CHAPITRE
8

Le polynôme minimal d'une matrice

Sommaire

La caractérisation des matrices diagonalisables donnée par le théorème 7.4.1 porte sur la dimension des sous-espaces propres : une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, l'espace $\mathbb{K}^n$ se décompose en une somme directe de sous-espaces propres de la matrice $\mathbf{A}$.

Dans ce chapitre, nous abordons une autre caractérisation, de nature purement algébrique, qui porte uniquement sur les coefficients de la matrice. En particulier, nous allons montrer qu'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, il existe un polynôme g d'une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, non nul, scindé, n'ayant que des racines simples et tel que la matrice $\mathbf{A}$ soit *racine de* g, c'est-à-dire que la matrice $g(\mathbf{A})$, obtenue en substituant la matrice $\mathbf{A}$ à l'indéterminée dans le polynôme g, est la matrice nulle.

§ 1 Préliminaires

8.1.1. Exemple.— Considèrons la projection p sur le plan Π de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$ parallèlement à la droite Δ d'équation $x = y = z$, vue dans l'exemple 5.3.4. La projection p vérifie

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{si } \mathbf{x} \in \Pi, \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \Delta. \end{cases}$$

Ainsi, l'endomorphisme p satisfait, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$, l'équation

$$p^2(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}).$$

De façon équivalente, cela s'exprime en disant que l'endomorphisme $p^2 - p$ est nul, soit :

$$p(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 0. \tag{8.1}$$

On dit alors que l'endomorphisme p est racine du polynôme $x(x-1)$.

De l'équation (8.1), nous déduisons que l'endomorphisme p est diagonalisable. D'une part, il est immédiat que

$$\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\mathbf{0}\}.$$

En effet, si $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, alors $p(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ et $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, d'où $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. D'autre part, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$, on a la décomposition :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} - p(\mathbf{x})) + p(\mathbf{x}).$$

L'endomorphisme p satisfaisant l'équation (8.1), on a $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. On montre ainsi que l'on a une somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ désignant respectivement les sous-espaces propres associées aux valeurs propres 0 et 1, du théorème 7.4.1, on déduit que l'endomorphisme p est diagonalisable. On pourra remarquer que $\mathrm{Ker}(p)$ correspond à la droite Δ et $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ correspond au plan Π. Si $\mathbf{e}$ est un vecteur de Δ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base de Π, alors la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.1.2. Exemple.— Considérons la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ vérifie la relation $\mathbf{A}^2 = \mathbf{1}_3$ et donc l'équation :

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{A} + \mathbf{1}_3) = \mathbf{0}. \tag{8.2}$$

On dit alors que la matrice $\mathbf{A}$ est racine du polynôme $(x-1)(x+1)$. De la même façon que dans l'exemple précédent, de l'équation (8.2), on déduit une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^3$ en une somme directe de noyaux :

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{1}_3).$$

En effet, on a $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) \cap \mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{1}_3) = \{\mathbf{0}\}$, car si $\mathbf{x}$ est un vecteur contenu dans cette intersection, alors $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ et $\mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. D'où $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Par ailleurs, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$, on a la décomposition

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}) - \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}),$$

avec $\frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{1}_3)$, car

$$(\mathbf{A}-\mathbf{1}_3)(\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{1}_3)(\mathbf{A}+\mathbf{1}_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

De la même façon, on montre que $-\frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{1}_3)$.

Les deux sous-espaces de cette décomposition correspondent aux sous-espaces propres de la matrice $\mathbf{A}$ associés aux valeurs propres 1 et -1 respectivement. D'après le théorème 7.4.1, on en déduit que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable. De plus, ayant

$$\mathbf{A}+\mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la matrice $\mathbf{A}+\mathbf{1}_3$ est de rang 1. Par le théorème du rang, on en déduit donc que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{1}_3)$ est de dimension 2. Il en découle que le noyau $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{1}_3)$ est alors de dimension 1. En d'autres termes, on a $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(-1) = 2$ et $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(1) = 1$. La matrice $\mathbf{A}$ étant diagonalisable, elle est alors semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.1.3 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, vérifiant

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{1}_n)(\mathbf{A}-3\mathbf{1}_n) = \mathbf{0}.$$

1. Montrer que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{1}_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A}-3\mathbf{1}_n)$.
2. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.
4. Exprimer l'inverse $\mathbf{A}^{-1}$ en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.

§ 2 Polynômes de matrices

8.2.1. Définition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étant donné un polynôme

$$f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de $\mathbb{K}[x]$, on définit la matrice

$$f(\mathbf{A}) = a_m\mathbf{A}^m + a_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{1}_n.$$

Noter que si f est le polynôme constant égal à 1, alors $f(\mathbf{A}) = \mathbf{1}_n$. On associe ainsi à un polynôme f de $\mathbb{K}[x]$, un *polynôme de matrices* $f(\mathbf{A})$. Cette correspondance est compatible aux opérations d'addition et de multiplication sur les polynômes, on a :

8.2.2 Proposition.— Soient f et g deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$. Alors, pour toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

i) $(f+g)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})$,
ii) $(fg)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})$.

Preuve. Considérons deux polynômes f et g définis par

$$f = \sum_{i=1}^{l} a_i x^i, \qquad g = \sum_{i=1}^{m} b_i x^i.$$

Quitte à rajouter des coefficients nuls, on peut supposer que $l = m$. On a

$$\begin{aligned}
(f+g)(\mathbf{A}) &= (\sum_{i=1}^{l} (a_i + b_i) x^i)(\mathbf{A}) \\
&= \sum_{i=1}^{l} (a_i + b_i) \mathbf{A}^i \\
&= \sum_{i=1}^{l} a_i \mathbf{A}^i + \sum_{i=1}^{l} b_i \mathbf{A}^i \\
&= f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

Par distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition, cf. 3.2.1, on a

$$\begin{aligned}
(fg)(\mathbf{A}) &= (\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} a_i b_j x^{i+j})(\mathbf{A}) \\
&= (\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} a_i b_j \mathbf{A}^{i+j}) \\
&= \sum_{i=1}^{l} a_i \mathbf{A}^i \sum_{j=1}^{l} b_j \mathbf{A}^j \\
&= f(\mathbf{A}) g(\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

□

De la seconde propriété, on déduit les polynômes d'une matrice $\mathbf{A}$ commutent entre eux :

8.2.3 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tous polynômes f et g de $\mathbb{K}[x]$, les matrices $f(\mathbf{A})$ et $g(\mathbf{A})$ commutent :

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

8.2.4. Exemple.— Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $p = x^2 + x + 1$, alors

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{1}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.2.5. Polynômes annulateurs.— Un polynôme non nul q de $\mathbb{K}[x]$ est dit *annulateur* d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si la matrice $q(\mathbf{A})$ est nulle ; on dit aussi que $\mathbf{A}$ est racine du polynôme q.

8.2.6 Proposition.— Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur.

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Par suite, toute famille de n^2+1 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est liée ; c'est le cas en particulier de la famille

$$(\mathbf{1}_n, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n^2}).$$

Il existe donc des scalaires $a_0, \ldots, a_{n^2}$ non tous nuls, tels que

$$a_0\mathbf{1}_n + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_{n^2}\mathbf{A}^{n^2} = \mathbf{0}.$$

Le polynôme $g = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n^2}x^{n^2}$ est ainsi non nul et annulateur de la matrice $\mathbf{A}$. $\square$

8.2.7 Proposition.— Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et g un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$. Alors, toute valeur propre de $\mathbf{A}$ est racine du polynôme g.

Preuve. Soit $g = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$. La matrice $g(\mathbf{A})$ est nulle :

$$a_0\mathbf{1}_n + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + a_m\mathbf{A}^m = \mathbf{0}. \tag{8.3}$$

Soient λ une valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{x}$ un vecteur propre associé, *i.e.*, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. D'après l'équation (8.3), on a

$$(a_0\mathbf{1}_n + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + a_m\mathbf{A}^m)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Or $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, d'où pour tout entier naturel k, $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$ et

$$(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_m\lambda^m)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Comme le vecteur $\mathbf{x}$ est non nul, on en déduit que $g(\lambda)$ est nul. $\square$

Attention, la réciproque de ce résultat est fausse en général ; toutes les racines d'un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$ ne sont pas toujours valeurs propres de $\mathbf{A}$. Par exemple, la matrice identité $\mathbf{1}_n$ est racine du polynôme $x(x-1)$, car $\mathbf{1}_n^2 = \mathbf{1}_n$, alors que 0 n'est pas une valeur propre de la matrice identité.

§ 3 Le lemme de décomposition en noyaux

La matrice $\mathbf{A}$ de l'exemple 8.1.2 satisfait la relation

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{A} + \mathbf{1}_3) = \mathbf{0}.$$

Nous en avons déduit que

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) \oplus \operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{1}_3).$$

Dans cette section, nous montrons que ceci est une conséquence du résultat général suivant.

8.3.1 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soient f_1, f_2 deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$ premiers entre eux. Alors

$$\mathrm{Ker}(f_1 f_2)(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})).$$

Si de plus, le polynôme $f_1 f_2$ est annulateur de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})).$$

Preuve. Les polynômes f_1 et f_2 étant premiers entre eux, d'après l'identité de Bézout, théorème 1.5.13, il existe des polynômes h_1 et h_2 de $\mathbb{K}[x]$ tels que :

$$f_1 h_1 + f_2 h_2 = 1.$$

En conséquence, nous avons la relation matricielle suivante :

$$f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A}) = \mathbf{1}_n. \tag{8.4}$$

Montrons l'égalité $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})) = \mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A}))$. Le noyau $\mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A}))$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})f_2(\mathbf{A}))$, de la même façon $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A}))$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})f_2(\mathbf{A})) = \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})f_1(\mathbf{A}))$, car les polynômes $f_1(\mathbf{A})$ et $f_2(\mathbf{A})$ commutent entre eux. Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) + \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})) \subseteq \mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A})).$$

Inversement, si $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A}))$, alors d'après la relation (8.4), il existe une décomposition

$$\mathbf{x} = f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A})(\mathbf{x})$$

On a

$$f_2(\mathbf{A})f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = (f_1 f_2)(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = h_1(\mathbf{A})(f_1 f_2)(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Les deux premières égalités découlent du fait que les polynômes en $\mathbf{A}$ commutent entre eux, et la dernière du fait que $\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A}))$ par hypothèse. Ainsi $f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x})$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A}))$. De la même façon, on montre que $f_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A})(\mathbf{x})$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A}))$. On montre ainsi que $\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathrm{Ker} f_1(\mathbf{A}) + \mathrm{Ker} f_2(\mathbf{A})$.

Reste à montrer que la somme

$$\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) + \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})) = \mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A}))$$

est directe. Si $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \cap \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A}))$, d'après la relation (8.4), on a

$$\mathbf{x} = f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A})(\mathbf{x}).$$

Donc

$$\mathbf{x} = h_1(\mathbf{A})f_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{A})f_2(\mathbf{A})(\mathbf{x})$$

soit $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Si l'on suppose de plus que le polynôme $f_1 f_2$ est annulateur de $\mathbf{A}$, on a $(f_1 f_2)(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, d'où $\mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A})) = \mathbb{K}^n$. Ce qui montre la deuxième assertion :

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})).$$

□

8.3.2. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{1}_2)(\mathbf{A} - \beta \mathbf{1}_2) = \mathbf{0} \tag{8.5}$$

où α et β sont deux réels distincts. D'après la proposition précédente, on a

$$\mathbb{R}^n = E_\alpha \oplus E_\beta,$$

où E_α et E_β sont les deux sous-espaces propres associés à la matrice $\mathbf{A}$.

8.3.3. Le lemme des noyaux.— La formulation générale de cette décomposition, avec un produit fini quelconque de polynômes, est appelée le *lemme des noyaux*. La preuve se déroule sur le même principe qu'en présence de deux polynômes.

8.3.4 Théorème (Lemme des noyaux).— Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f_1, \ldots, f_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[x]$ premiers entre eux deux à deux. Alors,

$$\mathrm{Ker}\big((f_1 \ldots f_p)(\mathbf{A})\big) = \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \ \ldots \ \oplus \mathrm{Ker}(f_p(\mathbf{A})).$$

Si de plus, le polynôme $f_1 f_2 \ldots f_p$ est annulateur de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker} f_1(\mathbf{A}) \oplus \ \ldots \ \oplus \mathrm{Ker} f_p(\mathbf{A}).$$

8.3.5. Conséquence immédiate du lemme des noyaux.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ admette pour polynôme annulateur le polynôme

$$q = (x - \lambda_1)^{n_1} \ldots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$. Les polynômes $(x - \lambda_i)^{n_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, du lemme des noyaux, nous déduisons la décomposition

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)^{n_1} \oplus \ \ldots \ \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)^{n_p}.$$

Nous verrons dans la section 5 que le théorème de Cayley-Hamilton montre que le polynôme caractéristique d'une matrice $\mathbf{A}$ est annulateur de la matrice. Le lemme de décomposition en noyaux sera donc souvent utilisé avec le polynôme caractéristique.

§ 4 Le polynôme minimal

8.4.1. Une autre caractérisation des matrices diagonalisables.— La principale conséquence du lemme des noyaux, théorème 8.3.4, que nous énoncerons ici est une nouvelle caractérisation de la diagonalisation des matrices.

8.4.2 Théorème.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, il existe un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ annulateur de $\mathbf{A}$ scindé et ne possédant que des racines simples.

Preuve. Montrons que la condition est suffisante. Soit g un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ annulateur de $\mathbf{A}$ qui soit scindé sur $\mathbb{K}$ et avec toutes ses racines simples. Alors, le polynôme g s'écrit sous la forme

$$g = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_p),$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Comme par hypothèse $g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ et que les facteurs dans la décomposition du polynôme g sont premiers entre eux deux à deux, d'après le lemme des noyaux, théorème 8.3.4, on a :

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n) \oplus \ \ldots \ \oplus \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n).$$

Le sous-espace $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)$ étant le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i, l'espace $\mathbb{K}^n$ se décompose en une somme directe de sous-espaces propres. Du théorème 7.4.1, on en déduit que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Montrons que la condition est nécessaire. Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ soit diagonalisable. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et soient $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres associés.

Le polynôme $g = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_p)$ de $\mathbb{K}[x]$ est scindé et toutes ses racines sont simples. Pour tout vecteur $\mathbf{e}$ de la base $\mathcal{B}$, il existe au moins une valeur propre λ_i telle que $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Par suite

$$g(\mathbf{A})(\mathbf{e}) = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n) \ldots (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

On a $g(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{0}$ pour tout vecteur $\mathbf{e}$ de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, par suite $g(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour tout vecteur de $\mathbb{K}^n$. Il s'ensuit que $g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. $\square$

8.4.3 Exercice. — Trouver une condition nécessaire et suffisante en fonction de a, b et c pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

8.4.4. Le polynôme minimal. — D'après le théorème 8.4.2, une matrice est diagonalisable si, et seulement si, elle possède un polynôme annulateur scindé dont toutes les racines sont simples. Il s'agit d'une caractérisation de nature algébrique, dans le sens où elle ne porte que sur les coefficients de la matrice. On comprend alors l'intérêt de caractériser l'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice. Nous abordons maintenant une méthode permettant de déterminer tous les polynômes annulateurs d'une matrice.

8.4.5. Définition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme minimal* de $\mathbf{A}$ et on note $m_{\mathbf{A}}$, le polynôme unitaire annulateur de $\mathbf{A}$ de plus petit degré.

8.4.6 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$ est unique et divise tout polynôme annulateur de $\mathbf{A}$.

Preuve. Montrons que $m_{\mathbf{A}}$ divise tout polynôme annulateur de $\mathbf{A}$. Soit g un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$. En effectuant la division euclidienne de g par $m_{\mathbf{A}}$, théorème **??**, il existe deux polynômes :

$$g = g'\, m_{\mathbf{A}} + r,$$

avec $\deg r < \deg m_{\mathbf{A}}$. La matrice $\mathbf{A}$ étant racine du polynôme g et de son polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$, on a

$$\mathbf{0} = g(\mathbf{A}) = g'(\mathbf{A})\, m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}).$$

D'où $\mathbf{A}$ est racine du polynôme r. Or, par définition, $m_{\mathbf{A}}$ est le polynôme annulateur de $\mathbf{A}$ de plus petit degré, par suite le polynôme r ne peut pas être nul, car sinon on aurait R annulateur de $\mathbf{A}$ et $\deg r < \deg m_{\mathbf{A}}$. Ainsi, le polynôme reste r est nul, et par conséquent le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ divise g.

Montrons l'unicité du polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$. Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ admette deux polynômes minimaux m et m'. Ils sont tous deux annulateurs de $\mathbf{A}$, donc m divise m' et m' divise m. Par suite, il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $m = \alpha m'$. Les polynômes m et m' étant unitaires, on en déduit que $m = m'$. Ce qui montre l'unicité. $\square$

L'ensemble des polynômes annulateur d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est ainsi déterminé par son polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$. En effet, tout polynôme annulateur g de $\mathbf{A}$ s'écrit :

$$g = g'\, m_{\mathbf{A}},$$

où g' est un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. Autrement dit, l'ensemble des polynômes annulateurs de $\mathbf{A}$ s'écrit $m_{\mathbf{A}} \cdot \mathbb{K}[x]$. Nous pouvons alors reformuler le théorème 8.4.2 de caractérisation algébrique des matrices diagonalisables de la façon suivante.

8.4.7 Théorème. — Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, son polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et possède toutes ses racines simples.

Preuve. D'après le théorème 8.4.2, la condition est suffisante. Supposons que $\mathbf{A}$ soit diagonalisable, d'après le théorème 8.4.2, il admet un polynôme annulateur g scindé à racines simples. Or d'après la proposition 8.4.6 le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ divise g, donc $m_{\mathbf{A}}$ est scindé. $\square$

8.4.8. Exemple : matrices nilpotentes. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice nilpotente, il existe un entier q tel que $\mathbf{A}^q = 0$. Le polynôme x^q est alors annulateur de $\mathbf{A}$ et le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est de la forme x^k avec $1 \leq k \leq q$. D'après le théorème 8.4.7, une matrice nilpotente est donc diagonalisable si, et seulement si, elle est nulle.

§ 5 Le théorème de Cayley-Hamilton

Le résultat suivant montre que le polynôme caractéristique d'une matrice est annulateur d'une matrice. Ainsi, le polynôme minimal pourra se déduire du polynôme caractéristique.

8.5.1 Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton). — Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est racine de son polynôme caractéristique.

