a})$, et $K \models \exists \bar{x}\, \varphi(\bar{x})$. Donc cet énoncé est vrai dans les corps algébriquement clos de toute caractéristique sauf un nombre fini ; en particulier il y a un nombre premier p tel que la clôture algébrique K_p de $\mathbb{F}_p$ satisfait $\exists \bar{x}\, \varphi(\bar{x})$.

Soit $\bar{b} \in K_p$ tel que $K_p \models \varphi(\bar{b})$. Donc il y a un sous-ensemble définissable B de K_p^n et une appliccation définissable $g : B \to B$ qui est injective mais pas surjective, où B et g se définissent à partir de $\bar{b}$ comme A et f se définissent à partir de $\bar{a}$. Il y a une partition définissable de B en un nombre fini de parties définissables $B_0, \ldots, B_m$ telles que g est équivalent à une fonction pseudo-rationelle g_i sur chaque B_i. Soit C l'ensemble fini des paramètres qui figurent dans la définition des B_i et des g_i, et F un sous-corps fini de K_p qui contient C. Alors les valeurs de g sur $F^n \cap B$ sont des valeurs des fonctions pseudo-rationelles à paramètres dans F, et donc toujours dans $F^n \cap B$: la restriction de g à $F^n \cap B$ est une fonction injective de $F^n \cap B$ dans lui-même. Mais une fonction injective sur un domaine fini est surjective : g atteint tous les points dans $F^n \cap B$, pour tout sous-corps fini F de K_p assez grand. Or, la réunion de ces sous-corps est K_p lui même, g est bien surjective sur B, ce qui contredit nos hypothèses. ∎

6.2 Corps réel clos

Définition 6.7 La théorie RCF des *corps réels clos* est la suivante :

1. La théorie des corps avec $0 \neq 1$.
2. $\leq$ est un ordre total qui satisfait
   (a) si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$;
   (b) si $x \leq y$ et $z \geq 0$, alors $xz \leq yz$;
   (c) si $x \leq y$ et $z \leq 0$, alors $xz \geq yz$.
3. Si $f(x) \in K[x]$ et $a \leq b$ sont tels que $f(a)f(b) < 0$, alors il y a $x \in [a, b]$ avec $f(x) = 0$. (Ceci se dit par un énoncé pour chaque degré du polynôme f.)

Donc le langage est le langage des anneaux, enrichi par un symbole $\leq$ pour l'ordre. Les énoncés 1. et 2. axiomatisent la théorie des corps *ordonnés* ; on va voir que chaque corps ordonné se plonge dans un corps réel clos. Un corps ordonné est nécessairement de caractéristique 0 ; comme $a < \frac{a+b}{2} < b$ pour $a < b$, l'ordre est dense et sans extrémité, car $x-1 < x < x+1$. Pour chaque $a \neq 0$ soit $a > 0$, soit $-a > 0$; on dénote par $|a|$ celui qui est positif. On peut montrer que a est positif si et seulement si a^{-1} l'est, et que l'inégalité du triangle $|a + b| \leq |a| + |b|$ est satisfaite.

Remarque 6.8 On peut remplacer l'ordre total de la condition 2. par un prédicat unaire ≥ 0 tel que

2′. (a) on a $-1 \not\geq 0$, et pour tout x, soit $x \geq 0$, soit $-x \geq 0$;
   (b) si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $x + y \geq 0$ et $xy \geq 0$.

Ensuite on définit un ordre total $x \geq y$ si et seulement si $x - y \geq 0$.

Exemple 6.9 $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, \leq \rangle$ est un corps réel clos.

Remarque 6.10 Bien que $\mathbb{R}$ soit l'exemple canonique d'un corps réel clos, il n'est pas ω-saturé : l'ensemble $\{x > n : n \in \mathbb{N}\}$ est finiment réalisable dans $\mathbb{R}$, mais n'a pas de réalisation dans $\mathbb{R}$. Par contre, l'exemple canonique d'un corps algébriquement clos, les nombres complexes $\mathbb{C}$, est ω-saturé (et en fait même 2^ω-saturé, ce qui signifie qu'on peut considérer des ensembles de formules avec $< 2^\omega$ paramètres).

Lemme 6.11 *Chaque corps ordonné K se plonge dans un corps L réel clos algébrique sur K.*

Démonstration : Par le lemme de Zorn, K a une extension L (de corps ordonné) maximal algébrique ; L est un sous-corps de la clôture algébrique $\tilde{K}$ de K (qui n'est pas ordonnée, car -1 y est un carré). Supposons que $a < b$ et $f(x) \in L[x]$ est de degré minimal tel que $f(a) > 0 > f(b)$, mais f n'a pas de zéro dans (a, b) ; notons que f est nécessairement irréductible. Soit

$$A = \{c \in L : \exists x \in (a, b)\ [c \leq x \wedge f(x) > 0]\}.$$

Notons que A n'a pas d'élément maximal : si $f(c) > 0$, il y a $\epsilon > 0$ (qui se calcule en fonction de $f(c)$ et des coefficients de f) tel que f est positif sur $(c - \epsilon, c + \epsilon)$; de même $B := L - A$ n'a pas d'élément minimal.

Soit α une racine de f dans $\tilde{K}$. Alors $L(\alpha) \cong L[x]/(f(x))$; chaque élément dans $L(\alpha)$ a un (et un seul) représentant g qui est un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg(f)$. Si $g \neq 0$, comme $g(x)$ n'a qu'un nombre fini de zéros, et donc qu'un nombre fini de changements de signe par minimalité du degré de f, il y a un segment final de A et un segment initial de B tel que $g(x)$ y est positif (et on dira que $g > 0$) ou négatif (et $g < 0$). Il est évident que soit $g \geq 0$, soit $-g \geq 0$, et que la somme de deux représentants positifs est positif. Quant au produit, on peut écrire $g_1 \cdot g_2 = g_3 \cdot f + g_4$, où g_4 est le représentant du produit $g_1 \cdot g_2$, de degré strictement inférieur à $\deg(f)$; comme g_3 est également de degré strictement inférieur à $\deg(f)$, il y a un segment finial A_0 de A et un segment initial B_0 de B tels que les polynômes g_1, g_2, g_3, g_4 ont signe constant sur $A_0 \cup B_0$. Si g_1 et g_2 sont positifs, comme f change signe sur $A_0 B_0$ et $g_3(x) \cdot f(x)$ est donc negatif pour un $x \in A_0 \cup B_0$, il est impossible que g_4 soit négatif. Ceci montre que nous venons de définir un ordre qui étend l'ordre de K, et qui place α (qui est représenté par x) dans la coupure déterminée par A.

Comme ça contredit la maximalité de L, le lemme est montré. ■

On appelle un tel corps L une clôture réelle, notons qu'elle n'a pas d'éléments infinitésimaux (ni infiniment grands), puisqu'un tel élément ne peut pas annuler un polynôme sur K. En général, un corps K a beaucoup de clôtures réelles dans sa clôture algébrique. Si L^* en est une, pour un $\alpha \in L^* - K$ de degré minimal soit f son polynôme minimal. Soit $g \in K[X]$ un polynôme de degré minimal tel que g a un zéro dans la coupure déterminée par α dans une clôture réelle. Alors g n'y a pas de deuxième zéro (sinon g' y en aurait un), et il existent $a < \alpha < b$ dans K tel que g change signe dans (a, b), et son seul zéro dans (a, b) est dans la même coupure que α. Donc g a un zéro dans cette coupure qui est dans $L^* - K$; par minimalité g et f ont même degré, et f aussi change signe dans un interval de K autour de α. L'ordre sur $K(\alpha)$ est complètement déterminé par la coupure $\{a \in K : a < \alpha\}$ et le polynôme minimal f de α : En fait, si $g(x) \in K[x]$ avec $\deg(g) < \deg(f)$ est positif dans un interval de K autour de α, alors $g(\alpha) > 0$ (sinon g ou une de ses dérivées aurait un zéro dans la coupure déterminée par α, en contradiction avec la minimalité du degré de f). De même, si $g(x) < 0$ autour de α, alors $g(\alpha) < 0$. On voit donc que toute clôture réelle s'obtient par une suite (possiblement transfinie) d'adjonctions de tels éléments.

