Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Mathématiques et informatique"

Première année

UE Math I-ALGEBRE

Année 2009-2010

CHAPITRE 1

1 Récurrence

Exercice 1 Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En déduire la valeur de $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$.

Exercice 2 Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n \times (n+1) \times (n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 3 Pour tout $n \geq 1$, on désigne par $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ les sommes suivantes

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

1. A l'aide de l'identité remarquable

   $$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$

   trouver une relation entre $S_2(n)$ et $S_1(n)$. En déduire la valeur de $S_2(n)$ (se servir du premier exercice).

2. Montrer en utilisant une démonstration par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a

   $$S_3(n) = (S_1(n))^2.$$

   En déduire la valeur de $S_3(n)$.

Exercice 4 Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a:

1. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2^n} \leq 1$.

Exercice 5 Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ n'est pas un entier.

Exercice 6 Montrer que pour tout entier $n > 1$ on a :

$$n! < (\frac{n+1}{2})^n.$$

Ind. : on pourra faire une récurrence et on sera amené à étudier la fonction $x \mapsto (1 + \frac{1}{x})^x$.

Exercice 7 On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

1. Calculer $A_{n+1} - 2A_n$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, A_n est divisible par 7.

Exercice 8 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$$

est un entier divisible par 2^n.

Ind.: pour deux réels $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, *la suite* $u_n = r_1^n + r_2^n$, $n \in \mathbb{N}$, *satisfait l'équation de récurrence* $u_{n+2} - (r_1 + r_2)u_{n+1} + r_1 r_2 u_n = 0$.

2 Arithmétique

Exercice 9 Donner tous les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de -12.

Exercice 10 Montrer que pour tout entier n, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

Exercice 11 Montrer que pour tout entier n, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 et $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 60.

Exercice 12 Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs dont le PGCD est 35 et le PPCM est 210.

Exercice 13 Soit n un entier positif. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

-i- n est un carré (i.e. il existe un entier m tel que $n = m^2$).

-ii- $\sqrt{n}$ est un entier.

-iii- $\sqrt{n}$ est un rationnel.

Exercice 14 Calculer le PGCD de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bezout.

Exercice 15 Soient a, b et c trois entiers tels que a et b ne sont pas tous deux nuls. En utilisant l'identité de Bezout, démontrer que l'équation $ax+by=c$ a au moins une solution $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ si et seulement si PGCD(a,b) divise c.

Exercice 16

(a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $58x+21y=0$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $58x+21y=1$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $14x+35y=21$.

(d) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $637x+595y=29$.

Exercice 17 Donner un exemple de trois nombres entiers p,q,a tels que $p|a,\ q|a \not\Longrightarrow pq|a$. Quelle hypothèse peut-on rajouter pour que l'implication devienne vraie ?

Exercice 18 Donner un exemple de trois nombres entiers p,a,b tels que $p|ab \not\Longrightarrow p|a$ ou $p|b$. Quelle hypothèse peut-on rajouter pour que l'implication devienne vraie ?

Exercice 19 Soient p,q deux nombres premiers distincts et $n,m\in\mathbb{N}$. Quels sont les diviseurs de p^nq^m?

Exercice 20

(a) Montrer que $3^{512}-2^{256}$ est un multiple de 7.

(b) Montrer que $2^{70}+3^{70}$ est un multiple de 13.

Exercice 21

(a) Soit n un entier. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 7 ?

(b) Existe-il des couples (x,y) d'entiers tels que $7x-4y^3=1$?

Exercice 22 Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les chiffres de l'écriture décimale de l'entier $n\in\mathbb{N}$ pour qu'il soit divisible par 3, par 9, par 11.

Exercice 23 Calculer le dernier chiffre dans l'écriture décimale de 7^{25}. Même question avec $7^{100!}$.

Exercice 24 Quel est le dernier chiffre de 1997^{2002} dans l'écriture décimale ? Dans l'écriture diadique ? Dans l'écriture triadique ?

Exercice 25 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que n^2 divise $(n+1)^n-1$.

Exercice 26 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} n \equiv 13 \quad [19] \\ n \equiv 6 \quad [12] \end{cases}$$

Exercice 27 Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^{1137} par 17 et par 13. En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{1137} par 221.

Exercice 28 Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également et de donner le reste au cuisinier. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates?