Licence Sciences, Technologies, Santé
Parcours de mathématiques
Université Claude Bernard Lyon 1

ALGÈBRE APPLIQUÉE

PARTIE II
LE THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS
ET LES MOTEURS D'INDEXATION DU WEB

- Notes de cours et de travaux dirigés -

– Printemps 2012 –

PHILIPPE MALBOS
malbos@math.univ-lyon1.fr

Table des matières

CHAPITRE

I

Préliminaires : rappels d'algèbre linéaire

Sommaire

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne un corps un commutatif. On se placera en général sur le corps des réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

§ 1 Les matrices

I.1.1. Notations.— Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Une famille $(a^i_j)^{1\leqslant i\leqslant n}_{1\leqslant j\leqslant m}$, où, pour tous entiers i et j, a^i_j est un scalaire dans $\mathbb{K}$, est appelée une *matrice* de type (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. S'il n'y a pas de confusion, une telle matrice sera notée $[a^i_j]$ et représentée par un tableau de scalaires à n colonnes et m lignes :

$$\begin{bmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \cdots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \cdots & a^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^1_m & a^2_m & \cdots & a^n_m \end{bmatrix}$$

On note $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de type (m,n) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on notera $\mathbf{A}^i_j$, le coefficient de $\mathbf{A}$ de la j-ième ligne de la i-ième colonne :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & i & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & \mathbf{A}^i_j & \cdots \\ & & \end{array}\right] & j \end{array}$$

Une matrice de type (n,n) est dite *carrée*. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de type (n,n). Une matrice de type $(m,1)$ est dite *colonne* et une matrice de type $(1,n)$ est dite *ligne*.

La matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $\mathbf{1}_n$. On note $\mathbf{E}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux 1 et $\mathbf{e}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note $\mathbf{A}^\top$ la matrice transposée de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{x}$ est un vecteur colonne, on notera $\mathbf{x}^\top$ le vecteur ligne correspondant.

I.1.2. Module d'un vecteur et d'une matrice.— Le module d'un vecteur $\mathbf{x} = (x_i)$ de $\mathbb{C}^n$ est le vecteur $|\mathbf{x}| = (|x_i|)$, dont les composantes sont les modules des composantes de $\mathbf{x}$. Le module d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est la matrice $|\mathbf{A}| = (|\mathbf{A}^j_i|)$.

I.1.3. Espace vectoriel des matrices.— Soient m et n deux entiers naturels non nuls. On définit sur l'ensemble $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ les opération

i) d'*addition*, pour toutes matrices $\mathbf{A} = [a^i_j]$ et $\mathbf{B} = [b^i_j]$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a^i_j + b^i_j].$$

ii) la multiplication par un scalaire, pour toute matrice $\mathbf{A} = [a^j_i]$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et tout scalaire α de $\mathbb{K}$,

$$\alpha\mathbf{A} = [\alpha a^i_j].$$

Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire l'ensemble $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ des matrices de type (m,n) forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension mn.

I.1.4. Transposition.— La matrice *transposée* d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, notée $\mathbf{A}^\top$ définie par

$$(\mathbf{A}^\top)^i_j = \mathbf{A}^j_i,$$

pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,m]\!]$.

I.1.5. Produit de matrices.— On définit le *produit* (ou *multiplication*) d'une matrice $\mathbf{A}$ de type (m,n) par une matrice $\mathbf{B}$ de type (n,p), comme la matrice

$$\mathbf{AB} = [c^j_i], \quad \text{avec} \quad c^j_i = \sum_{k=1}^{n} a^k_i b^j_k.$$

Le produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :

i) (associativité) pour toute matrices compatibles, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

ii) (matrices unitées) pour toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$\mathbf{1}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{1}_n.$$

iii) (distributivité), pour toutes matrices compatibles $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$, on a

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}, \qquad (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{D} = \mathbf{BD}+\mathbf{CD}.$$

L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de type (n,n), muni de l'addition et de la multiplication, forme un anneau non commutatif.

Exercice 1.— Montrer que l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif en général.

Exercice 2.— Soient

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $\mathbf{A}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Décrire les lignes de la matrice $\mathbf{BA}$ en terme des lignes de $\mathbf{A}$ et les colonnes de la matrice $\mathbf{AB}$ en terme des colonnes de $\mathbf{A}$.

Exercice 3.— Soit $\mathbf{e}_i$ le vecteur colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ contenant 1 à la i-ième ligne et 0 sur les autres lignes. Étant donnée une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, décrire les produits suivants :

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}_i^\top\mathbf{A}, \qquad \mathbf{e}_i^\top\mathbf{A}\mathbf{e}_j.$$

Exercice 4.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Montrer que si $\mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}$, pour tout vecteur colonne $\mathbf{x}$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Exercice 5.— Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & a \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

une matrice à coefficients réels.

1. Calculer $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ et $\mathbf{A}^4$.
2. Donner l'expression de $\mathbf{A}^k$, pour tout entier naturel k.

I.1.6. Matrices inversibles.— Une matrice carrée $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible*, s'il existe une matrice $\mathbf{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{1}_n \quad \text{et} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{1}_n.$$

La matrice $\mathbf{B}$ est alors appelée la *matrice inverse* de $\mathbf{A}$, on note alors $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. On déduit immédiatement de cette définition que l'inverse d'une matrice est unique. L'opération d'inversion vérifie les propriétés suivantes :

i $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,

ii si **A** et **B** sont inversibles, alors **AB** est inversible et

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$

iii si **A** est inversible, alors sa transposée est inversible et

$$(\mathbf{A}^{\top})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\top}.$$

Exercice 6.— Montrer ces trois propriétés.

I.1.7. Matrices nilpotentes.— Une matrice **N** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente*, s'il existe un entier naturel q tel que $\mathbf{N}^q = 0$. Le plus petit entier non nul r tel que $\mathbf{N}^r = 0$ et $\mathbf{N}^{r-1} \neq \mathbf{0}$ est appelé l'*indice de nilpotence* de **N**.

I.1.8. Matrices semblables.— Deux matrices **A** et **B** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables*, s'il existe une matrice inversible **P** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}.$$

La relation « être semblable à », dite relation de *similitude*, est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7.— Montrer cette propriété.

I.1.9. Matrices équivalentes.— Deux matrices **A** et **B** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes*, s'il existe deux matrice inversibles **P** et **Q** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}.$$

La relation d'*équivalence* est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Deux matrices semblables sont équivalentes.

I.1.10. Trace d'une matrice.— La *trace* d'une matrice carrée $\mathbf{A} = [a^i_j]$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme des coefficients de sa diagonale :

$$\mathrm{trace}\,(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a^i_i.$$

Exercice 8.— Étant donné deux matrices **A** et **B** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer toutes les matrices **X** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathbf{X} + \mathrm{tr}(\mathbf{X})\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Exercice 9.— Montrer qu'il n'existe pas de matrices **A** et **B** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{1}_n.$$

Exercice 10.— Soient **A** et **B** deux matrices carrées.

1. Montrer la relation trace $\mathbf{AB} = \text{trace}\,\mathbf{BA}$.
2. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

I.1.11. Image d'une matrice.— Si $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on définit l'*image* de $\mathbf{A}$ comme le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ engendré par les vecteurs $\mathbf{Ax}$, où $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Soit

$$\text{Im}\,\mathbf{A} = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n\}.$$

Exercice 11.— Montrer que l'image d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ engendré par les vecteurs colonnes de $\mathbf{A}$.

Exercice 12.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Im}\,(\mathbf{A})$ soit égal à $\mathbb{K}^n$. Justifier que la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.

Exercice 13.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Soit $\mathscr{E}$ un sous-ensemble de vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, identifié à $\mathbb{K}^m$. L'*image de $\mathscr{E}$ par* $\mathbf{A}$ est l'ensemble, noté $\mathbf{A}(\mathscr{E})$, formé de tous les produits de $\mathbf{A}$ par un vecteur de $\mathscr{E}$, i.e.,

$$\mathbf{A}(\mathscr{E}) = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathscr{E}\}.$$

1. Montrer que si $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$, alors $\mathbf{A}(\mathscr{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. Montrer que si $\mathscr{E} = \text{Vect}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$, alors $\mathbf{A}(\mathscr{E}) = \text{Vect}(\mathbf{Ax}_1, \ldots, \mathbf{Ax}_p)$.

Exercice 14.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices compatibles. Montrer que $\text{Im}\,(\mathbf{AB})$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Im}\,(\mathbf{A})$.

Exercice 15.— Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices. Montrer que

$$\text{Im}\,([\mathbf{A}\ \ \mathbf{B}]) = \text{Im}\,(\mathbf{A}) + \text{Im}\,(\mathbf{B}),$$

où $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{B}]$ désigne la matrice constituée des blocs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

I.1.12. Noyau d'une matrice.— Si $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on définit le *noyau* de $\mathbf{A}$ comme le sous-espace vectoriel suivant de $\mathbb{K}^n$

$$\text{Ker}\,\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

Le noyau $\text{Ker}\,\mathbf{A}$ est formé des solutions de l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Exercice 16.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Décrire les sous-espaces

$$\text{Ker}\,(\mathbf{A}), \qquad \text{Ker}\,(\mathbf{A}^\top), \qquad \text{Im}\,(\mathbf{A}), \qquad \text{Im}\,(\mathbf{A}^\top).$$

Exercice 17.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices compatibles. Montrer que $\text{Ker}\,(\mathbf{B})$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}\,(\mathbf{AB})$.

I.1.13. Rang d'une matrice.— Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *rang* d'une famille de vecteurs $(\mathbf{x}_i)_i$ de E, la dimension du sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E engendré par $(\mathbf{x}_i)_i$. En d'autres termes, le rang de la famille $(\mathbf{x}_i)_i$ est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de $(\mathbf{x}_i)_i$. Le *rang* d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^m$. On le note $\operatorname{rang}\mathbf{A}$. Autrement dit,

$$\operatorname{rang}\mathbf{A} = \dim(\operatorname{Im}\mathbf{A}).$$

I.1 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Le rang de $\mathbf{A}$ vérifie les propriétés suivantes :

i) $\operatorname{rang}\mathbf{A} \leqslant \inf\{m,n\}$,

ii) $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{A}^\top)$ (en particulier le rang de $\mathbf{A}$ est aussi le rang des vecteurs lignes),

iii) $\operatorname{Ker}\mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$ si, et seulement si, $\operatorname{rang}\mathbf{A} = n$,

iv) $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}^\top) = \{\mathbf{0}\}$ si, et seulement si, $\operatorname{rang}\mathbf{A} = m$,

v) si $m = n$, alors $\mathbf{A}$ est inversible si, et seulement si, $\operatorname{rang}\mathbf{A} = n$.

Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{Q} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathbf{P} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles, on a

$$\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{QAP}).$$

En particulier si $\operatorname{rang}\mathbf{A} = r$, il existe deux matrices inversibles $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{P}.$$

I.2 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors, la matrice $\mathbf{A}$ est équivalente à la matrice

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

En particulier, deux matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang.

Exercice 18. — Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ est un sous-espace de $\operatorname{Im}(\mathbf{A}) + \operatorname{Im}(\mathbf{B})$.
2. En déduire que $\operatorname{rang}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqslant \operatorname{rang}(\mathbf{A}) + \operatorname{rang}(\mathbf{B})$.

Exercice 19. — Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices. Montrer que

$$\operatorname{rang}([\mathbf{A}\ \ \mathbf{B}]) \leqslant \operatorname{rang}(\mathbf{A}) + \operatorname{rang}(\mathbf{B}) - \dim(\operatorname{Im}(\mathbf{A}) \cap \operatorname{Im}(\mathbf{B})).$$

§ 2 Spectre d'une matrice

I.2.1. Valeurs propres et vecteurs propres.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire λ dans $\mathbb{K}$ est appelé *valeur propre* de $\mathbf{A}$, si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i) $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n) \neq \{0\}$,

ii) $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n) = 0$,

iii) il existe un vecteur non nul $\mathbf{x}$ de $\mathbb{K}^n$, solution de l'équation

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Un vecteur $\mathbf{x}$ vérifiant l'assertion **iv)** est appelé *vecteur propre* de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres de $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{K}$ est appelé le *spectre sur* $\mathbb{K}$ de la matrice $\mathbf{A}$ et sera noté dans la suite $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(\mathbf{A})$.

On notera $\operatorname{Sp}(\mathbf{A})$ l'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, appelé *spectre* de $\mathbf{A}$.

I.2.2. Rayon spectral.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Une valeur propre λ de $\mathbf{A}$ est dite *dominante* si, pour tout $\lambda' \in \operatorname{Sp}(\mathbf{A}) - \{\lambda\}$, on a $|\lambda| > |\lambda'|$.

Le *rayon spectral* de $\mathbf{A}$, noté $\rho(\mathbf{A})$, est le plus grand des modules des valeurs propres de $\mathbf{A}$:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(\mathbf{A})\}.$$

I.2.3. Sous-espaces propres.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. L'ensemble des vecteurs propres associés à λ

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, stable par $\mathbf{A}$, appelé le *sous-espace propre* de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ.

Exercice 20. — Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, distinctes deux à deux. Montrer que les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

I.2.4. Polynôme caractéristique.— Le *polynôme caractéristique* d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par

$$p_{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A} - X\mathbf{1}_n).$$

Exercice 21. — Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 22. — Montrer qu'un scalaire λ est valeur propre d'une matrice $\mathbf{A}$ si, et seulement si, λ est racine de son polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$.

Une valeur propre de $\mathbf{A}$ est dite *simple* lorsqu'elle est racine simple du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$. En particulier, si λ est une valeur propre simple, la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel Ker $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1}_n)$ est 1.

I.2.5. Exemple.— Le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ peut ne pas avoir de racines dans le corps $\mathbb{K}$. Par exemple, le polynôme caractéristique de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est $p_{\mathbf{A}} = X^2+1$, qui n'a pas de racines réelles, par suite $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathbf{A}) = \emptyset$. Cependant, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{A}) = \{-i, i\}$ et les sous-espaces propres de $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{C}^2$ sont

$$E_i = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}) \quad \text{et} \quad E_{-i} = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}).$$

Exercice 23.— Déterminer les valeurs propres et espaces propres des matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\textbf{a)} \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{b)} \begin{bmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{c)} \begin{bmatrix} 0&1&1\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$\textbf{d)} \begin{bmatrix} 0&1&1\\0&1&1\\0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{e)} \begin{bmatrix} 1&1&1\\0&0&1\\0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{f)} \begin{bmatrix} 1&1&1\\0&1&1\\0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$\textbf{g)} \begin{bmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\0&1&1 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{h)} \begin{bmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 24.— Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & -7 \\ 14 & 11 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & 8 \\ 4 & 14 & 8 \\ -8 & -32 & -18 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3&0&0\\0&3&0\\0&0&3 \end{bmatrix}$$

Exercice 25.— Soit $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ une matrice définie par blocs, où les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont carrées. Montrer que

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{T}) = \mathrm{Spec}(\mathbf{A}) \cup \mathrm{Spec}(\mathbf{B}).$$

Exercice 26.— Construire des exemples de matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ telles que

1. λ valeur propre de $\mathbf{A}$ et β valeur propre de $\mathbf{B}$ n'implique pas $\lambda+\beta$ valeur propre de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.
2. λ valeur propre de $\mathbf{A}$ et β valeur propre de $\mathbf{B}$ n'implique pas $\lambda\beta$ valeur propre de $\mathbf{AB}$.

Exercice 27.— Montrer que la trace d'une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nulle.

Exercice 28.— Soient $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ des vecteurs propres d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, associées à une même valeur propre λ. Montrer que toute combinaison linéaire non nulle des vecteurs $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ.

Exercice 29.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de spectre $\mathrm{spec}(\mathbf{A})=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\}$. On considère une valeur propre λ_k de $\mathbf{A}$ et un vecteur propre $\mathbf{x}$ associé.
1. Soit λ un scalaire qui n'est pas valeur propre de $\mathbf{A}$. Montrer que

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{x}=\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\mathbf{x}.$$

2. Soit $\mathbf{y}$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$, montrer que les valeurs propres de $\mathbf{A}+\mathbf{x}\mathbf{y}^\top$ coïncident avec celles de $\mathbf{A}$ sauf pour la valeur propre λ_k qui est remplacée par $\lambda_k+\mathbf{y}^\top\mathbf{x}$.
3. Soit μ un scalaire. Comment construire un vecteur $\mathbf{y}$ afin que les valeurs propres de $\mathbf{A}+\mathbf{x}\mathbf{y}^\top$ et $\mathbf{A}$ coïncident sauf pour la valeur propre λ_k qui est remplacée par μ.

Exercice 30.— Soient $\mathbf{A}\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B}\in\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ deux matrices.
1. Montrer que pour tout scalaire λ,

$$\lambda^m\det(\lambda\mathbf{1}_n-\mathbf{BA})=\lambda^n\det(\lambda\mathbf{1}_m-\mathbf{AB}).$$

2. Montrer que si $m=n$, alors les matrices $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$ ont le même polynôme caractéristique.
3. On suppose que $m\neq n$. Montrer que les polynômes caractéristiques de $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$ ne peuvent pas être égaux. Que peut-on dire des spectres de $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$?

Exercice 31.— Soient $\mathbf{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbf{B}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices. Montrer que si $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, alors $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont un vecteur propre commun.

I.2.6. Matrices trigonalisables.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *trigonalisable* dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, si $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{T}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\mathbf{A}=\mathbf{PTP}^{-1}. \tag{I.1}$$

I.3 Théorème (Théorème de trigonalisation).— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, son polynôme caractéristique $p_\mathbf{A}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Par suite, toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Notons que toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut toujours se trigonaliser dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. En effet, si le polynôme caratéristique de $\mathbf{A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, $\mathbf{A}$ est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Sinon, le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est toujours scindé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe alors une matrice inversible $\mathbf{P}$ et une matrice triangulaire $\mathbf{T}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{PTP}^{-1}$.

I.2.7. Somme et produit des valeurs propres.— Le théorème de trigonalisation nous permet de relier des invariants d'une matrice, tels que sa trace et son déterminant, à ses valeurs propres. Si une matrice $\mathbf{A}$ est trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{T}$, alors les valeurs propres de $\mathbf{A}$ étant les racines du polynôme $p_{\mathbf{A}}$, sont aussi les coefficients de la diagonale de la matrice $\mathbf{T}$.

Étant donnée une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

La matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire $\mathbf{T}$, i.e., il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Étant semblables, les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{T}$ ont même trace et même déterminant, on en déduit que la trace (resp. le déterminant) de $\mathbf{A}$ est égale à la somme (resp. le produit) des valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité. Précisément, on a

I.4 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{h_i},$$

où h_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme caractéristique. Alors,

$$\textbf{i)}\ \operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{p} h_i \lambda_i, \qquad \textbf{ii)}\ \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{h_i}.$$

Plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\textbf{iii)}\ \operatorname{trace}(\mathbf{A}^k) = \sum_{i=1}^{p} h_i \lambda_i^k, \qquad \textbf{iv)}\ \det(\mathbf{A}^k) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{k.h_i}.$$

I.2.8. Matrices diagonalisables.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, si elle est semblable à une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}. \tag{I.2}$$

Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ de la décomposition (I.2) étant semblables, elles ont le même polynôme caractéristique. Il s'ensuit que la diagonale de la matrice $\mathbf{D}$ est formée des valeurs propres de $\mathbf{A}$.

Exercice 32. — Montrer qu'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$.

I.2.9. Multiplicité des valeurs propres.— Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. L'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est appelé *multiplicité algébrique* de λ, on la note $\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$, ou $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda)$ s'il n'y a pas de confusion possible.

La dimension du sous-espace propre E_λ est appelé la *multiplicité géométrique* de λ, on la note $\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda)$, ou $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda)$ s'il n'y a pas de confusion possible. Autrement dit

$$\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda) = \dim(\mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n)).$$

I.5 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute valeur propre λ de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) \leqslant \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda).$$

I.6 Théorème (Caractérisation des matrices diagonalisables). — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

ii) le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour toute valeur propre λ de $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda),$$

iii) il existe des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de $\mathbf{A}$, telles que

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Exercice 33. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice définie par blocs :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont deux matrices carrées de $\mathscr{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n_2}(\mathbb{K})$ respectivement.

1. Montrer que si $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont diagonalisables, alors $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
2. Montrer que $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}}.p_{\mathbf{C}}$.
3. Montrer que pour toute valeur propre λ de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda) = \mathrm{mult}^{\mathbf{B}}_{\mathrm{geo}}(\lambda) + \mathrm{mult}^{\mathbf{C}}_{\mathrm{geo}}(\lambda).$$

4. Montrer que si $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{C}$ n'est pas diagonalisable, alors il existe une valeur propre λ de $\mathbf{A}$ telle que

$$\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda) < \mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{alg}}(\lambda).$$

5. En déduire, que si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, alors $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont diagonalisables.

Exercice 34.— Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 35.— Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont-elles diagonalisables ?

Exercice 36.— Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre complexe de $\mathbf{A}$, alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de $\mathbf{A}$, de même ordre de multiplicité.
2. Montrer que si $\mathbf{v}$ est un vecteur propre associé à λ, alors $\overline{\mathbf{v}}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.
3. Diagonaliser en donnant une matrice de passage la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Calculer $\mathbf{A}^k$, pour tout entier naturel k.

Exercice 37.— Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En diagonalisant $\mathbf{A}$, trouver une solution dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $X^2 = \mathbf{A}$.

Exercice 38.— On considère la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

1. Quelle est la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$?

2. Quel est le produit des valeurs propres de $\mathbf{A}$?
3. Montrer que, si son déterminant n'est pas nul, $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
4. Montrer que, si son déterminant est nul, $\mathbf{A}$ n'est diagonalisable que si elle est nulle.
5. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable sauf si elle est de rang un.
6. En supposant que la matrice $\mathbf{A}$ est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?

I.2.10. Polynômes de matrices.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Étant donné un polynôme

$$P = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

de $\mathbb{K}[X]$, on définit la matrice

$$P(\mathbf{A}) = a_m\mathbf{A}^m + a_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{1}_n.$$

Noter que si P est le polynôme constant égal à 1, alors $P(\mathbf{A}) = \mathbf{1}_n$. On associe ainsi à un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, un *polynôme de matrices* $P(\mathbf{A})$. Cette correspondance est compatible aux opérations d'addition et de multiplication sur les polynômes, on a, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$,

i) $(P+Q)(\mathbf{A}) = P(\mathbf{A}) + Q(\mathbf{A})$,
ii) $(PQ)(\mathbf{A}) = P(\mathbf{A})Q(\mathbf{A})$.

De la seconde propriété, on déduit que les polynômes d'une matrice $\mathbf{A}$ commutent entre eux, *i.e.*, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, les matrices $P(\mathbf{A})$ et $Q(\mathbf{A})$ commutent :

$$P(\mathbf{A})Q(\mathbf{A}) = Q(\mathbf{A})P(\mathbf{A}).$$

Exercice 39.— Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que

$$\mathbf{A}^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \det(\mathbf{A})\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}.$$

2. On suppose que le déterminant de $\mathbf{A}$ est non nul. Calculer l'inverse de $\mathbf{A}$.

Exercice 40.— Soient $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mathbf{A}^2 = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{1}_n.$$

1. Montrer que si μ est non nul, la matrice $\mathbf{A}$ est inversible et que

$$\mathbf{A}^{-1} = \mu^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n).$$

2. Montrer que pour tout entier k, la matrice $\mathbf{A}^k$ s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{1}_n$.

I.2.11. Polynômes annulateurs.— Un polynôme non nul Q de $\mathbb{K}[X]$ est dit *annulateur* d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, si la matrice $Q(\mathbf{A})$ est nulle ; on dit aussi que $\mathbf{A}$ est racine du polynôme Q.

Exercice 41. — Montrer que toute matrice de possède un polynôme annulateur.

Exercice 42. — Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et Q un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$.

1. Montrer que toute valeur propre de $\mathbf{A}$ est racine du polynôme Q.

2. Montrer que la réciproque est fausse en général : toutes les racines d'un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$ ne sont pas toujours valeurs propres de $\mathbf{A}$.

I.7 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soient P_1, P_2 deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors,

$$\mathrm{Ker}\,(P_1P_2)(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}\,P_1(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{Ker}\,P_2(\mathbf{A}).$$

Si de plus, le polynôme P_1P_2 est annulateur de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\,P_1(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{Ker}\,P_2(\mathbf{A}).$$

I.2.12. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{1}_2)(\mathbf{A} - \beta\mathbf{1}_2) = \mathbf{0} \tag{I.3}$$

où α et β sont deux réels distincts. D'après la proposition précédente, on a

$$\mathbb{R}^2 = E_\alpha \oplus E_\beta,$$

où E_α et E_β sont les deux sous-espaces propres associés à la matrice $\mathbf{A}$. Les polynômes $X - \alpha$ et $X - \beta$ sont premiers entre eux, il existe donc une identité de Bézout :

$$\frac{-1}{\alpha-\beta}(X-\alpha) + \frac{1}{\alpha-\beta}(X-\beta) = 1. \tag{I.4}$$

Notons

$$\Pi_1 = \frac{1}{\alpha-\beta}(\mathbf{A} - \beta\mathbf{1}_2), \qquad \Pi_2 = \frac{-1}{\alpha-\beta}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{1}_2)$$

Alors, Π_1 représente la projection de $\mathbb{R}^2$ sur E_α et Π_2 représente la projection de $\mathbb{R}^2$ sur E_β, exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. En effet, de la relation (I.4), on déduit que

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \mathbf{1}_2. \tag{I.5}$$

Par ailleurs, de la relation I.3, on déduit que

$$\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = \mathbf{0} \tag{I.6}$$

Des relation I.4 et I.5, on déduit que Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteurs de $\mathbb{R}^2$, i.e.,

$$\Pi_1^2 = \Pi_1, \quad \Pi_2^2 = \Pi_2.$$

Comme

$$\operatorname{Im} \Pi_1 = \operatorname{Ker} \Pi_2 \text{ et } \operatorname{Im} \Pi_2 = \operatorname{Ker} \Pi_1,$$

on a $\operatorname{Im} \Pi_1 = E_\alpha$ et $\operatorname{Im} \Pi_2 = E_\beta$. Ainsi, Π_1 et Π_2 sont les matrices des projecteurs de $\mathbb{R}^2$ sur les sous-espaces E_α et E_β respectivement.

Exercice 43. — Considérons la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)(\mathbf{A} - \mathbf{1}_4) = \mathbf{0}$.
2. Déterminer les sous-espaces propres ainsi que les matrices des projections de $\mathbb{R}^4$ sur ces sous-espaces propres, exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

I.2.13. Le lemme des noyaux.— La formulation générale de cette décomposition, avec un produit fini quelconque de polynômes, est appelée le *lemme des noyaux*. La preuve se déroule sur le même principe qu'en présence de deux polynômes.

I.8 Théorème (Lemme des noyaux). — Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P_1, \ldots, P_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors,

$$\operatorname{Ker} \big((P_1 \ldots P_p)(\mathbf{A})\big) = \operatorname{Ker} P_1(\mathbf{A}) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} P_p(\mathbf{A}).$$

Si de plus, le polynôme $P_1 P_2 \ldots P_p$ est annulateur de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker} P_1(\mathbf{A}) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} P_p(\mathbf{A}).$$

I.2.14. Conséquence immédiate du lemme des noyaux.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est

$$p_{\mathbf{A}} = (X - \lambda_1)^{h_1} \ldots (X - \lambda_p)^{h_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{h_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, du lemme des noyaux, nous déduisons la décomposition

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)^{h_1} \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)^{h_p}.$$

Exercice 44. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ de trace nulle, admettant 1 et i comme valeurs propres.

1. Déterminer toutes les autres valeures propres de $\mathbf{A}$.
2. Montrer que

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} (\mathbf{A}^2 - \mathbf{1}_n) \oplus \operatorname{Ker} (\mathbf{A}^2 + \mathbf{1}_n).$$

I.2.15. Une autre caractérisation des matrices diagonalisables.— La principale conséquence du lemme des noyaux, théorème I.8, que nous énoncerons ici est une nouvelle caractérisation de la diagonalisation des matrices.

I.9 Théorème. — Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, il existe un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de $\mathbf{A}$ scindé et ne possédant que des racines simples.

Exercice 45. — Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

I.2.16. Le polynôme minimal.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme minimal* de $\mathbf{A}$ et on note $m_{\mathbf{A}}$, le polynôme unitaire annulateur de $\mathbf{A}$ de plus petit degré.

Exercice 46. — Montrer que le polynôme minimal d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est unique et divise tout polynôme annulateur de $\mathbf{A}$.

L'ensemble des polynômes annulateur d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est ainsi déterminé par son polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$. En effet, tout polynôme annulateur Q de $\mathbf{A}$ s'écrit :

$$Q = Q' m_{\mathbf{A}},$$

où Q' est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Autrement dit, l'ensemble des polynômes annulateurs de $\mathbf{A}$ s'écrit $m_{\mathbf{A}} \cdot \mathbb{K}[X]$. Nous pouvons alors reformuler le théorème I.9 de caractérisation algébrique des matrices diagonalisables de la façon suivante.

I.10 Théorème. — Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, son polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et possède toutes ses racines simples.

Exercice 47. — Montrer qu'une matrice triangulaire n'ayant que des 0 sur la diagonale est diagonalisable si, et seulement si, elle est nulle.

I.2.17. Le théorème de Cayley-Hamilton.— Le résultat suivant montre que le polynôme caractéristique d'une matrice est annulateur d'une matrice. Ainsi, du polynôme caractéristique on pourra déduire le polynôme minimal.

I.11 Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton).— Toute matrice est racine de son polynôme caractéristique.

I.2.18. Calcul du polynôme minimal.— Une méthode permettant de déterminer le polynôme minimal d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, consiste à considérer un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$ et à chercher dans l'ensemble de ses diviseurs, le polynôme unitaire annulateur de plus petit degré. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, théorème I.11, un candidat naturel pour le polynôme annulateur est le polynôme caractéristique. Nous allons voir comment mettre en oeuvre cette méthode dans ce cas.

Exercice 48.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'un scalaire λ est valeur propre de $\mathbf{A}$ si, et seulement si, il est racine du polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$.

I.12 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (X-\lambda_1)^{h_1} \ldots (X-\lambda_p)^{h_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $i \neq j$ et $h_1 + \ldots + h_p = n$, alors

$$m_{\mathbf{A}} = (X-\lambda_1)^{k_1} \ldots (X-\lambda_p)^{k_p},$$

avec $1 \leqslant k_i \leqslant h_i$.

I.2.19. Exemples.— Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alors, $p_{\mathbf{A}} = -(X-1)(X+2)^2$. Les deux valeurs possibles pour le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ sont donc soit $(X-1)(X+2)^2$, soit $(X-1)(X+2)$. Or

$$(\mathbf{A}-\mathbf{1}_3)(\mathbf{A}+2\mathbf{1}_3) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite $m_{\mathbf{A}} = (X-1)(X+2)$ est le polynôme minimal. On en déduit que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, -2\}$, où -2 est valeur propre double.

Soit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $p_{\mathbf{B}} = -(X-1)^3$. Donc $m_{\mathbf{A}} = (X-1)^k$, où $k = 1,2$ ou 3. Par ailleurs, $\mathbf{A}$ est diagonalisable si, et seulement si, $m_{\mathbf{A}} = X-1$. Or $m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{1}_3 \neq \mathbf{0}$, donc $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 49. — Construire deux matrices qui ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal et qui ne sont pas semblables.

I.2.20. Exemple : calcul de l'inverse d'une matrice admettant deux valeurs propres.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que son polynôme minimal est scindé, de degré 2 :

$$m_{\mathbf{A}} = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2).$$

On suppose de plus que les deux valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont non nulles. On peut alors en déduire les puissances de $\mathbf{A}$ et son inverse. La matrice $\mathbf{A}$ est inversible, car λ_1 et λ_2 sont non nuls. On a

$$m_{\mathbf{A}} = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X(X-(\lambda_1+\lambda_2)) + \lambda_1\lambda_2.$$

Par suite, la matrice $\mathbf{A}$ vérifie

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}-(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{1}_n) = -\lambda_1\lambda_2\mathbf{1}_n.$$

On en déduit l'inverse de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(\mathbf{A}-(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{1}_n). \tag{I.7}$$

Exercice 50. — Déterminer le polynôme minimal des matrices réelles suivantes, où a, b et c sont trois réels distincts deux à deux :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Exercice 51. — Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 52. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = (-1)^n X^n$.
2. Comment déterminer le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ en utilisant le polynôme minimal ?
3. Par récurrence, montrer que $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
4. Inversement, montrer que toute matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec des 0 sur la diagonale est nilpotente d'indice de nilpotence $p \leqslant n$.

Exercice 53. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de $\mathbf{A}$.
2. En déduire que $\mathbf{A}^{-1}$ est un polynôme en $\mathbf{A}$. [On pourra utiliser le fait que le polynôme X ne divise pas le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$.]

Exercice 54. — Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Montrer que si P est premier avec le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{A}$, alors la matrice $P(\mathbf{A})$ est inversible.
2. Inversement, montrer que si $P(\mathbf{A})$ est inversible, alors les polynômes P et $m_{\mathbf{A}}$ sont premiers entre eux.

Exercice 55. — Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $\mathbf{X}^3 = \mathbf{X}$.

Exercice 56. — L'objectif est de résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Soit $\mathbf{A}$ une matrice non nulle solution de l'équation précédente.

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,\mathbf{A} \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}^2 + \mathbf{1}_3).$$
2. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
3. Montrer que si $\mathbf{x}$ n'appartient pas à Ker $\mathbf{A}$, alors $(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})$ est libre.
4. Montrer que Ker $\mathbf{A}$ est de dimension 1. En déduire que $\mathbf{A}$ est semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

§ 3 Décomposition spectrale des matrices

I.3.1. Diagonalisation par blocs.— D'après le théorème de caractérisation des matrices diagonalisables, diagonaliser une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ revient à trouver une décomposition de l'espace $\mathbb{K}^n$ en une somme directe de sous-espaces propres :

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$$

associés à $\mathbf{A}$, i.e., pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $E_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)$. Diagonaliser une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par blocs consiste à trouver une décomposition de l'espace $\mathbb{K}^n$ en une somme directe

$$\mathbb{K}^n = N_1 \oplus \ldots \oplus N_p,$$

de sous-espaces vectoriels N_i stables par $\mathbf{A}$, i.e., pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$$\mathbf{x} \in N_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \in N_i.$$

On montre que ceci est équivalent à dire que la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_p \end{bmatrix}$$

où, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\mathbf{B}_i$ est une matrice de $\mathscr{M}_{h_i}(\mathbb{K})$, avec $h_i = \dim N_{\lambda_i}$.

I.3.2. Formulation géométrique.— On peut reformuler ce problème de la façon suivante. Diagonaliser par blocs un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ revient à trouver une décomposition de $\mathbb{K}^n$ en une somme directe

$$\mathbb{K}^n = N_1 \oplus \ldots \oplus N_p,$$

de sous-espaces vectoriels stables par u, i.e., l'image par u du sous-espace N_i est un sous-espace de N_i. Considérant une base $\mathscr{B}_i$ pour chaque sous-espace N_i, la réunion de ces bases

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_p$$

forme une base de $\mathbb{K}^n$. Exprimée dans cette base, la matrice de u est de la forme suivante :

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} [u_{|N_1}]_{\mathscr{B}_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [u_{|N_2}]_{\mathscr{B}_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & [u_{|N_p}]_{\mathscr{B}_p} \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u étant scindé, le polynôme caractéristique de chaque restriction $u_{|N_i}$ est scindé. Il existe donc pour chaque espace N_i une base $\mathscr{B}_i$ de trigonalisation de $u_{|N_i}$. Ainsi, la matrice qui exprime u dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs, et de plus ces blocs sont triangulaires.

I.3.3. Exemples.— Toute matrice nulle est nilpotente d'indice de nilpotence 1. Les matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont nilpotentes d'indice de nilpotence 2, 3, 3, 3 et 4 respectivement.

I.3.4. Matrices strictement triangulaire.— On appelle matrice *strictement triangulaire* supérieure (resp. inférieure) une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.

Exercice 57. — Montrer que toute matrice strictement triangulaire est nilpotente.

Il existe un grand nombre de caractérisations des matrices nilpotentes :

I.13 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- **i)** la matrice $\mathbf{A}$ est nilpotente,
- **ii)** le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est de la forme X^r, avec $r > 0$,
- **iii)** le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $(-1)^n X^n$,
- **iv)** la puissance n-ième de $\mathbf{A}$ est nulle,
- **v)** le spectre de $\mathbf{A}$ est réduit à $\{0\}$,
- **vi)** la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice strictement triangulaire,
- **vii)** $\operatorname{trace} \mathbf{A}^k = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 58. — Montrer ces équivalences.

I.3.5. Premier exemple : le cas d'une matrice diagonalisable.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = -(X-4)(X-1)^2$ et son polynôme minimal est $m_{\mathbf{A}} = (X-4)(X-1)$. La matrice $\mathbf{A}$ est alors diagonalisable. Il existe donc une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^3$ en somme directe de sous-espaces propres :

$$\mathbb{R}^3 = E_4 \oplus E_1.$$

La valeur propre 4 étant de multiplicité algébrique 1, on a $\dim E_4 = 1$. On en déduit que $\dim E_1 = 2$.

Déterminons les projections de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces propres E_4 et E_1. Nous noterons

$$\pi_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E_4$$

la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le sous-espace E_4 parallèlement au sous-espace E_1 et

$$\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E_1$$

la projection de $\mathbb{R}^3$ sur E_1 parallèlement à E_4. Ces deux projections sont entièrement caractérisées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_4^2 = \pi_4,\ \ \pi_1^2 = \pi_1,\ \ \pi_4\pi_1 = \pi_1\pi_4 = 0,\ \text{ et } \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = \pi_4 + \pi_1, \\ \mathrm{Im}\ \pi_4 = E_4,\ \ \mathrm{Ker}\ \pi_4 = E_1,\ \ \mathrm{Im}\ \pi_1 = E_1,\ \ \mathrm{Ker}\ \pi_1 = E_4 \end{aligned} \tag{I.8}$$

On notera Π_1 et Π_4 les matrices des projections π_1 et π_4 exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous allons voir que l'on peut exprimer ces deux matrices en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.

Les polynômes $X-4$ et $X-1$ sont premiers entre eux. D'après l'identité de Bézout, il existe deux polynôme U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(X-4)U + (X-1)V = 1$$

Un calcul élémentaire nous permet de déterminer les polynômes U et V, on a :

$$(X-4)(-\frac{1}{3}) + (X-1)(\frac{1}{3}) = 1. \tag{I.9}$$

Montrons que

$$\Pi_4 = \frac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) \quad \text{et} \quad \Pi_1 = -\frac{1}{3}(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3).$$

Supposons Π_4 et Π_1 ainsi définis et montrons qu'ils satisfont les relations I.8. De l'équation I.9, on déduit que

$$\Pi_4 + \Pi_1 = \mathbf{1}_3. \tag{I.10}$$

Montrons que

$$\mathrm{Ker}\,\Pi_4 = E_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,\Pi_4 = E_4.$$

Comme $\Pi_4 = \dfrac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)$, la première égalité est immédiate. Pour la seconde égalité, supposons $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}\,\Pi_4$, il existe alors un vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathbf{y} = \Pi_4(\mathbf{x}) = \pi_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{x}).$$

Par ailleurs,

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3)\frac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Par suite, $(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3)(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, d'où $\mathbf{y} \in E_4$.

Inversement, si $\mathbf{y} \in E_4$, d'après (I.10) on a $\mathbf{y} = \Pi_4(\mathbf{y}) + \Pi_1(\mathbf{y})$. Or

$$\Pi_1(\mathbf{y}) = -\frac{1}{3}(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3)(\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Donc $\mathbf{y} = \Pi_4(\mathbf{y})$, par suite $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}\Pi_4$. Ainsi, $\operatorname{Im}\Pi_4 = E_4$.

De la même façon, on montre que

$$\operatorname{Ker}\Pi_1 = E_4 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\Pi_1 = E_1.$$

Les relations $\Pi_4\Pi_1 = \Pi_1\Pi_4 = \mathbf{0}$ se déduisent immédiatement du fait que

$$\Pi_4\Pi_1 = \left(\frac{1}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)\right)\left(-\frac{1}{3}(\mathbf{A} - 4\mathbf{1}_3)\right) = -\frac{1}{9}m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Les relations $\Pi_4^2 = \Pi_4$, $\Pi_1^2 = \Pi_1$ sont une conséquence immédiate des relations (I.10) et $\Pi_4\Pi_1 = \Pi_1\Pi_4 = \mathbf{0}$.

En multipliant les deux membres de la relation (I.10) à gauche par la matrice $\mathbf{A}$, on obtient la décomposition suivante de la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\Pi_4 + \mathbf{A}\Pi_1.$$

Comme pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E_4, on a $\mathbf{A}\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ et $\Pi_4\mathbf{x} = \mathbf{x}$, on en déduit que

$$\mathbf{A}\Pi_4 = 4\Pi_4.$$

Par ailleurs, on a de façon similaire $\mathbf{A}\Pi_1 = \Pi_1$. Ainsi,

$$\mathbf{A} = 4\Pi_4 + \Pi_1. \tag{I.11}$$

La décomposition (I.11) de la matrice $\mathbf{A}$ est appelée la *décomposition spectrale* de $\mathbf{A}$. On montrera dans la suite que cette décomposition de la matrice $\mathbf{A}$ est très utile pour avoir des expressions simples de puissances de $\mathbf{A}$. En particulier, pour tout entier k, on montrera que

$$\mathbf{A}^k = 4^k\Pi_4 + \Pi_1.$$

Les matrices des projecteurs π_1 et π_4 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont

$$\Pi_4 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Pi_1 = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

On notera que $\operatorname{rang}\Pi_4 = 1 = \operatorname{trace}\Pi_4$ et que $\operatorname{rang}\Pi_1 = 2 = \operatorname{trace}\Pi_2$.

I.3.6. Deuxième exemple : le cas d'une matrice non diagonalisable.— Considèrons la matrice suivante de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = (X-2)^3(X-3)$, son polynôme minimal est $m_{\mathbf{A}} = (X-2)^2(X-3)$. La matrice $\mathbf{A}$ n'est donc pas diagonalisable.

En appliquant le lemme des noyaux, théorème I.8, au polynôme minimal, on obtient la décomposition :

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2 \oplus E_3,$$

où E_3 est le sous-espace propre associé à la valeur propre 3. Notons

$$N_2 = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2.$$

La dimension de E_3 est majorée par la multiplicité algébrique de la valeur propre 3. On a donc $\dim E_3 = 1$ et par suite $\dim N_2 = 3$.

Déterminons la matrice de la projection π_2 de $\mathbb{R}^4$ sur N_2 parallèlement à E_3 et celle de la projection π_3 de $\mathbb{R}^4$ sur E_3 parallèlement à N_2, exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Les polynômes $(X-2)^2$ et $X-3$ sont premiers entre eux ; on établit une relation de Bézout :

$$(X-2)^2 + (X-3)(-X+1) = 1.$$

Posons

$$\Pi_2 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_4)(-\mathbf{A} + \mathbf{1}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_3 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi définis, Π_2 et Π_3 satisfont :

$$\Pi_2^2 = \Pi_2, \quad \Pi_3^2 = \Pi_3, \quad \Pi_2\Pi_3 = \Pi_3\Pi_2 = 0, \quad \mathbf{1}_4 = \Pi_2 + \Pi_3.$$

De plus, on a

$$\mathrm{Im}\,\Pi_2 = N_2, \quad \mathrm{Ker}\,\Pi_3 = E_3, \quad \mathrm{Im}\,\Pi_3 = E_3, \quad \mathrm{Ker}\,\Pi_3 = N_2.$$

Ainsi les matrices Π_2 et Π_3 sont bien celles des projections sur les sous-espaces N_2 et E_3 respectivement.

Posons

$$\mathbf{D} = 2\Pi_2 + 3\Pi_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$. Ainsi $\mathbf{A}$ s'écrit comme la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente. Nous montrons dans ce chapitre que cette décomposition est unique.

I.3.7. Sous-espace spectral.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (X - \lambda_1)^{h_1} \ldots (X - \lambda_p)^{h_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ et $h_1 + \ldots + h_p = n$.

Le sous-espace vectoriel Ker $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{h_i}$ de $\mathbb{K}^n$ est appelé le *sous-espace spectral* de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ_i. On le notera N_{λ_i}. Certains textes utilisent aussi la terminologie de *sous-espace caractéristique*, ou encore de *sous-espace propre généralisé*. Il est immédiat que le sous-espace propre E_λ est un sous-espace vectoriel du sous-espace spectral N_λ.

I.14 Théorème (Théorème spectral géométrique).— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé avec

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (X - \lambda_1)^{h_1} \ldots (X - \lambda_p)^{h_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $h_1 + \ldots + h_p = n$ et dont le polynôme minimal est

$$m_{\mathbf{A}} = (X - \lambda_1)^{k_1} \ldots (X - \lambda_p)^{k_p}, \qquad \text{avec } 0 < k_i \leqslant h_i.$$

Alors, les sous-espaces spectraux de $\mathbf{A}$ satisfont, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, les assertions suivantes :

i) $\mathbb{K}^n = N_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus N_{\lambda_p}$,

ii) N_{λ_i} est stable par $\mathbf{A}$,

iii) la matrice $\mathbf{N}_i = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)\Pi_i$, où Π_i est la matrice de la projection de $\mathbb{K}^n$ sur N_{λ_i} parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_{\lambda_j}$, est nilpotent d'indice k_i,

iv) $\dim N_{\lambda_i} = h_i$.

I.3.8. Décomposition spectrale algébrique.— Soit **A** une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (X-\lambda_1)^{h_1} \dots (X-\lambda_p)^{h_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $h_1 + \ldots + h_p = n$. D'après le théorème I.14, on a une décomposition

$$\mathbb{K}^n = N_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus N_{\lambda_p}.$$

La projection sur le sous-espace spectral N_{λ_i} parallèlement au sous-espace $\bigoplus_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{p} N_{\lambda_j}$ est appelé *projecteur spectral associé à la valeur propre* λ_i. On notera Π_{λ_i} la matrice de ce projecteur dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

I.15 Proposition.— Les projecteur spectraux $\Pi_{\lambda_1}, \ldots, \Pi_{\lambda_p}$ sont des polynômes en **A**.

Le théorème suivant est aussi connu sous le nom de « décomposition de Dunford ».

I.16 Théorème (Décomposition spectrale algébrique).— Soit **A** une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ est scindé. Alors, il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

où

- **i)** **D** est diagonalisable et **N** est nilpotente,
- **ii)** **D** et **N** sont des polynômes en **A**,
- **iii)** $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de **A**, alors les matrices **D** et **N** sont données par

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p \Pi_{\lambda_p}$$

et

$$\mathbf{N} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_1} + \ldots + (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)\Pi_{\lambda_p},$$

où $\Pi_{\lambda_1}, \ldots, \Pi_{\lambda_p}$ désignent les projecteurs spectraux de la matrice **A**.

I.17 Proposition.— Une matrice **A** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, est diagonalisable si, et seulement si, il existe des matrices $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$ telles que

i) Π_i est la matrice de la projection sur E_{λ_i} parallèlement à $\mathrm{Im}\,(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)$,
ii) $\mathbf{1}_n = \Pi_1 + \ldots + \Pi_p$,
iii) $\Pi_i \Pi_j = \mathbf{0}$, si $i \neq j$,
iv) $\mathbf{A} = \lambda_1 \Pi_1 + \ldots + \lambda_p \Pi_p$.

I.3.9. Calcul de la décomposition spectrale algébrique.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de spectre $\mathrm{spec}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Étant donné un polynôme annulateur

$$Q = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

de $\mathbf{A}$, déterminons les projecteurs spectraux $\Pi_{\lambda_1}, \ldots, \Pi_{\lambda_p}$ de $\mathbf{A}$. En pratique, on prendra pour Q le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ ou le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$.

Étape 1 : On décompose la fraction rationnelle $\dfrac{1}{Q}$ en éléments simples dans $\mathbb{K}(X)$:

$$\frac{1}{Q} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \lambda_i)^j}.$$

Étape 2 : On pose

$$U_i = \sum_{j=1}^{\alpha_i} a_{i,j}(X - \lambda_i)^{\alpha_i - j} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{1}{(X - \lambda_i)^{\alpha_i}} Q = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}.$$

On a alors

$$\frac{1}{Q} = \frac{U_1}{(X - \lambda_1)^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{U_p}{(X - \lambda_p)^{\alpha_p}}.$$

Par suite,

$$1 = U_1 Q_1 + \ldots + U_p Q_p.$$

Étape 3 : On pose alors , pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$\Pi_{\lambda_i} = U_i(\mathbf{A}) Q_i(\mathbf{A}).$$

On vérifie, qu'ainsi définis, pour tout i, Π_{λ_i} est la matrice du projecteur spectral π_{λ_i} de $\mathbb{K}^n$ sur N_{λ_i}, exprimée dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

I.3.10. Exemple.— On considère la matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $p_{\mathbf{A}} = -(X-1)(X-2)^2$. Le polynôme $(X-1)(X-2)$ n'est pas annulateur de $\mathbf{A}$, donc le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est $m_{\mathbf{A}} = (X-1)(X-2)^2$ et $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable. Déterminons les projecteurs sur les espaces spectraux associés à la décomposition :

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) \oplus \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^2.$$

On considère le polynôme annulateur $Q = (X-1)(X-2)^2$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} &= \frac{1}{X-1} + \frac{-1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2},\\ &= \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2}.\end{aligned}$$

En posant

$$U_1 = 1,\ Q_1 = (X-2)^2,\ U_2 = -X+3,\ Q_2 = X-1,$$

on a

$$1 = U_1Q_1 + U_2Q_2.$$

La projection $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow N_1$ sur l'espace spectral $N_1 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)$ parallèlement à $N_2 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^2$ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$:

$$\Pi_1 = U_1(\mathbf{A})Q_1(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^2.$$

La projection $\pi_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow N_2$ sur N_2 parallèlement à N_1 a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$:

$$\Pi_2 = U_2(\mathbf{A})Q_2(\mathbf{A}) = (-\mathbf{A} + 3\mathbf{1}_3)(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3).$$

Notons que l'on aurait pu aussi obtenir Π_2 par la relation :

$$\Pi_2 = \mathbf{1}_3 - \Pi_1,$$

soit

$$\Pi_2 = \mathbf{1}_3 - (\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3)^2 = -\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_3.$$

On a donc

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbf{D} = \Pi_1 + 2\Pi_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$$

d'où

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{D}$ est diagonalisable (on peut vérifier que son polynôme minimal est $(X-2)(X-1)$) et la matrice $\mathbf{N}$ est nilpotente, on a $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$.

I.3.11. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}} = -(X-1)(X+3)^2$ et le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}} = (X-1)(X+3)$. Ce dernier étant scindé et n'ayant que des racines simples, la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable et il existe une décomposition :

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_{-3}.$$

Notons, Π_1 et Π_{-3} les matrices des projecteurs spectraux $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E_1$ et $\pi_{-3} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow E_{-3}$ exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les matrices Π_1 et Π_{-3} vérifient les deux relations :

$$\begin{cases} \mathbf{1}_3 = \Pi_1 + \Pi_{-3} \\ \mathbf{A} = \Pi_1 - 3\Pi_{-3} \end{cases}$$

qui s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{-3} \end{bmatrix}$$

D'où

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_3, \qquad \Pi_{-3} = -\frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_3. \tag{I.12}$$

Exercice 59.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer en fonction de $\mathbf{A}$ les projecteurs spectraux de $\mathbf{A}$.
2. Exprimer, pour tout entier $k \geqslant 0$, la matrice $\mathbf{A}^k$ en fonction de $\mathbf{A}$.
3. Calculer la matrice de $\mathbf{A}^k$.
4. Répondre aux mêmes questions avec les matrices suivantes :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

§ 4 Calcul des puissances d'une matrice

Exercice 60.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (X-\lambda_1)^{h_1} \ldots (X-\lambda_p)^{h_p}.$$

Soient $\Pi_{\lambda_1}, \ldots, \Pi_{\lambda_p}$ les projecteurs spectraux de la matrice $\mathbf{A}$. Montrer que si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, alors, pour tout entier naturel $k > 0$, on a

$$\mathbf{A}^k = \lambda_1^k \Pi_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_p^k \Pi_{\lambda_p}.$$

I.4.1. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nous avons vu en I.3.11, que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable et de spectre $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{-3, 1\}$. On a la décomposition spectrale :

$$\mathbf{A} = \Pi_1 - 3\Pi_{-3},$$

d'où, pour entier naturel k,

$$\mathbf{A}^k = \Pi_1 + (-3)^k \Pi_{-3}.$$

D'après l'expression (I.12) des projecteurs en fonction de $\mathbf{A}$, on déduit que :

$$\mathbf{A}^k = \frac{1}{4}(1-(-3)^k)\mathbf{A} + \frac{1}{4}(3+(-3)^k)\mathbf{1}_3.$$

I.4.2. Exemple.— Considérons la matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

On a vu en I.3.10 que la matrice $\mathbf{A}$, de spectre $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, 2\}$, n'est pas diagonalisable. Il existe une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$$

en la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotent, donnés par

$$\mathbf{D} = \Pi_1 + 2\Pi_2, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D}.$$

On a $\mathbf{D}^k = \Pi_1 + 2^k\Pi_2$ et $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$. Comme les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{N}$ commutent, et que $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$, d'après la formule du binôme, on a :

$$\mathbf{A}^k = \binom{k}{0}\mathbf{D}^k + \binom{k}{1}\mathbf{D}^{k-1}\mathbf{N}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k &= \Pi_1 + 2^k\Pi_2 + k(\Pi_1 + 2^{k-1}\Pi_2)(\mathbf{A} - \Pi_1 - 2\Pi_2),\\ &= (1-k)\Pi_1 + k\mathbf{A}\Pi_1 + 2^k\Pi_2 + k2^{k-1}\mathbf{A}\Pi_2 - k2^k\Pi_2.\end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{A}^k = ((1-k)\mathbf{1}_3 + k\mathbf{A})\Pi_1 + (2^k(1-k)\mathbf{1}_3 + k2^{k-1}\mathbf{A})\Pi_2.$$

I.4.3. Exemple : une matrice stochastique.— Soit $\mathbf{P}$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},$$

où a et b sont non nuls.

Exercice 61.— On suppose que $0 < a+b < 1$.

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{P}$.

b) La matrice $\mathbf{P}$ est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que

$$\mathbf{P} = \Pi_1 + (1-a-b)\Pi_2,$$

où Π_1 et Π_2 sont des projecteurs spectraux de $\mathbf{P}$.

d) Calculer les matrices Π_1 et Π_2.

e) Calculer $\mathbf{P}^k$, pour tout entier $k \geqslant 1$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{P}^k = \Pi_1$.

Exercice 62.— On suppose que $a+b = 0$.

a) La matrice $\mathbf{P}$ est-elle diagonalisable ?

b) Calculer $\mathbf{P}^k$, pour tout entier $k \geqslant 1$. Que peut-on en conclure sur la limite de $\mathbf{P}^k$ lorsque k tend vers $+\infty$? [*On pourra considérer le polynôme minimal de* $\mathbf{P}$ *et procéder par récurrence*]

Exercice 63.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les polynômes caractéristique et minimal dans $\mathbb{C}[X]$ sont respectivement

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n(X-\lambda_1)^{h_1}\ldots(X-\lambda_p)^{h_p}, \qquad m_{\mathbf{A}} = (X-\lambda_1)^{k_1}\ldots(X-\lambda_p)^{k_p}.$$

a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{k_i-1}\binom{k}{j}\lambda_i^{k-j}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{1}_n)^j\Pi_i.$$

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\lambda| < 1$, alors pour tout entier j, on a

$$\lim_{k \to +\infty} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} = 0.$$

c) En déduire que si $\rho(\mathbf{A}) < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{A}^k = 0$.

d) Montrer que si $\rho(\mathbf{A}) = 1$ et que 1 est une seule valeur propre simple dominante de $\mathbf{A}$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{A}^k = \Pi_1$, où Π_1 est le projecteur spectral associé à la valeur propre 1.

CHAPITRE

II

Le théorème de Perron

Sommaire

Dans ce chapitre, nous étudions le spectre des matrices dont tous les coefficients sont strictements positifs.

§ 1 Matrices positives et strictements positives

II.1.1. Vecteurs et matrices positifs.— Un vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est dit **positif** (resp. **strictement positif**) si toutes ses coordonnées sont positives (resp. strictement positives). On note alors $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{x} > \mathbf{0}$).

De la même façon, une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est dite **positive** (resp. **strictement positive**) si tous ses coefficients le sont. On note alors $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{A} > \mathbf{0}$).

On peut définir une relation d'ordre sur les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, en posant $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{x}$ si $\mathbf{y} - \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. De la même façon, on définit une relation d'ordre sur les matrices de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ en posant $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} - \mathbf{B} \geqslant \mathbf{0}$.

II.1 Proposition.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si, et seulement si, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ implique $\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$.

Preuve. Si $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$, il est immédiat que, pour tout vecteur $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, on a $\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. Inversement, si pour tout vecteur $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, on a $\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, en particulier pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, si $\mathbf{e_i}$ designe le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathbf{Ae_i} \geqslant \mathbf{0}$, donc la i-ième colonne de $\mathbf{A}$ est positive. Ainsi, toutes les colonnes de $\mathbf{A}$ sont positives, par suite $\mathbf{A}$ est positive. □

II.2 Proposition.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement positive si, et seulement si, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ et $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ implique $\mathbf{Ax} > \mathbf{0}$.

Preuve. Si $\mathbf{A} = (a_i^j) > \mathbf{0}$ et $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ avec $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Il existe au moins un coefficient x_{i_0} de $\mathbf{x}$ strictement positif. Alors, pour tout $i = 1 \ldots n$, le i-ième coefficient du vecteur $\mathbf{Ax}$ est

$$(\mathbf{Ax})_i = \sum_{k=1}^{n} a_i^k x_k > a_i^{i_0} x_{i_0} > 0.$$

Donc $\mathbf{Ax} > \mathbf{0}$. La réciproque se montre de la même façon que dans la preuve précédente. □

II.3 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$|\mathbf{Ax}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{x}|.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire. Si $\mathbf{A} = (a_i^j)$ et $\mathbf{x} = (x_i)$, alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|(\mathbf{Ax})_i| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_i^k x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_i^k|\,|x_k| = (|\mathbf{A}|\,|\mathbf{x}|)_i.$$

D'où $|\mathbf{Ax}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{x}|$. □

§ 2 Rayon spectral des matrices strictement positives

II.4 Lemme.— Une matrice strictement positive ne peut pas être nilpotente.

Preuve. Si $\mathbf{A}$ est strictement positive, alors toutes ses puissances sont strictement positives. Aucune d'elles ne peut donc être nulle, ainsi la matrice $\mathbf{A}$ ne peut pas être nilpotente. □

Rappelons que le rayon spectral d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est le plus grand des modules des valeurs propres de $\mathbf{A}$:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{A})\}.$$

II.2.1. Exemple.— La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}} = X^2 - 2X - 3$, ainsi $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{-1, 3\}$. Son rayon spectral est $\rho(\mathbf{A}) = 3$.

II.5 Proposition.— Si $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, alors $\rho(\mathbf{A}) > 0$.

Preuve. Par définition le rayon spectral est toujours positif : $\rho(\mathbf{A}) \geqslant 0$. Montrons par l'absurde qu'il est non nul. Supposons que $\rho(\mathbf{A}) = 0$, alors 0 est la seule valeur propre de $\mathbf{A}$. Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est alors $p_{\mathbf{A}} = (-1)^n X^n$. Comme $p_{\mathbf{A}}$ est annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton, la matrice $\mathbf{A}$ est nilpotente, ce qui est impossible d'après le lemme II.4. Finalement $\rho(\mathbf{A}) > 0$. $\square$

La trace étant la somme des valeurs propres, on peut remarquer que si $\rho(\mathbf{A}) = 0$, alors la trace de $\mathbf{A}$ est nulle. Or $\mathbf{A}$ est strictement positive, en particulier les coefficients de sa diagonale sont strictement positifs, donc la trace de $\mathbf{A}$ est strictement positive et ne peut donc être nulle. Ce qui est une contractiction et $\rho(\mathbf{A}) > 0$.

II.6 Proposition.— Si $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, alors $\rho(\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A}) = 1$.

Preuve. Posons $\rho = \rho(\mathbf{A})$. D'après la proposition précédente, ρ est non nul. Le polynôme caractéristique de la matrice $\frac{1}{\rho}\mathbf{A}$ vérifie

$$p_{\frac{1}{\rho}\mathbf{A}}(X) = \frac{1}{\rho^n} p_{\mathbf{A}}(\rho X).$$

Par suite, λ est valeur propre de $\mathbf{A}$ si et seulement si $\frac{\lambda}{\rho}$ est valeur propre de $\frac{1}{\rho}\mathbf{A}$. On en déduit que

$$\rho(\frac{1}{\rho}\mathbf{A}) = \frac{1}{\rho}\rho(\mathbf{A}) = 1.$$

$\square$

II.2.2. Remarque.— D'après la proposition II.5, si $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ alors $\rho(\mathbf{A}) > 0$. Ainsi $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ si, et seulement si, $\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Comme $\rho(\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A}) = 1$, dans les raisonnements qui suivent, on pourra sans perte de généralité considérer des matrices $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ telles que $\rho(\mathbf{A}) = 1$.

II.7 Lemme.— Soit $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ telle que $\rho(\mathbf{A}) = 1$ et soit $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ un vecteur non nul. Si $\mathbf{Ay} \geqslant \mathbf{y}$, alors $\mathbf{Ay} = \mathbf{y}$.

Preuve. Soit $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ un vecteur non nul, tel que $\mathbf{Ay} \geqslant \mathbf{y}$. On montre par l'absurde que $\mathbf{Ay} = \mathbf{y}$; supposons que $\mathbf{Ay} > \mathbf{y}$. Comme $\mathbf{Ay} \geqslant \mathbf{y}$, on a $\mathbf{Ay} - \mathbf{y} > \mathbf{0}$. Par hypothèse $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, d'où

$$\mathbf{A}^2\mathbf{y} - \mathbf{Ay} > \mathbf{0}.$$

Par ailleurs, comme $\mathbf{Ay} > \mathbf{0}$, il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbf{A}^2\mathbf{y} - \mathbf{Ay} > \varepsilon\mathbf{Ay},$$

soit

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\mathbf{A}^2\mathbf{y} > \mathbf{Ay}.$$

Posons $\mathbf{B} = \frac{1}{1+\varepsilon}\mathbf{A}$, on a $\mathbf{BAy} > \mathbf{Ay}$. Par suite, $\mathbf{B}$ étant strictement positive, on a, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{B}^k\mathbf{Ay} > \mathbf{Ay}.$$

Par ailleurs,

$$\rho(\mathbf{B}) = \frac{1}{1+\varepsilon}\rho(\mathbf{A}) = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Par suite, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{0}$. À la limite, on a $\mathbf{0} > \mathbf{A}|\mathbf{x}|$ qui est absurde car $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ et $\mathbf{y}$ est positif non nul. Par suite, $\mathbf{Ay} = \mathbf{y}$. En particulier, la matrice $\mathbf{A}$ admet 1 comme valeur propre. □

II.8 Proposition.— Soit $\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Alors, $\rho(\mathbf{A})$ est valeur propre de $\mathbf{A}$. De plus, si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$, alors

$$\mathbf{A}|\mathbf{x}| = \rho(\mathbf{A})|\mathbf{x}|$$

et $|\mathbf{x}| > \mathbf{0}$.

Preuve. On peut supposer $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ telle que $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$ de module 1 et soit $\mathbf{x}$ un vecteur propre associé à λ. Comme λ est de module 1, on a

$$|\mathbf{x}| = |\lambda|\,|\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\mathbf{Ax}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{x}|,$$

l'inégalité étant donnée par la proposition II.3. La matrice $\mathbf{A}$ étant positive, on a $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|$, d'où

$$|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{A}|\mathbf{x}|.$$

D'après le lemme II.7, on déduit que $\mathbf{A}|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Enfin, $|\mathbf{x}| = \mathbf{A}|\mathbf{x}| > \mathbf{0}$, car $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ et $|\mathbf{x}|$ est non nul, ce qui conclut la preuve. □

II.2.3. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ la matrice de l'exemple II.2.1. On a

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}), \qquad E_3 = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

Tout vecteur propre $\mathbf{x}$ de E_3, vérifie $\mathbf{A}|\mathbf{x}| = 3|\mathbf{x}|$.

II.2.4. Exemple.— Du résultat précédent, on déduit que toute matrice $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres réelles. En effet, le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ admet la racine réelle $\rho(\mathbf{A})$, il ne peut donc pas admettre d'autre racine complexe. De façon explicite, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

alors le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}} = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ est de discriminant $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$ toujours strictement positif. Il admet donc deux racines réelles.

II.9 Proposition.— Si $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, alors la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$ est dominante.

Preuve. Sans perte de généralité, supposons que $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ et $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Montrons que la valeur propre 1 de $\mathbf{A}$ est dominante ; cela revient à montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1.

Supposons que λ soit une valeur propre de $\mathbf{A}$ de module 1, soit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ un vecteur propre associé. On a

$$|\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{A}||\mathbf{x}|.$$

D'après le lemme II.7, on a $\mathbf{A}|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Donc, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$|x_j| = (\mathbf{A}|\mathbf{x}|)_j = \sum_{k=1}^{n} a_j^k |x_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_j^k x_k|.$$

Par ailleurs,

$$|x_j| = |\lambda|\,|x_j| = |(\lambda\mathbf{x})_j| = |(\mathbf{A}\mathbf{x})_j| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_j^k x_k \right|.$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |a_j^k x_k| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_j^k x_k \right|.$$

On est ainsi dans le cas de l'égalité de l'inégalité triangulaire. Fixons un $j \in [\![1,n]\!]$, il existe donc des réels $\mu_2, \ldots, \mu_n > 0$ tels que, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, on ait $a_j^k x_k = \mu_k a_j^1 x_1$.

Soit

$$\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_2 \frac{a_j^1}{a_j^2} \\ \vdots \\ \mu_n \frac{a_j^1}{a_j^n} \end{bmatrix}.$$

Comme $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, on a

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_2 \frac{a_j^1}{a_j^2} \\ \vdots \\ \mu_n \frac{a_j^1}{a_j^n} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_2 \frac{a_j^1}{a_j^2} \\ \vdots \\ \mu_n \frac{a_j^1}{a_j^n} \end{bmatrix} = |\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_2 \frac{a_j^1}{a_j^2} \\ \vdots \\ \mu_n \frac{a_j^1}{a_j^n} \end{bmatrix}| = |\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_2 \frac{a_j^1}{a_j^2} \\ \vdots \\ \mu_n \frac{a_j^1}{a_j^n} \end{bmatrix}| = |\lambda| \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_2 \frac{a_j^1}{a_j^2} \\ \vdots \\ \mu_n \frac{a_j^1}{a_j^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_2 \frac{a_j^1}{a_j^2} \\ \vdots \\ \mu_n \frac{a_j^1}{a_j^n} \end{bmatrix}.$$

Par suite, $\lambda = 1$. On montre ainsi que 1 est la seule valeur propre de module 1 ; elle est donc valeur propre dominante de $\mathbf{A}$. $\square$

II.10 Lemme.— Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ des matrices strictement positives de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathbf{C} \leqslant \mathbf{A}$. Alors, $\rho(\mathbf{C}) \leqslant \rho(\mathbf{A})$.

Preuve. **Fait 1.** La fonction f définie sur la partie

$$\mathscr{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \text{ et } \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$$

de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie par $f(\mathbf{x}) = \max\{t \in \mathbb{R}^+ \mid t\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}\}$ est bornée.

Preuve. La partie $\mathscr{D}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathscr{D}$, on définit

$$I_{\mathbf{x}} = \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}\}.$$

Les ensembles $I_{\mathbf{x}}$ sont non vide et sont bornés par $||\mathbf{A}||_1$, car $||\mathbf{A}||_1 = \sup\limits_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{||\mathbf{A}\mathbf{x}||_1}{||\mathbf{x}||_1}$. La fonction f définie sur $\mathscr{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie par $f(\mathbf{x}) = \max I_{\mathbf{x}}$ est donc bornée par $||\mathbf{A}||_1$. Montrons que $\sup\limits_{\mathbf{x}\in\mathscr{D}} f(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{A})$. Posons $\rho = \sup\limits_{\mathbf{x}\in\mathscr{D}} f(\mathbf{x})$. Soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$ et soit $\mathbf{x}$ un vecteur propre normalisé associé. On a

$$|\lambda|\,|\mathbf{x}| = |\lambda \mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{x}| = \mathbf{A}|\mathbf{x}|.$$

Par suite, $|\lambda| \leqslant f(|\mathbf{x}|)$, d'où $|\lambda| \leqslant \rho$. $\square$

Fait 2. ρ est une valeur propre de $\mathbf{A}$.

Preuve. Il existe un vecteur $\mathbf{y} \in \mathscr{D}$ tel que $f(\mathbf{y}) = \rho$. Car $\mathscr{D}$ étant compact, de toute suite $(\mathbf{x}_k)_k$ dans $\mathscr{D}$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} f(\mathbf{x}_k) = \rho$, on peut extraire une sous-suite convergente $(\mathbf{x}_{\varphi(k)})_k$ vers un vecteur $\mathbf{y}$ de $\mathscr{D}$. On a donc $f(\mathbf{x}_{\varphi(k)})\mathbf{x}_{\varphi(k)} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}_{\varphi(k)}$, pour tout k, et par passage à la limite $\rho\mathbf{y} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{y}$. Par suite $\rho \leqslant f(\mathbf{y})$ et donc $f(\mathbf{y}) = \rho$. $\square$

Fait 3. $\mathbf{y}$ est vecteur propre de $\mathbf{A}$ de valeur propre ρ.

Preuve. Par l'absurde, si $\mathbf{Ay} \neq \rho\mathbf{y}$, alors $\mathbf{Ay} - \rho\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ et donc $\mathbf{A}(\mathbf{Ay} - \rho\mathbf{y}) > \mathbf{0}$, car $\mathbf{A}$ est strictement positive. Pour la même raison, on a $\mathbf{Ay} > \mathbf{0}$. Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbf{A}(\mathbf{Ay} - \rho\mathbf{y}) > \varepsilon\mathbf{Ay}.$$

D'où

$$\mathbf{A}\frac{\mathbf{Ay}}{||\mathbf{Ay}||_1} - (\rho+\varepsilon)\frac{\mathbf{Ay}}{||\mathbf{Ay}||_1} > \mathbf{0}.$$

Donc $f(\frac{\mathbf{Ay}}{||\mathbf{Ay}||_1}) \geqslant \rho + \varepsilon$, qui est absurde. Donc ρ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\rho = \rho(\mathbf{A})$. Si $\mathbf{C}$ est une matrice strictement positive telle que $\mathbf{C} \leqslant \mathbf{A}$. Soit λ une valeur propre de $\mathbf{C}$ de module maximal : $|\lambda| = \rho(\mathbf{C})$ et soit $\mathbf{x}$ un vecteur propre associé tel que $||\mathbf{x}||_1 = 1$. On a

$$\rho(\mathbf{C})|\mathbf{x}| = |\rho(\mathbf{C})\mathbf{x}| = |\mathbf{Cx}| \leqslant |\mathbf{C}|\,|\mathbf{x}| \leqslant |\mathbf{A}|\,|\mathbf{x}|.$$

Donc $\rho(\mathbf{C}) \leqslant f(|\mathbf{x}|)$ et $\rho(\mathbf{C}) \leqslant \rho = \rho(\mathbf{A})$. $\square$

$\square$

II.2.5. Exemple.—

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{-1, 5\}$ et $\mathrm{Sp}(\mathbf{C}) = \{-1, 3\}$.

II.11 Proposition.— Si $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, alors la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$ est simple, autrement dit

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\rho(\mathbf{A})) = 1.$$

Preuve. Sans perte de généralité, supposons que $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ et $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Pour montrer que 1 est une valeur propre simple de $\mathbf{A}$, il suffit de montrer que 1 n'est pas racine du polynôme dérivé du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$. Posons $\mathbf{A} = (a_i^j)$, on a

$$p_{\mathbf{A}}(X) = \begin{vmatrix} a_1^1 - X & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - X & \ldots & a_2^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^{n-1} & a_n^n - X \end{vmatrix}.$$

On montre par récurrence sur la taille n de $\mathbf{A}$, ou en tenant compte que le déterminant est une application n-linéaire, que le polynôme dérivé de $p_{\mathbf{A}}$ s'écrit :

$$p'_{\mathbf{A}}(X) = -\begin{vmatrix} 1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 0 & a_2^2 - X & \dots & a_2^n \\ 0 & a_3^2 & & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n^2 & \dots & a_n^n - X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1^1 - X & 0 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & 1 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & 0 & a_3^3 - X & & a_3^n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & 0 & a_n^3 & \dots & a_n^n - X \end{vmatrix}$$

$$- \dots - \begin{vmatrix} a_1^1 - X & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 - X & \dots & a_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1}^{n-1} - X & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Par suite
$$p'_{\mathbf{A}}(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_{\mathbf{A}_k}(X),$$

où $\mathbf{A}_k$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la k-ième ligne et k-ième colonne de la matrice $\mathbf{A}$. Considérons la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par blocs

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $\rho(\mathbf{B}_k) = \rho(\mathbf{A}_k)$. Par ailleurs, $\mathbf{B}_k \leqslant \mathbf{A}$, donc, d'après le lemme II.10, on déduit que $\rho(\mathbf{B}_k) \leqslant \rho(\mathbf{A}) = 1$.

Montrons que $\rho(\mathbf{B}_k) \neq 1$. Par l'absurde, supposons que $\rho(\mathbf{B}_k) = 1$. D'après la proposition II.8, il existe un vecteur propre $\mathbf{x}$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{B}_k) = 1$, tel que $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ et
$$|\mathbf{x}| = \mathbf{B}_k\,|\mathbf{x}|.$$
Or $\mathbf{B}_k\,|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{A}|\mathbf{x}|$, donc
$$|\mathbf{x}| \leqslant \mathbf{A}|\mathbf{x}|.$$
D'après le lemme II.7, on en déduit que $\mathbf{A}|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$, d'où

$$\mathbf{A}|\mathbf{x}| = \mathbf{B}_k|\mathbf{x}|$$

Cette égalité est absurde, car $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, $|\mathbf{x}| > \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}_k$ possède une ligne nulle. On montre ainsi que $\rho(\mathbf{B}_k) < 1$. Par suite $\rho(\mathbf{A}_k) < 1$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. La matrice $\mathbf{A}_k$ ne peut donc pas avoir 1 comme valeur propre, d'où $p_{\mathbf{A}_k}(1)$ est non nul, par suite $p'_{\mathbf{A}}(1)$ est non nul. $\square$

II.2.6. Le vecteur de Perron.— Si $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, d'après la proposition II.8, $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$, d'après la proposition II.11 cette valeur propre est simple. Or, la multiplicité géométrique est majorée par la multiplicité algébrique :

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\rho(\mathbf{A})) \leqslant \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\rho(\mathbf{A})) = 1.$$

La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$ est donc

$$\dim E_{\rho(\mathbf{A})} = \mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\rho(\mathbf{A})) = 1.$$

D'après la proposition II.8, il existe un vecteur propre strictement positif $|\mathbf{x}|$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$. Comme le sous-espace propre est de dimension 1, le vecteur

$$\mathbf{p} = \frac{|\mathbf{x}|}{\||\mathbf{x}|\|_1}$$

est l'unique vecteur propre associé à $\rho(\mathbf{A})$, strictement positif et unitaire.

L'unique vecteur propre strictement positif $\mathbf{p}$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$ tel que $\|\mathbf{p}\|_1 = 1$, est appelé le *vecteur de Perron* de $\mathbf{A}$.

II.2.7. Exemple.— Le vecteur de Perron de la matrice $\mathbf{A}$ de l'exemple II.2.1 est

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

> **II.12 Proposition.—** Si $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, les seuls vecteurs propres positifs de $\mathbf{A}$ sont les multiples positifs du vecteur de Perron $\mathbf{p}$.

Preuve. Soit $\mathbf{x}$ un vecteur propre positif de $\mathbf{A}$ associé à une valeur propre λ. Comme $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, on a $\mathbf{A}^\top > \mathbf{0}$. Par ailleurs, $\rho(\mathbf{A}^\top) = \rho(\mathbf{A})$. D'après ce qui précède, la matrice $\mathbf{A}^\top$ possède un unique vecteur propre $\tilde{\mathbf{p}}$, strictement positif et unitaire, associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A}^\top)$. On a $\mathbf{A}^\top\tilde{\mathbf{p}} = \rho(\mathbf{A}^\top)\tilde{\mathbf{p}}$, donc $\rho(\mathbf{A}^\top)\tilde{\mathbf{p}}^\top = \tilde{\mathbf{p}}^\top\mathbf{A}$. Par suite,

$$\rho(\mathbf{A}^\top)\tilde{\mathbf{p}}^\top\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{p}}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\tilde{\mathbf{p}}^\top\mathbf{x}.$$

Soit $(\rho(\mathbf{A}^\top) - \lambda)\tilde{\mathbf{p}}^\top\mathbf{x} = 0$. Or $\tilde{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ et $\mathbf{x}$ est positif non nul, donc $\tilde{\mathbf{p}}^\top\mathbf{x} > 0$. On en déduit que $\lambda = \rho(\mathbf{A})$. Donc $\mathbf{x} \in E_{\rho(\mathbf{A})}$, l'espace $E_{\rho(\mathbf{A})}$ étant de dimension 1, le vecteur $\mathbf{x}$ est un multiple du vecteur $\mathbf{p}$. □

II.2.8. Le théorème de Perron.— En résumé, nous avons montré le théorème de Perron :

> **II.13 Théorème (Théorème de Perron).—** Soit $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,
>
> **i)** $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$,
>
> **ii)** $\rho(\mathbf{A}) > 0$,
>
> **iii)** $\rho(\mathbf{A})$ est simple,
>
> **iv)** $\rho(\mathbf{A})$ est dominante,

v) il existe un vecteur propre $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, tel que

$$\mathbf{Ax} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{x},$$

vi) tout vecteur propre positif de $\mathbf{A}$ est un multiple positif du vecteur de Perron de $\mathbf{A}$.

II.2.9. Exemple.— Considérons la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = (x-13)(x-6)^2$, donc $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{13, 6\}$ et $\rho(\mathbf{A}) = 13$. Le sous-espace propre E_{13} est engendré par le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

On a $\|\mathbf{x}\|_1 = \frac{3}{7}$, par suite le vecteur de Perron de $\mathbf{A}$ est

$$\mathbf{p} = \frac{3}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs propres positifs sont dans E_{13}, on a

$$E_6 = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}).$$

II.2.10. Exemple.— Déterminons le rayon spectral et le vecteur de Perron de la matrice réelle strictement positive suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix},$$

où $a, b \in]0, 1[$. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ est

$$p_{\mathbf{A}} = (1-X)(1-(a+b)-X).$$

On a donc $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, 1-(a+b)\}$. On peut remarquer aussi que la matrice $\mathbf{A}$ est la transposée de la matrice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{P}$ ont donc les mêmes valeurs propres. On a $|1-(a+b)| < 1$ pour tous les $a, b \in]0, 1[$, donc $\rho(\mathbf{A}) = 1$. De plus, la matrice $\mathbf{A}$ est strictement positive, donc d'après le théorème de Perron, 1 est une valeur propre simple et le vecteur de Perron associé est

$$\mathbf{p} = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

II.2.11. Puissances d'une matrice strictement positive.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les polynômes caractéristique et minimal dans $\mathbb{C}[X]$ sont respectivement

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (X-\lambda_1)^{h_1} \ldots (X-\lambda_p)^{h_p}, \qquad m_{\mathbf{A}} = (X-\lambda_1)^{k_1} \ldots (X-\lambda_p)^{k_p}.$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^j \Pi_i.$$

Supposons $\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Alors, $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre dominante de $\mathbf{A}$ et on a

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{A})} \mathbf{A} \right)^k = \Pi_{\rho(\mathbf{A})},$$

où $\Pi_{\rho(\mathbf{A})}$ est le projecteur spectral associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$.

II.2.12. Exemple.— Soit $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à r. Alors, $\rho(\mathbf{A}) = r$.

En effet, r est alors valeur propre de $\mathbf{A}$ et le vecteur $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 est un vecteur propre associé. Le vecteur $\mathbf{e}$ est positif, c'est donc un multiple du vecteur de Perron $\mathbf{p}$. On a $\mathbf{e} = \lambda \mathbf{p}$ et $\mathbf{Ap} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{p}$. Comme $\mathbf{Ae} = r\mathbf{e}$, on en déduit que $r = \rho(\mathbf{A})$.

CHAPITRE

III

Le théorème de Perron-Frobenius

Sommaire

§ 1 Le cas des matrices positives

Dans cette section, nous allons voir que le théorème de Perron ne se généralise pas aux matrices positives. Cependant, nous montrons que les matrices positives admettent leur rayon spectral pour valeur propre.

III.1.1. Exemple.— La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est positive, mais non strictement positive. Elle admet 0 comme valeur propre double, donc $\rho(\mathbf{A}) = 0$. On a $\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{A}) = 2$ et $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(\mathbf{A}) = 1$:

$$E_0 = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

Il n'existe pas de vecteur $\mathbf{x}$ strictement positif dans E_0.

III.1.2. Exemple.— La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

admet 1 et -1 comme valeurs propres. Son rayon spectral $\rho(\mathbf{A})$ est donc égal à 1. Ainsi la matrice $\mathbf{A}$ possède deux valeurs propres dictinctes, donc simples, de module maximal.

III.1 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice positive de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

i) $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$,

ii) il existe un vecteur propre $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ non nul, tel que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{x}.$$

Preuve. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on définit la matrice

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \frac{1}{k}\mathbf{E}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ est positive et la matrice $\mathbf{E}$ est strictement positive, donc, pour tout $k \geqslant 1$, la matrice $\mathbf{A}_k$ est strictement positive. D'après le théorème de Perron II.13, $\rho(\mathbf{A}_k)$ est une valeur propre simple, dominante et strictement positive de $\mathbf{A}_k$; notons $\mathbf{p}_k$ le vecteur de Perron associé.

Fait 1. La suite $(\rho(\mathbf{A}_k))_{k\geqslant 1}$ est décroissante.

Preuve. Pour tout entier k, on a $\mathbf{A}_k \geqslant \mathbf{A}_{k+1}$. D'après le lemme II.10, on a donc $\rho(\mathbf{A}_k) \geqslant \rho(\mathbf{A}_{k+1})$. Ainsi, la suite $(\rho(\mathbf{A}_k))_{k\geqslant 1}$ est décroissante. $\square$

Fait 2. La suite $(\rho(\mathbf{A}_k))_{k\geqslant 1}$ converge, de plus, sa limite ρ est minorée par $\rho(\mathbf{A})$.

Preuve. La suite $(\rho(\mathbf{A}_k))_{k\geqslant 1}$ est décroissante. Or pour tout entier k, $\mathbf{A}_k \geqslant \mathbf{A}$, donc $\rho(\mathbf{A}_k) \geqslant \rho(\mathbf{A})$, la suite $(\rho(\mathbf{A}_k))_{k\geqslant 1}$ est donc minorée par $\rho(\mathbf{A})$. Elle converge ainsi vers $\rho \geqslant \rho(\mathbf{A})$. $\square$

Fait 3. La suite $(\mathbf{p}_k)_{k\geqslant 1}$ de $\mathbb{R}^n$ admet une sous-suite convergente vers un vecteur positif $\tilde{\mathbf{p}}$ tel que

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}} = \rho\tilde{\mathbf{p}}.$$

Preuve. L'ensemble des vecteurs de Perron $\mathbf{p}_k$, $k \geqslant 1$, sont tous contenus dans la sphère unité

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}.$$

La suite $(\mathbf{p}_k)_{k\geqslant 1}$ est donc bornée ; d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(\mathbf{p}_{\varphi(k)})_{k\geqslant 1}$ vers un vecteur positif $\tilde{\mathbf{p}}$ de la sphère unité S. Pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{A}_{\varphi(k)}\mathbf{p}_{\varphi(k)} = \rho(\mathbf{A}_{\varphi(k)})\mathbf{p}_{\varphi(k)}.$$

La suite $(\rho(\mathbf{A}_k))_{k\geqslant 1}$ étant convergente de limite ρ, la suite extraite $(\rho(\mathbf{A}_{\varphi(k)}))_{k\geqslant 1}$ est aussi convergente de même limite ρ. Par ailleurs, comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{A}_{\varphi(k)} = \mathbf{A}$. Ainsi

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}} = \lim_{k\to+\infty} \left(\mathbf{A}_{\varphi(k)}\right) \lim_{k\to+\infty} \left(\mathbf{p}_{\varphi(k)}\right) \lim_{k\to+\infty} \left(\mathbf{A}_{\varphi(k)}\mathbf{p}_{\varphi(k)}\right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\rho(\mathbf{A}_{\varphi(k)})\mathbf{p}_{\varphi(k)}\right).$$

D'où

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}} = \rho\tilde{\mathbf{p}}.$$

□

Fait 4. $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ et il existe un vecteur propre positif associé.

Preuve. ρ est une valeur propre de $\mathbf{A}$, on déduit que $\rho \leqslant \rho(\mathbf{A})$, or d'après le fait 2, on a $\rho \geqslant \rho(\mathbf{A})$. D'où $\rho = \rho(\mathbf{A})$. Ainsi, $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ et le vecteur $\tilde{\mathbf{p}}$ est un vecteur propre positif associé. □

□

§ 2 Les matrices irréductibles

Le rayon spectral d'une matrice positive peut ne pas être simple, cf. exemple III.1.1, c'est aussi le cas de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, le rayon spectral d'une matrice positive peut ne pas être dominant, cf. exemple III.1.2.

L'objectif est maintenant de comprendre les hypothèses sous lesquelles, le théorème de Perron II.13 peut être généralisé aux matrices positives.

III.2.1. Matrices irréductibles.— Une matrice $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *réductible* s'il existe une partition de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ en deux sous-ensembles

$$I = \{i_1,\dots,i_s\}, \quad J = \{j_1,\dots,j_t\}, \quad s+t = n,\ s,t \geqslant 1,$$

tels que, pour tout $(i,j) \in I \times J$, $\mathbf{A}_i^j = 0$, sinon la matrice $\mathbf{A}$ est dite *irréductible*.

III.2 Proposition.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est réductible si, et seulement si, il existe une matrice de permutation $\mathbf{P}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, telle que

$$\mathbf{P}^\top\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_t(\mathbb{R})$ et $\mathbf{D} \in \mathscr{M}_s(\mathbb{R})$ sont deux matrices carrées, avec $t,s \geqslant 1$.

Preuve. Supposons que $\mathbf{A}$ soit réductible. Il existe donc une partition de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ en deux sous-ensembles

$$I = \{i_1,\ldots,i_s\}, \quad J = \{j_1,\ldots,j_t\}, \quad s+t = n,\ s,t \geqslant 1,$$

tels que, pour tout $(i,j) \in I \times J$, $\mathbf{A}_i^j = 0$. Soit $\mathbf{P}$ la matrice de permutation qui ordonne les colonnes de $\mathbf{A}$ dans l'ordre $(j_1,\ldots,j_t,i_1,\ldots,i_s)$:

$$\text{si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{bmatrix}, \text{ alors } \mathbf{AP} = \begin{bmatrix} a_1^{j_1} & \ldots & a_1^{j_t} & a_1^{i_1} & \ldots & a_1^{i_s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{j_1} & \ldots & a_1^{j_t} & a_1^{i_1} & \ldots & a_1^{i_s} \end{bmatrix}.$$

Pour appliquer la même permutation sur les lignes on multiplie à gauche la matrice obtenue par $\mathbf{P}^\top$:

$$\mathbf{P}^\top\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} a_{j_1}^{j_1} & \ldots & a_{j_1}^{j_t} & a_{j_1}^{i_1} & \ldots & a_{j_1}^{i_s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j_t}^{j_1} & \ldots & a_{j_t}^{j_t} & a_{j_t}^{i_1} & \ldots & a_{j_t}^{i_s} \\ a_{i_1}^{j_1} & \ldots & a_{i_1}^{j_t} & a_{i_1}^{i_1} & \ldots & a_{i_1}^{i_s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_s}^{j_1} & \ldots & a_{i_s}^{j_t} & a_{i_s}^{i_1} & \ldots & a_{i_s}^{i_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{j_1}^{j_1} & \ldots & a_{j_1}^{j_t} & a_{j_1}^{i_1} & \ldots & a_{j_1}^{i_s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j_t}^{j_1} & \ldots & a_{j_t}^{j_t} & a_{j_t}^{i_1} & \ldots & a_{j_t}^{i_s} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{i_1}^{i_1} & \ldots & a_{i_1}^{i_s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{i_s}^{i_1} & \ldots & a_{i_s}^{i_s} \end{bmatrix}.$$

Cette dernière matrice a bien la forme cherchée. Inversement, s'il existe une matrice de permutation $\mathbf{P}$, telle que

$$\mathbf{P}^\top\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

avec $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_t(\mathbb{R})$ et $\mathbf{D} \in \mathscr{M}_s(\mathbb{R})$, alors $\mathbf{P}$ est la matrice d'une permutation

$$\sigma : (1,\ldots,n) \longrightarrow (j_1,\ldots,j_t,i_1,\ldots,i_s),$$

telle que $\mathbf{A}_i^j = 0$, pour tous $i \in [\![i_1,,i_s]\!]$ et $j \in [\![j_1,j_t]\!]$. $\square$

III.2.2. Exemples.—

1. Une matrice dont tous les coefficients sont non nuls est irréductible.
2. Une matrice qui possède une ligne nulle est réductible.
3. Une matrice qui possède une colonne nulle est réductible.
4. Une matrice $\mathbf{A}$ est réductible si, et seulement si, sa transposée $\mathbf{A}^\top$ est réductible.

