CHAPITRE 10

Fonctions de matrices

Sommaire

Dans le chapitre 9, nous avons montré que toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé se décompose en une somme

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

formée d'une matrice $\mathbf{D}$ diagonalisable et d'une matrice $\mathbf{N}$ nilpotente qui commutent entre elles. Dans ce chapitre, nous appliquons cette décomposition matricielle au calcul de puissances et d'exponentielles de matrices, avec pour objectif l'étude des systèmes d'évolution discrets et les systèmes d'équations différentielles linéaire à coefficients constants.

§ 1 Calcul des puissances d'une matrice

10.1.1 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}\dots(x-\lambda_p)^{n_p}.$$

Soient $\Pi_{\lambda_1},\dots,\Pi_{\lambda_p}$ les projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$.

i) Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, alors, pour tout entier naturel $k \geq 0$, on a

$$\mathbf{A}^k = \lambda_1^k\Pi_{\lambda_1} + \dots + \lambda_p^k\Pi_{\lambda_p}. \qquad (10.1)$$

ii) Si $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable, alors, pour tout entier naturel $k \geq 0$, on a

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^j \Pi_{\lambda_i}, \tag{10.2}$$

où k_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.

Preuve. Montrons l'assertion **i)**. D'après le théorème de décomposition spectrale algébrique, théorème 9.2.7, si la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable, il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p \Pi_{\lambda_p},$$

avec $\Pi_{\lambda_i}\Pi_{\lambda_j} = 0$, si $i \neq j$, et $\Pi_{\lambda_i}^2 = \Pi_{\lambda_i}$, pour tout i. On en déduit la relation (10.1).

Montrons l'assertion **ii)**. D'après le théorème de décomposition spectrale algébrique, théorème 9.2.7, il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

avec

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p \Pi_{\lambda_p} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{N} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_1} + \ldots + (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_p}.$$

Dans la décomposition de la matrice $\mathbf{N}$, la matrice $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_i}$ est nilpotent d'indice k_i, l'ordre de multiplicité de la racine λ_i dans le polynôme minimal de $\mathbf{A}$. Les projecteurs spectraux satisfont $\Pi_{\lambda_i}\Pi_{\lambda_j} = 0$, si $i \neq j$, et $\Pi_{\lambda_i}^2 = \Pi_{\lambda_i}$, pour tout i. Par suite, pour tout entier k, on a

$$\mathbf{D}^k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \Pi_{\lambda_i} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{N}^k = \sum_{i=1}^{p} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^k \Pi_{\lambda_i}.$$

Les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$ commutent, *i.e.*, $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$, donc d'après la formule du binôme, on a :

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{D} + \mathbf{N})^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathbf{D}^{k-j} \mathbf{N}^j. \tag{10.3}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^k &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{p} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^j \Pi_{\lambda_i}, \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^j \Pi_{\lambda_i}.
\end{aligned}$$

D'où la relation 10.2. $\square$

10.1.2. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

On montre que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable et de spectre $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{-3, 1\}$. On a la décomposition spectrale :

$$\mathbf{A} = \Pi_1 - 3\Pi_{-3},$$

d'où, pour entier naturel k,

$$\mathbf{A}^k = \Pi_1 + (-3)^k\Pi_{-3}.$$

On calcule l'expression des projecteurs en fonction de $\mathbf{A}$:

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_3, \qquad \Pi_{-3} = -\frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_3. \tag{10.4}$$

On en déduit que, pour entier naturel k :

$$\mathbf{A}^k = \frac{1}{4}(1 - (-3)^k)\mathbf{A} + \frac{1}{4}(3 + (-3)^k)\mathbf{1}_3.$$

10.1.3. Exemple. — Considérons la matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

On a vu en 9.2.9 que la matrice $\mathbf{A}$, de spectre $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, 2\}$, n'est pas diagonalisable. Il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$$

en la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotent, donnés par

$$\mathbf{D} = \Pi_1 + 2\Pi_2, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D}.$$

On a $\mathbf{D}^k = \Pi_1 + 2^k\Pi_2$ et $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$. Comme les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$ commutent, et que $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$, d'après la formule du binôme (10.3), on a :

$$\mathbf{A}^k = \binom{k}{0}\mathbf{D}^k + \binom{k}{1}\mathbf{D}^{k-1}\mathbf{N}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k &= \Pi_1 + 2^k\Pi_2 + k(\Pi_1 + 2^{k-1}\Pi_2)(\mathbf{A} - \Pi_1 - 2\Pi_2),\\ &= (1-k)\Pi_1 + k\mathbf{A}\Pi_1 + 2^k\Pi_2 + k2^{k-1}\mathbf{A}\Pi_2 - k2^k\Pi_2.\end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{A}^k = ((1-k)\mathbf{1}_3 + k\mathbf{A})\Pi_1 + (2^k(1-k)\mathbf{1}_3 + k2^{k-1}\mathbf{A})\Pi_2.$$

§ 2 La fonction exponentielle

10.2.1. De l'exponentielle scalaire à l'exponentielle matricielle. — L'exponentielle réelle ou complexe peut se définir en utilisant le développement en série, pour tout réel ou complexe x, on a :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k.$$