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrons que $\mathbf{A}$ est racine de son polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$. Le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$p_{\mathbf{A}} = (x-\lambda_1)^{n_1}\dots(x-\lambda_p)^{n_p}. \tag{8.6}$$

La matrice $\mathbf{A}$ est donc trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P},$$

où $\mathbf{T}$ est une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \mathbf{T}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{T}_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$$

La matrice $\mathbf{T}_i - \lambda_i\mathbf{1}_{n_i}$ est nilpotente d'indice de nilpotence n_i, soit

$$(\mathbf{T}_i - \lambda_i\mathbf{1}_{n_i})^{n_i} = \mathbf{0}.$$

Par suite,

$$(\mathbf{T}-\lambda_i\mathbf{1}_n)^{n_i} = \begin{bmatrix} (\mathbf{T}_1-\lambda_i\mathbf{1}_{n_1})^{n_i} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & (\mathbf{T}_i-\lambda_i\mathbf{1}_{n_i})^{n_i} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & (\mathbf{T}_p-\lambda_i\mathbf{1}_{n_p})^{n_i} \end{bmatrix}$$

Donc

$$(\mathbf{T}-\lambda_i\mathbf{1}_n)^{n_i} = \begin{bmatrix} (\mathbf{T}_1-\lambda_i\mathbf{1}_{n_1})^{n_i} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{\mathbf{0}} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & (\mathbf{T}_p-\lambda_i\mathbf{1}_{n_p})^{n_i} \end{bmatrix}$$

Le i-ième bloc $\boxed{\mathbf{0}}$ est nul, par conséquent, on a

$$(\mathbf{T}-\lambda_1\mathbf{1}_n)^{n_1}(\mathbf{T}-\lambda_2\mathbf{1}_n)^{n_2}\dots(\mathbf{T}-\lambda_p\mathbf{1}_n)^{n_p} = \mathbf{0}.$$

Par ailleurs, vu l'expression (8.6) du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$, on a

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{1}_n)^{n_1}\dots(\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{1}_n)^{n_p}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})\mathbf{P} &= \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{1}_n)^{n_1}\dots(\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{1}_n)^{n_p}\mathbf{P} \\ &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}-\lambda_1\mathbf{1}_n)^{n_1}\dots(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}-\lambda_p\mathbf{1}_n)^{n_p} \\ &= (\mathbf{T}-\lambda_1\mathbf{1}_n)^{n_1}(\mathbf{T}-\lambda_2\mathbf{1}_n)^{n_2}\dots(\mathbf{t}-\lambda_p\mathbf{1}_n)^{n_p} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ainsi $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. $\square$

8.5.2. Calcul du polynôme minimal. — Une méthode permettant de déterminer le polynôme minimal d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, consiste à considérer un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$ et à chercher dans l'ensemble de ses diviseurs, le polynôme unitaire annulateur de plus petit degré. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, théorème 8.5.1, un candidat naturel pour le polynôme annulateur est le polynôme caractéristique. Nous allons voir comment mettre en oeuvre cette méthode dans ce cas.

Montrons dans un premier temps que le spectre d'une matrice coïncide avec les racines de son polynôme minimal.

8.5.3 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire λ est valeur propre de $\mathbf{A}$ si, et seulement si, il est racine du polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$.

Preuve. Le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est annulateur de $\mathbf{A}$, il admet donc le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ comme diviseur. Il existe un polynôme g de $\mathbb{K}[x]$ tel que $p_{\mathbf{A}} = g\, m_{\mathbf{A}}$. Par suite, toute racine du polynôme $m_{\mathbf{A}}$ est racine de $p_{\mathbf{A}}$, donc est valeur propre de $\mathbf{A}$.

Inversement, le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ est annulateur de $\mathbf{A}$, donc, d'après la proposition 8.2.7, toute valeur propre de $\mathbf{A}$ est racine de $m_{\mathbf{A}}$. $\square$

De ce résultat on déduit

8.5.4 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x-\lambda_1)^{n_1} \ldots (x-\lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, pour tout $i \neq j$ et $n_1 + \ldots + n_p = n$, alors

$$m_{\mathbf{A}} = (x-\lambda_1)^{k_1} \ldots (x-\lambda_p)^{k_p},$$

avec $1 \leq k_i \leq n_i$.

Preuve. D'après le théorème 8.5.1, le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ divise le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ et, d'après la proposition 8.5.3, les polynômes $m_{\mathbf{A}}$ et $p_{\mathbf{A}}$ possèdent les mêmes racines. $\square$

8.5.5. Exemple. — On considère la matrice suivante de de $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$p_{\mathbf{A}} = (x-3)^4(x-5)^3(x-7).$$

La matrice $\mathbf{A}$ est diagonale par blocs :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}.$$

On note que $(\mathbf{B} - 3\mathbf{1}_4)^3 = \mathbf{0}$, $(\mathbf{C} - 5\mathbf{1}_3)^2 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{D} - 7\mathbf{1}_1 = \mathbf{0}$. On obtient alors,

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_8)^3(\mathbf{A} - 5\mathbf{1}_8)^2(\mathbf{A} - 7\mathbf{1}_8) \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{B} - 3\mathbf{1}_4)^3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C} - 3\mathbf{1}_3)^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 3\mathbf{1}_1)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{B} - 5\mathbf{1}_4)^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C} - 5\mathbf{1}_3)^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 5\mathbf{1}_1)^2 \end{bmatrix} (\mathbf{A} - 7\mathbf{1}_8) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C} - 3\mathbf{1}_3)^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 3\mathbf{1}_1)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{B} - 5\mathbf{1}_4)^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 5\mathbf{1}_1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} - 7\mathbf{1}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - 7\mathbf{1}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 5\mathbf{1}_1)^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} - 7\mathbf{1}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - 7\mathbf{1}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Or 3, 2 et 1 sont les indices de nilpotence des matrices $\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_8$, $\mathbf{A} - 5\mathbf{1}_8$ et $\mathbf{A} - 7\mathbf{1}_8$ respectivement. Par suite le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est

$$m_{\mathbf{A}} = (x-3)^3(x-5)^3(x-7).$$

8.5.6. Exemples.— Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alors $p_{\mathbf{A}} = -(x-1)(x+2)^2$. Les deux valeurs possibles pour le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ sont donc soit $(x-1)(x+2)^2$, soit $(x-1)(x+2)$. Or

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{A} + 2\mathbf{1}_3) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x+2)$ est le polynôme minimal. On en déduit que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, -2\}$, où -2 est valeur propre double.

Soit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $p_{\mathbf{B}} = -(x-1)^3$. Donc $m_{\mathbf{B}} = (x-1)^k$, où $k = 1, 2$ ou 3. Par ailleurs, $\mathbf{B}$ est diagonalisable si, et seulement si, $m_{\mathbf{B}} = x - 1$. Or $m_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mathbf{1}_3 \neq \mathbf{0}$, donc $\mathbf{B}$ n'est pas diagonalisable.

8.5.7. Exemple : calcul de l'inverse d'une matrice admettant deux valeurs propres. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que son polynôme minimal est scindé, de degré 2 :

$$m_{\mathbf{A}} = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

On suppose de plus que les deux valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont non nulles. On peut alors en déduire les puissances de $\mathbf{A}$ et son inverse. La matrice $\mathbf{A}$ est inversible, car λ_1 et λ_2 sont non nuls. On a

$$m_{\mathbf{A}} = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x(x - (\lambda_1 + \lambda_2)) + \lambda_1\lambda_2.$$

Par suite, la matrice $\mathbf{A}$ vérifie

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{1}_n) = -\lambda_1\lambda_2\mathbf{1}_n.$$

On en déduit l'inverse de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(\mathbf{A} - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{1}_n). \tag{8.7}$$

Par exemple, dans l'exemple 7.1.14, nous avons montré que la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix},$$

est diagonalisable et qu'elle possède deux valeurs propres distinctes $n-1$ et $2n-1$ (on suppose que $n > 1$). Son polynôme minimal est donc $m_{\mathbf{A}} = (x - (n-1))(x - (2n-1))$. D'après ce qui précéde, on en déduit que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(1-n)(2n-1)}(\mathbf{A} - (3n-2)\mathbf{1}_n).$$

Soit

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(1-n)(2n-1)} \begin{bmatrix} 2(1-n) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2(1-n) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2(1-n) \end{bmatrix}.$$

8.5.8. Exemple. — Plus généralement, on peut utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour calculer l'inverse d'une matrice. Soit $\mathbf{A}$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son polynôme caractéristique est de degré n, il s'écrit sous la forme

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mathbf{A}$ est racine de $p_{\mathbf{A}}$ et on a :

$$(-1)^n\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{1}_n = \mathbf{0}.$$

D'où

$$\mathbf{A}\left[(-1)^n\mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + a_1\mathbf{1}_n\right] = -a_0\mathbf{1}_n.$$

Le coefficient a_0 est non nul, car $a_0 = p_{\mathbf{A}}(0) = \det \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}$ est inversible. Ainsi,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left[(-1)^n\mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + a_1\mathbf{1}_n\right].$$

8.5.9 Exercice. — Montrer que la matrice suivante de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ est inversible et calculer son inverse à partir de l'expression de son polynôme minimal :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

§ 6 Exercices

8.6.1 Exercice. — Déterminer le polynôme minimal des matrices réelles suivantes, où a, b et c sont trois réels distincts deux à deux :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

8.6.2 Exercice. — Parmi les matrices de l'exercice 8.6.1, déterminer celles qui sont diagonalisables.

8.6.3 Exercice. — Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.6.4 Exercice. — Parmi les matrices de l'exercice 8.6.3, déterminer celles qui sont diagonalisables.

8.6.5 Exercice.— Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d, e, f pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.6.6 Exercice.— Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que la matrice suivante soit diagonalisables dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -a & 1 \\ 1-b & a & a-1 & -b \\ b & -a & 1-a & 1+b \\ 0 & a & a & 0 \end{bmatrix}.$$

8.6.7 Exercice.— L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Soit $\mathbf{A}$ une matrice non nulle solution de l'équation précédente.

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{1}_3).$$

2. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.

3. Montrer que si $\mathbf{x}$ n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, alors $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ est libre.

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est de dimension 1. En déduire que $\mathbf{A}$ est semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.6.8 Exercice.— On considère la matrice réelle suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$.

2. Pour quelles valeurs de a, la matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?

3. Diagonaliser $\mathbf{A}$ en donnant une matrice de passage.

§ 7 Contrôle continu PCP 2020 : sur le polynôme minimal

8.7.1 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, vérifiant

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{1}_n)(\mathbf{A} - 7\mathbf{1}_n) = \mathbf{0}.$$

1. Montrer que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{1}_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 7\mathbf{1}_n)$.

2. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.
4. Exprimer l'inverse $\mathbf{A}^{-1}$ en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.

8.7.2 Exercice.— Montrer que la matrice suivante de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ est inversible et calculer son inverse à partir de l'expression de son polynôme minimal :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 5 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 5 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

8.7.3 Exercice.— Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d, e, f pour que la matrice réelle suivante soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

§ 8 Contrôle continu PCP 2020 : pour se tester

Les exercices sous forme de questions à choix multiples de cette section ont pour objectif de tester les connaissances générales d'algèbre linéaire, ainsi que les notions vues dans les précédents chapitres sur le calcul de valeurs propres, de vecteurs propres et sur la diagonalisabilité des matrices.

Pour chaque exercice suivant, déterminer la seule assertion vraie.

8.8.1. Calcul d'inverse : exercice 1.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Alors

a) La matrice $\mathbf{A}$ n'est pas inversible.

b) Le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$ est égal à 20.

c) L'inverse de la matrice $\mathbf{A}$ est la matrice $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

d) La matrice $\mathbf{A}$ est de rang est égal à 1.

8.8.2. Calcul d'inverse : exercice 2.— Soit $\mathbf{B}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

a) L'inverse de la matrice $\mathbf{B}$ est la matrice $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{16} \end{bmatrix}$.

b) Le déterminant de la matrice $\mathbf{B}$ est nul.

c) La matrice $\mathbf{B}$ n'est pas diagonalisable.

d) Le rang de la matrice $\mathbf{B}$ est égal à 3.

8.8.3. Sur le calcul de noyau et de rang : exercice 1.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Alors}$$

a) Le noyau de la matrice $\mathbf{A}$ est de dimension égale à 3.

b) Le rang de la matrice $\mathbf{A}$ est égal à 2.

c) La somme du rang et de la dimension du noyau de $\mathbf{A}$ est égale à 3.

d) La matrice $\mathbf{A}$ est inversible.

8.8.4. Sur le calcul de noyau et de rang : exercice 2.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Alors}$$

a) Le noyau de la matrice $\mathbf{A}$ est de dimension égale à 3.

b) Le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$ est non nul.

c) L'image de la matrice $\mathbf{A}$ ne contient pas deux vecteurs linéairement indépendants.

d) Le rang de la matrice $\mathbf{A}$ est égal à 1.

8.8.5. Dimension d'un sous-espace vectoriel : exercice 1.— Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + z = & 0 \\ 2x + 4y + 2z = & 0 \\ z = & 0 \end{array} \right. \right\}.$$

a) $\dim(V) = 2$.

b) $\dim(V) = 1$.

c) $\dim(V) = 3$.

d) $\dim(V) = 0$.

8.8.6. Dimension d'un sous-espace vectoriel : exercice 2.— Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rl} -x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \\ y + z = & 0 \end{array} \right. \right\}.$$

a) $\dim(V) = 1$.

b) $\dim(V) = 2$.

c) $\dim(V) = 3$.

d) $\dim(V) = 0$.

8.8.7. Sur les valeurs propres : exercice 1.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) La matrice $\mathbf{A}$ admet comme seule valeur propre 0.

b) La matrice $\mathbf{A}$ admet des valeurs propres réelles.

c) La matrice $\mathbf{A}$ admet des valeurs propres dans $\mathbb{C}$.

d) La matrice $\mathbf{A}$ admet trois valeurs propres distinctes.