Corollaire 6.12 *Soit $\sigma : K_1 \to K_2$ un isomorphisme de corps ordonnés, et L_i une clôture réelle de K_i pour $i = 1, 2$. Alors σ s'étend en un isomorphisme de L_1 à L_2.*

DÉMONSTRATION : Pour chaque polynôme $f(x) \in K_1[x]$ qui change de signe n fois dans (a, b) le polynôme $\sigma(f)(x)$ change de signe n fois dans $(\sigma(a), \sigma(b))$; comme L_2 est réel clos, pour un zéro α de f dans L_1 on trouve un zéro α' de $\sigma(f)$ dans L_2 avec $\sigma(\{a \in K_1 : a < \alpha\}) = \{b \in K_2 : b < \alpha'\}$. Cette application s'étend en un isomorphisme de corps ordonnés $K_1(\alpha)$ et $K_2(\alpha')$. Réciproquement, pour tout $\alpha' \in L_2$ on trouve $\alpha_1 \in L_1$ tel que σ se prolonge en un isomorphisme de $K_1(\alpha)$ à $K_2(\alpha')$. Par va-et-vient, on construit itérativement un isomorphisme de L_1 à L_2 prolongeant σ. ∎

Théorème 6.13 *La théorie des corps réel clos est complète et élimine les quanteurs.*

DÉMONSTRATION : Soient K_1 et K_2 deux cors réel clos (qu'on peut supposer ω-saturés), et $\bar{a} \in K_1$ et $\bar{b} \in K_2$ deux uples qui satisfont les mêmes formules atomiques. Alors les sous-corps A et B engendrés par $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont isomorphes.

Notons que les clôtures algébriques relatives $\tilde{A} \cap K_1$ et $\tilde{B} \cap K_2$ sont réel clos, et donc isomorphes. Alors, si $a_0 \in K_1$ est algébrique sur A, on trouve $b_0 \in K_2$ tel que $\bar{a}a_0$ et $\bar{b}b_0$ engendrent des corps ordonnés isomorphes : les deux uples satisfont les mêmes formules atomiques.

Si $a_0 \in K_1$ est transcendant sur A, alors $A(a_0)$ est isomorphe au corps des fonctions rationelles $A(x)$, et l'ordre est déterminé par la coupure $\{a \in A : a < a_0\}$. Par ω-saturation on trouve $b_0 \in K_2$ transcendant sur B, tel que b_0^n réalise la coupure correspondante a cele de a_0^n. (Cet ensemble est finiment consistant, comme l'ordre est dense sans extremité, et la condition pour mn implique celle pour n). Puisque la somme de deux coupures est une coupure, et le produit d'une coupure par un élément du corps est une coupure, la donnée des coupures de toutes les puissances d'un élément transcendant determine l'ordre sur l'anneau, et donc aussi le corps, engendré. Par conséquent, $A(a_0)$ et $B(b_0)$ sont isomorphes comme corps ordonnés, c'est-à-dire $\bar{a}a_0$ et $\bar{b}b_0$ satisfont les mêmes formules atomiques.

Par le corollaire 5.4, RCF élimine les quanteurs. C'est une théorie complète car $\mathbb{R} \cap \tilde{\mathbb{Q}}$, la clôture réelle des rationnels, s'injecte élémentairement dans tout modèle. ■

Exercice 6.14 Montrer qu'un corps ordonné est dense dans sa clôture réelle.