CHAPITRE 11

Systèmes dynamiques discrets

Sommaire

§ 1 Les suites récurrentes

11.1.1. Suites récurrentes couplées.— Le calcul des puissances d'une matrice peut s'appliquer à la résolution du problèmes de suites récurrentes couplées. Soient deux suites $(u_k)_k$ et $(v_k)_k$ récurrentes couplées de la façon suivante :

$$\left| \begin{array}{l} u_{k+1} = au_k + bv_k \\ v_{k+1} = cu_k + dv_k. \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales (u_0, v_0). Naturellement se problème se pose en les mêmes termes pour un nombre arbitraire de suites.

En posant $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$, le système s'écrit

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k, \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

On montre par récurrence qu'alors

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0, \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

11.1.2 Exercice.— Résoudre le système linéaire récurrent suivant :

$$\left| \begin{array}{ll} x_k & = x_{k-1} + z_{k-1} \\ y_k & = y_{k-1} + z_{k-1} \\ z_k & = 2z_{k-1} \end{array} \right.$$

avec $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

11.1.3. Suite récurrente d'ordre supérieur. — Les suites récurrentes géométriques d'ordre 1 sont les suites géométriques $(u_k)_k$ définies par la relation de récurrence :

$$u_{k+1} = qu_k.$$

Avec la condition initiale u_0, le terme général de la suite est $u_k = u_0 q^k$.

Plus généralement, une *suite récurrente géométrique d'ordre* p, où p est un entier supérieur à 1, est une suite $(u_k)_k$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie pour tout entier k, par la relation de récurrence suivante :

$$u_{k+p} = a_0 u_k + a_1 u_{k+1} + \ldots + a_{p-1} u_{k+p-1}, \tag{11.1}$$

où les coefficients a_i sont dans $\mathbb{K}$. La suite $(u_k)_k$ peut s'écrire sous forme matricielle en considérant la transposée de la matrice compagnon du polynôme $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1}x^{p-1}$ définie par

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ & & & & 1 & \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

En posant

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+p-1} \end{bmatrix},$$

la relation (11.1) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_k.$$

Il s'agit d'une suite géométrique à valeurs dans $\mathbb{K}^p$ de raison $\mathbf{C}$. Étant donné une condition initiale $u_0, u_1, \ldots, u_p$, on obtient le terme général de la suite par récurrence en calculant les puissances de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{C}^k \mathbf{x}_0.$$

§ 2 La suite de Fibonacci (1202)

11.2.1. Le problème d'évolution de Fibonacci. — Le problème de Fibonacci est un problème d'évolution d'une population à ages structurés posé en les termes suivants

> « *Un homme possède un couple de lapins dans un lieu clos et souhaite savoir combien il aura de couples au bout d'un an si par nature chaque couple de lapins donne naissance à partir de deux mois de vie à un nouveau couple de lapins tous les mois.* »

Notons x_k le nombre de couples de lapins le k-ième mois. Le nombre de couples de lapins au $(k+1)$-ième mois est égal à la somme du nombre de couples de lapins existants le k-ième mois et du nombre de couples de lapins nouveau-nés le $(k+1)$-ième mois, *i.e.*, x_{k-1}. On suppose que les lapins ne meurent jamais.

Le premier mois, il existe un unique couple de lapin, on suppose qu'il s'agit de lapereaux, on a $x_1 = 1$. Les lapereaux ne deviennent adulte à partir de deux mois de vie, on a $x_2 = 1$; ils donnent alors naissance à couple de lapereaux le troisième mois : $x_3 = 2$. Le nombre de couples de lapin satisfait la relation de récurrence suivante :

$$x_{k+1} = x_k + x_{k-1}.$$

La suite $(x_k)_k$ ainsi définie est appelée la *suite de Fibonacci*.

11.2.2. Description matricielle.— La suite de Fibonacci est une suite récurrence d'ordre deux, cf. 11.1.3. Ce système s'écrit matriciellement sous la forme

$$\begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11.2}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{F}$ est $p_{\mathbf{F}} = x^2 - x - 1$. Il admet les deux racines réelles suivantes

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Les projecteurs spectraux Π_{λ_1} et Π_{λ_2} de la matrice $\mathbf{F}$ vérifient le système d'équations suivant :

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{1}_2 = \Pi_{\lambda_1} + \Pi_{\lambda_2} \\ \mathbf{F} = \lambda_1\Pi_{\lambda_1} + \lambda_2\Pi_{\lambda_2} \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$\Pi_{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\mathbf{F} - \lambda_2\mathbf{1}_2) \qquad \text{et} \qquad \Pi_{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\mathbf{F} - \lambda_1\mathbf{1}_2).$$

La solution de l'équation (11.2) est alors

$$\begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11.3}$$

Or $\mathbf{F}^k = \lambda_1^k\Pi_{\lambda_1} + \lambda_2^k\Pi_{\lambda_2}$, on déduit de (11.3) l'expression de x_{k+1} :

$$x_{k+1} = \frac{\lambda_1^k}{\lambda_1 - \lambda_2}(1-\lambda_2) + \frac{\lambda_2^k}{\lambda_2 - \lambda_1}(1-\lambda_1).$$

Ainsi, le nombre de couples de lapins le k-ième mois de l'évolution de la population est

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

FIGURE 11.1 – Leonardo Fibonacci

11.2.3. Exercice.— Calculer les projecteurs spectraux de la matrice **F** définie en (11.2) en utilisant la méthode de décomposition de Bézout.

§ 3 Dynamique de populations

La dynamique des populations cherche à expliquer l'évolution dans le temps en nombre et en composition de populations biologiques. On peut s'intéresser à des populations humaines, animales, végétales, ou encore microbiennes.

Notre premier exemple est un problème de migration de populations entre deux zones géographiques.

11.3.1. Migration de populations.— On considère le problème de migration de population entre les zones urbaines et les zones rurales. Chaque année, un mouvement de population entre ces deux zones s'opère de la façon suivante :

- la moitié des habitants en zone urbaine partent habiter en zone rurale, alors que l'autre moitié reste résidante en zone hurbaine,
- un quart des habitants en zone rurale rejoignent une zone hurbaine, les trois quarts restant en zone rurale.

Le mouvement de population est indiqué par la figure 11.2

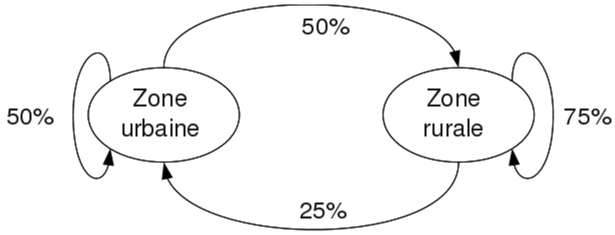

FIGURE 11.2 – Mouvement de population

Étant donné une répartition initiale, l'année $k = 0$, de la population entre les deux zones, quelle sera la répartition de population la k-ième année ? Est-ce que toute la population va au bout d'un certain temps toute se retrouver en zone rurale ?

Notons r_k la proportion de la population totale qui habite en zone rurale au terme de la k-ième année et u_k la proportion de population qui habite en zone urbaine au terme de cette même année. S'agissant de proportion de population, on a, pour toute année k,

$$r_k + u_k = 1.$$

L'évolution des deux populations est décrite par un système d'équations couplées :

$$\left| \begin{array}{l} u_{k+1} = 1/2\, u_k + 1/4\, r_k \\ r_{k+1} = 1/2\, u_k + 3/4\, r_k \end{array} \right.$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$[u_{k+1} \;\; r_{k+1}] = [u_k \;\; r_k] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

est appelée la *matrice de transition* du système. Si la répartition de population initiale, l'année 0, est $[u_0 \;\; r_0]$, on montre par récurrence que, pour tout k,

$$[u_k \;\; r_k] = [u_0 \;\; r_0]\mathbf{A}^k. \tag{11.5}$$

La relation (11.5) exprime la répartition de la population la k-ième année.

Déterminons la répartition de la population à terme. Il s'agit de calculer $\lim\limits_{k\to+\infty}[u_k \;\; r_k]$. Or

$$\lim_{k\to+\infty}[u_k \;\; r_k] = [u_0 \;\; r_0]\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k.$$

Calculons $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k$. Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = (x-1)(x-1/4)$. Donc $\mathbf{A}$ est diagonalisable. Notons Π_1 et $\Pi_{\frac{1}{4}}$ les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$. On a

$$\mathbf{A} = \Pi_1 + \frac{1}{4}\Pi_{\frac{1}{4}}.$$

Donc $\mathbf{A}^k = \Pi_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^k \Pi_{\frac{1}{4}}$. Par suite

$$\lim_{k\to+\infty}\mathbf{A}^k = \Pi_1.$$

Pour déterminer Π_1, on considère le système

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{1}_2 = \Pi_1 + \Pi_{\frac{1}{4}}, \\ \mathbf{A} = \Pi_1 + \frac{1}{4}\Pi_{\frac{1}{4}}. \end{array} \right.$$

D'on on déduit $\Pi_{\frac{1}{4}} = \mathbf{1}_2 - \Pi_1$ et $\Pi_1 = \dfrac{4}{3}(\mathbf{A} - \dfrac{1}{4}\mathbf{1}_2)$. D'où

$$\Pi_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty}[u_k \;\; r_k] &= \frac{1}{3}[u_0 \;\; r_0]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\\
&= \frac{1}{3}[u_0 + r_0 \;\; 2u_0 + 2r_0],\\
&= [\frac{1}{3} \;\; \frac{2}{3}].
\end{aligned}$$

À terme, il y aura donc un tiers de la population totale en zone urbaine et deux tiers en zone rurale. Notons que cette proportion est indépendante de la répartition initiale des populations entre les deux zones.

11.3.2. Exercice.— Calculer les projecteurs spectraux de la matrice **A** définie en (11.4) en utilisant la méthode de décomposition de Bézout.

11.3.3 Exercice.— Dans un pays, on étudie la migration de population entre les zones rurales et les zones urbaines. Chaque année, un tiers de la population des campagnes migre vers les villes, pendant qu'un quart de la population des villes va habiter dans des zones rurales. On notera u_k et r_k la proportion de population urbaine et rurale respectivement l'année k.

1. Étant donnée une répartition initiale u_0 et r_0, quelle est la répartition de population l'année k entre ces deux zones géographiques ?
2. Quelle est à terme la répartition des populations entre ces deux zones géographiques ?
3. Les zones urbaines seront-elles complètement désertées ?

11.3.4 Exercice.— On considère deux espèces A et B qui coexistent dans un même environnement naturel. On étudie deux situations d'évolution de ces espèces.

Dans une première situation, on suppose que les deux espèces sont en *compétition* : le nombre d'individus d'une espéce augmente proportionnellement au nombre d'individus de cette même espèce et décroit proportionnellement au nombre d'individus de l'autre espèce.

1. Si la population de chaque espèce augmente de deux fois le nombre d'individus de l'espèce et décroit d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce, déterminer à chaque instant le nombre d'individus de chaque espèce lorsque initiallement il y a 100 individus de l'espèce A et 200 individus de l'espèce B.
2. Est-ce qu'une des espèces est en voie d'instinction ? Si oui, au bout de combien de temps.

Dans une deuxième situation, on suppose que les deux espèces vivent en *symbiose* de la façon suivante. Le nombre d'individus de chaque espèce augmente d'une fois le nombre d'individus de l'autre espèce et décroit d'une fois le nombre d'individus de la même espèce.

3. Si initiallement les espèces A et B sont respectivement composées de 200 et 400 individus, déterminer à chaque instant la population de chaque espèce.
4. Que se passe-t-il à long terme ?