8.8.8. Sur les valeurs propres : exercice 2.— Soit $\mathbf{B}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La matrice $\mathbf{B}$ admet 3 valeurs propres distinctes.

b) Le spectre de la matrice $\mathbf{B}$ est $\{2, -1, -1\}$.

c) La matrice $\mathbf{B}$ n'admet pas de valeur propre.

d) La matrice $\mathbf{B}$ admet une seule valeur propre.

8.8.9. Sur les valeurs propres : exercice 3.— Soit $\mathbf{C}$ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{C}$ sont 1, 2, 3 et 4.

b) Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{C}$ sont dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

c) La matrice $\mathbf{C}$ admet 0 comme valeur propre.

d) Le polynôme caractéristique de $\mathbf{C}$ est $p_{\mathbf{C}}(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

8.8.10. Sur les valeurs propres : exercice 4.— Soit $\mathbf{D}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est égal à $p_{\mathbf{D}}(x) = x(x-5)^2$. Alors

a) Le spectre de la matrice $\mathbf{D}$ est $\{0, 5, -5\}$.

b) La matrice $\mathbf{D}$ admet 5 comme valeur propre de multiplicité géométrique égale à 2.

c) La matrice $\mathbf{D}$ admet une seule valeur propre.

d) Le polynôme $p_{\mathbf{D}}(x)$ n'est pas scindé.

8.8.11. Sur le calcul de vecteurs propres : exercice 1.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Lequel parmi les suivants est un vecteur propre pour $\mathbf{A}$?

a) $[0,1,0,0]^\top$.

b) $[1,2,1,-1]^\top$.

c) $[1,1,-1,2]^\top$.

d) $[-3,1,-1,0]^\top$.

8.8.12. Sur le calcul de vecteurs propres : exercice 2.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alors

a) La matrice $\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_2$ est inversible.

b) La matrice $\mathbf{A}$ admet un unique espace propre, qui est de dimension 2.

c) La matrice $\mathbf{A}$ admet deux espaces propres distincts.

d) La matrice $\mathbf{A}$ admet un unique espace propre, qui est de dimension 1.

8.8.13. Sur le calcul de vecteurs propres : exercice 3.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est égal à $p_\mathbf{A}(x) = x^2(x-1)(x-2)$. Alors

a) La dimension de l'espace propre E_0 relatif à la valeur propre 0 est au plus égale à 2, mais elle pourrait être strictement inférieure.

b) L'ensemble des valeurs propres $Spec(\mathbf{A})$ est inclus dans l'ensemble $\{0,1,2\}$, mais il pourrait être strictement plus petit.

c) La dimension de l'espace propre E_1 relatif à la valeur propre 0 est au moins égale à 1, mais elle pourrait être strictement supérieure.

d) La dimension de l'espace propre E_0 relatif à la valeur propre 0 est égale à 2.

8.8.14. Sur le calcul de vecteurs propres : exercice 4.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. On dénote par $Spec(\mathbf{A})$ l'ensemble des valeurs propres de $\mathbf{A}$ et par E_λ l'espace propre relatif à la valeur propre λ. Alors

a) $Spec(\mathbf{A}) = \{1,2\}$, $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$, $E_2 = Vect\left[\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right]$.

b) $Spec(\mathbf{A}) = \{-1,-2\}$, $E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x_1 + 3x_2 = 0 \right\}$, $E_{-2} = Vect\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$.

c) $Spec(\mathbf{A}) = \{-1,-2\}$, $E_{-1} = Vect\left[\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right]$, $E_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 - x_2 = 0 \right\}$.

d) $Spec(\mathbf{A}) = \{1,2\}$, $E_1 = Vect\left[\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right]$, $E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$.

8.8.15. Diagonalisabilité d'une matrice : exercice 1.— Soient a, b deux réels et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si $b = 0$.

b) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si $b = 0$ ou $a = 1$.

c) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable pour tous réels a et b.

d) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si $a \neq 1$.

8.8.16. Diagonalisabilité d'une matrice : exercice 2.— Soient a, b deux réels et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si $b = 0$.

b) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable pour tous réels a et b.

c) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si $a \neq -1$ et $b = 0$.

d) Pour tous réels a et b, la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.

8.8.17. Diagonalisabilité d'une matrice : exercice 3.— Soient a, b, c trois réels et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si $a = b = c = 0$.

b) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si $a = 1$ et $c = -1$.

c) Pour tous réels a, b et c, la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.

d) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable pour tous réels a, b et c.

8.8.18. Diagonalisabilité d'une matrice : exercice 4.— Soient a, b deux réels et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

a) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable pour tous réels a et b.

b) Pour tous réels a et b, la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.

c) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si $a \neq b$.

d) La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si $a = b$.