Dans l'expression précédent, si l'on remplace formellement le scalaire x par une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on obtient une série de matrices :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \mathbf{1}_n + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots$$

On montre que cette série est convergente, sa valeur est appelée l'exponentielle de la matrice $\mathbf{A}$ et est noté $e^{\mathbf{A}}$. Dans ce cours, la preuve de la convergence de cette série de matrices sera admise. On notera cependant que la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$ est une conséquence de la version scalaire de cette série. En effet, supposons que la matrice $\mathbf{A}$ soit diagonalisable, il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix}$$

et où $\mathbf{P}$ est une matrice inversible. On a $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} \\
&= \mathbf{P}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{D}^k\right)\mathbf{P}^{-1} \\
&= \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_p} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}
\end{aligned}$$

Ceci constitue une autre façon de définir l'exponentielle d'une matrice diagonalisable $\mathbf{A}$; on pose

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_p} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}. \tag{10.5}$$

Notons que cette définition est indépendante du choix des vecteurs de la base de diagonalisation, *i.e.*, indépendante de la matrice $\mathbf{P}$. En effet, on a la décomposition spectrale, théorème 9.2.7,

$$\mathbf{A} = \lambda_1\Pi_{\lambda_1} + \dots \lambda_p\Pi_{\lambda_p}.$$

En utilisant le même raisonnement, on montre que

$$e^{\mathbf{A}} = e^{\lambda_1}\Pi_{\lambda_1} + \dots e^{\lambda_p}\Pi_{\lambda_p}.$$

La définition (10.5) est donc indépendante du choix des vecteurs propres, *i.e.*, de la matrice $\mathbf{P}$ choisie.

10.2.2 Proposition. — La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

i) pour toutes matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, on a

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}.$$

ii) pour toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}.$$

iii) pour toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $e^{\mathbf{A}}$ est inversible et

$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}.$$

10.2.3. Décomposition spectrale et exponentielle d'une matrice. — La décomposition spectrale des matrices nous permet d'exprimer l'exponentielle d'une matrice en terme de ses projecteurs spectraux.

10.2.4 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}\ldots\ (x-\lambda_p)^{n_p}.$$

i) Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, alors

$$e^{\mathbf{A}} = e^{\lambda_1}\Pi_{\lambda_1} + \ldots + e^{\lambda_p}\Pi_{\lambda_p}, \tag{10.6}$$

où les Π_{λ_i} désignent les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$.

ii) Si $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable, alors

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{k_i-1}\frac{e^{\lambda_i}}{k!}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{1}_n)^k\Pi_{\lambda_i}, \tag{10.7}$$

où les Π_{λ_i} désignent les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$ et k_i est l'ordre de multiplicité de la racine λ_i dans le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$.

Preuve. Montrons l'assertion **i)**. Supposons que $\mathbf{A}$ soit diagonalisable, d'après le théorème 9.2.7, on a

$$\mathbf{A} = \lambda_1\Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p\Pi_{\lambda_p}.$$

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $\Pi_{\lambda_i}^2 = \Pi_{\lambda_i}$ et pour tous $i, j \in [\![1,p]\!]$ tels que $i \neq j$, on a $\Pi_{\lambda_i}\Pi_{\lambda_j} = 0$. Par suite,

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i^k}{k!}\Pi_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_i^k}{k!}\Pi_{\lambda_i},$$

d'où la relation (10.6).

Montrons l'assertion **ii)**. Supposons que $\mathbf{A}$ soit non diagonalisable, d'après le théorème 9.2.7, il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

avec

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p \Pi_{\lambda_p}, \qquad \mathbf{N} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_1} + \ldots + (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_p},$$

et où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la matrice $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_i}$ est nilpotente, d'indice de nilpotence l'ordre de multiplicité k_i de la racine λ_i dans le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.

D'après **i)**, on a

$$e^{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i} \Pi_{\lambda_i}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{N}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{N}^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{k!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^k \Pi_{\lambda_i}, \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{k_i - 1} \frac{1}{k!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^k \Pi_{\lambda_i}. \end{aligned}$$

Enfin, comme les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$ commutent, on en déduit la relation (10.7) :

$$e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{D}} e^{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{k_i - 1} \frac{e^{\lambda_i}}{k!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^k \Pi_{\lambda_i}.$$

□

§ 3 Exercices

10.3.1 Exercice.— Calculer l'exponentielle des matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}.$$

10.3.2 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Exprimer, pour tout entier $k \geq 0$, la matrice $\mathbf{A}^k$ en fonction de $\mathbf{A}$.
2. Exprimer, pour tout réel t, la matrice $e^{t\mathbf{A}}$ en fonction de $\mathbf{A}$.
3. Répondre aux mêmes questions avec les matrices suivantes

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

10.3.3 Exercice. — On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\mathbf{A}$ soit inversible. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est inversible, calculer l'inverse de $\mathbf{A}$.
4. Calculer $\mathbf{A}^k$, pour tout entier k.
5. Calculer $e^{t\mathbf{A}}$, pour tout réel t.

10.3.4 Exercice. — On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

On suppose que a est non nul. Exprimer les matrices $\mathbf{A}^k$, pour tout entier naturel k, et $e^{\mathbf{A}}$ en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.