III.2.3. Exemple.— La matrice suivante de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

est irréductible si, et seulement si, $bc \neq 0$. En effet, dans ce cas les seules matrices de permutations sont

$$\mathbf{P}_{\mathrm{id}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{\tau_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

et on a

$$\mathbf{P}_{\mathrm{id}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_{\mathrm{id}} = \mathbf{A}, \qquad \mathbf{P}_{\tau_{12}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_{\tau_{12}} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

Ces deux matrices sont de la forme de la caractérisation de la proposition III.2, si et seulement si, $b = 0$ ou $c = 0$.

III.2.4. Exemple.— La matrice suivante est réductible :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En effet, on a :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\top} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

III.3 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe un entier $k \geqslant 1$, tel que la matrice $\mathbf{A}^k$ ne possède que des coefficients non nuls, alors la matrice $\mathbf{A}$ est irréductible.

Preuve. Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ soit réductible. Il existe alors une matrice de permutation $\mathbf{P}$, telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{\top},$$

où $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ sont deux matrices carrées. Par suite, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^k & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^k \end{bmatrix} \mathbf{P}^{\top}.$$

La matrice $\mathbf{A}^k$ est donc réductible et possède au moins un coefficient non nul. On montre ainsi, que s'il existe un entier $k \geqslant 1$, tel que la matrice $\mathbf{A}^k$ ne possède pas de coefficient nul, alors la matrice $\mathbf{A}$ est réductible. □

III.2.5. Exemple.— D'après la proposition III.3, la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

est irréductible, car

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

III.4 Proposition.— Si $\mathbf{A}$ est une matrice positive irréductible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(\mathbf{1}_n + \mathbf{A})^{n-1} > \mathbf{0}.$$

Preuve. D'après la proposition II.3, il suffit de montrer que, pour tout vecteur $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ non nul, on a

$$(\mathbf{1}_n + \mathbf{A})^{n-1}\mathbf{x} > \mathbf{0}.$$

Notons $n(\mathbf{y})$ le nombre de coefficients nuls d'un vecteur $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$. Pour montrer l'inégalité précédente, il suffit de montrer que

$$n((\mathbf{1}_n + \mathbf{A})\mathbf{y}) < n(\mathbf{y}),$$

pour tout vecteur positif non nul $\mathbf{y}$. On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe un vecteur positif $\mathbf{y}$, tel que $n((\mathbf{1}_n + \mathbf{A})\mathbf{y}) \geqslant n(\mathbf{y})$. Comme $\mathbf{A}\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, le cas $n(\mathbf{y} + \mathbf{A}\mathbf{y}) > n(\mathbf{y})$ est impossible. Reste le cas $n(\mathbf{y} + \mathbf{A}\mathbf{y}) = n(\mathbf{y})$. Quitte à permuter les coefficients, on peut supposer que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{y}_1 \in \mathbb{R}^{n-n(\mathbf{y})}$ strictement positif. La repartition des coefficients nuls étant la même dans le vecteur $(\mathbf{1}_n + \mathbf{A})\mathbf{y}$, on peut appliquer la même permutation à ce dernier vecteur et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{y}' \in \mathbb{R}^{n-n(\mathbf{y})}$ est strictement positif. En décomposant $\mathbf{A}$ en blocs, on a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{F} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

avec $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{n-n(\mathbf{y})}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{D} \in \mathscr{M}_{n(\mathbf{y})}(\mathbb{R})$. En particulier, $\mathbf{F}\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{y_1} > \mathbf{0}$, d'où $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ce qui est impossible puisque la matrice $\mathbf{A}$ est irréductible. Ainsi, $(\mathbf{1}_n + \mathbf{A})^{n-1}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, qui montre la proposition. $\square$

III.5 Lemme.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\mathbf{B} = (\mathbf{1}_n + \mathbf{A})^{n-1}$. Alors,

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(\mathbf{B}) = \{\ (1+\lambda)^{n-1} \ \mid\ \lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(\mathbf{A})\}.$$

En particulier, on a

$$\rho(\mathbf{B}) = (1 + \rho(\mathbf{A}))^{n-1}.$$

Preuve. Supposons que le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$, scindé dans $\mathbb{C}[X]$, soit

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (X-\lambda_1)^{h_1} \dots (X-\lambda_p)^{h_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. D'après le théorème de décomposition spectrale algébrique, la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice diagonale par blocs triangulaires supérieurs :

$$\begin{bmatrix}
\overset{h_1}{\boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1\end{matrix}}}\, h_1 & & & 0 \\
& \overset{h_2}{\boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2\end{matrix}}}\, h_2 & & \\
& & \ddots & \\
0 & & & \overset{h_p}{\boxed{\begin{matrix}\lambda_p & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p\end{matrix}}}\, h_p
\end{bmatrix}$$

Par suite, la matrice $\mathbf{B} = (\mathbf{1}_n + \mathbf{A})^{n-1}$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix}
\overset{h_1}{\boxed{\begin{matrix}(1+\lambda_1)^{n-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & (1+\lambda_1)^{n-1}\end{matrix}}}\, h_1 & 0 \\
0 & \overset{h_p}{\boxed{\begin{matrix}(1+\lambda_p)^{n-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & (1+\lambda_p)^{n-1}\end{matrix}}}\, h_p
\end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{B}$ est donc

$$p_{\mathbf{B}} = (-1)^n (X-(1+\lambda_1)^{n-1})^{h_1} \dots (X-(1+\lambda_p)^{n-1})^{h_p}.$$

Par suite,

$$\rho(\mathbf{B}) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathbf{A})} |1+\lambda|^{n-1} = (1+\rho(\mathbf{A}))^{n-1}.$$

□

III.6 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice positive irréductible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple $\mathbf{A}$.

Preuve. D'après la proposition III.4, la matrice $\mathbf{B} = (\mathbf{1}_n + \mathbf{A})^{n-1}$ est strictement positive. Donc, d'après le théorème de Perron II.13, $\rho(\mathbf{B})$ est une valeur propre simple de $\mathbf{B}$. D'après le lemme III.5, on a $\rho(\mathbf{B}) = (1 + \rho(\mathbf{A}))^{n-1}$ et l'ordre de multiplicité de $\rho(\mathbf{A})$ dans $\mathbf{A}$ est égal à l'ordre de multiplicité de $\rho(\mathbf{B})$ dans $\mathbf{B}$. On montre ainsi que $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple de la matrice $\mathbf{A}$. $\square$

III.7 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice positive irréductible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

i) la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$ possède un unique vecteur propre strictement positif $\mathbf{p}$, tel que $||\mathbf{p}||_1 = 1$,

ii) $\rho(\mathbf{A}) > 0$,

iii) les seuls vecteurs propres positifs de $\mathbf{A}$ sont les multiples positifs du vecteur $\mathbf{p}$.

Preuve. La matrice $\mathbf{A}$ est positive, donc d'après la proposition III.1, il existe un vecteur propre positif $\mathbf{x}$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$, soit $\mathbf{Ax} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{x}$. D'où $(\mathbf{1}_n + \mathbf{A})\mathbf{x} = (1 + \rho(\mathbf{A}))\mathbf{x}$. On en déduit que

$$\mathbf{Bx} = \rho(\mathbf{B})\mathbf{x},$$

avec $\mathbf{B} = (\mathbf{1}_n + \mathbf{A})^{n-1}$ et $\rho(\mathbf{B}) = (1 + \rho(\mathbf{A}))^{n-1}$. Comme la matrice $\mathbf{B}$ est strictement positive, d'après le théorème de Perron II.13, le vecteur $\mathbf{x}$ est un multiple positif du vecteur de Perron de $\mathbf{B}$, en particulier $\mathbf{x}$ est strictement positif. De plus, d'après la proposition III.6, $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple de $\mathbf{A}$, donc le sous-espace propre associé est de dimension 1. Par suite, en normalisant $\mathbf{x}$, on obtient l'unique vecteur propre $\mathbf{p}$ normalisé strictement positif associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$. On montre ainsi l'assertion **i)**.

Montrons **ii)**. On a $\rho(\mathbf{A}) > 0$, car sinon $\mathbf{Ap} = \mathbf{0}$. Ce qui est absurde, car d'après la proposition II.1, $\mathbf{A}$ étant positive et $\mathbf{p}$ strictement positif, on a $\mathbf{Ap} > \mathbf{0}$.

Pour montrer **iii)**, on procède de la même façon que dans la preuve de la proposition II.12. $\square$

III.2.6. Vecteur de Perron.— Pour une matrice positive et irréductible $\mathbf{A}$, l'unique vecteur propre strictement positif $\mathbf{p}$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$, tel que $||\mathbf{p}||_1 = 1$, est appelé le *vecteur de Perron* de $\mathbf{A}$.

III.2.7. Théorème de Perron-Frobenius.— Nous avons ainsi montré le théorème de Perron-Frobenius :

III.8 Théorème (Perron-Frobenius).— Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive irréductible. Alors,

i) $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$,

ii) $\rho(\mathbf{A}) > 0$,

iii) $\rho(\mathbf{A})$ est simple,

iv) il existe un vecteur propre $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, tel que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{x},$$

v) les seuls vecteurs propres positifs de $\mathbf{A}$ sont les multiples positifs du vecteur de Perron $\mathbf{p}$.

III.2.8. Exemple.— On considère la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{A}^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 3^{k-1} & 0 \\ 3^k & 0 & 3^k \\ 0 & 2.3^{(k-1)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{2k} = \begin{bmatrix} 3^{k-1} & 0 & 3^{k-1} \\ 0 & 3^k & 0 \\ 2.3^{(k-1)} & 0 & 2.3^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Il n'est donc pas possible de montrer l'irréductibilité de la matrice $\mathbf{A}$ en utilisant le critère de la proposition III.3. On montre que la matrice $\mathbf{A}$ est irréductible, en montrant qu'il n'existe pas de matrice de permutation $\mathbf{P}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}\mathbf{P}^\top$, où $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ sont deux matrices carrées ; il faut tester les 6 matrices de permuation de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Nous verrons plus loin un critère pour montrer l'irréductibilité des matrices.

Le spectre de $\mathbf{A}$ est $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{-3, 0, 3\}$, on a $\rho(\mathbf{A}) = 3$. Le sous-espace propre E_3 est de dimension 1, engendré par le vecteur $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Les sous-espaces E_{-3} et E_0 étant engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ respectivement, les seuls vecteurs propres positifs de $\mathbf{A}$ sont les multiples positifs de $\mathbf{v}$. Le vecteur de Perron de $\mathbf{A}$ est

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_1}\mathbf{v} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

§ 3 Les matrices primitives

L'irréductibilité d'une matrice positive ne garantit pas que son rayon spectral soit une valeur propre dominante. Ceci est illustré par l'exemple III.2.8. L'objectif de cette section est de comprendre les hypothèses sous lesquelles le rayon spectral d'une matrice positive irréductible est une valeur propre dominante.

III.3.1. Matrices primitives.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *primitive* si elle est positive, irréductible et possède une unique valeur propre de module maximal.

III.9 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice primitive de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

- **i)** $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$,
- **ii)** $\rho(\mathbf{A}) > 0$,
- **iii)** $\rho(\mathbf{A})$ est simple,
- **iv)** $\rho(\mathbf{A})$ est dominante,
- **v)** il existe un vecteur propre $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, tel que
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \rho(\mathbf{A})\mathbf{x}.$$
- **vi)** les seuls vecteurs propres positifs de $\mathbf{A}$ sont les multiples positifs du vecteur de Perron $\mathbf{p}$ de $\mathbf{A}$.

Preuve. Comme $\mathbf{A}$ est irréductible, c'est le théorème de Perron-Frobenius, III.8. De plus, la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$ est dominante, car $\mathbf{A}$ étant primitive, $\rho(\mathbf{A})$ est l'unique valeur propre de module maximal. □

III.10 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice primitive de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{\mathbf{A}}{\rho(\mathbf{A})}\right)^k = \Pi_{\rho(\mathbf{A})},$$

où $\Pi_{\rho(\mathbf{A})}$ est le projecteur spectral de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$.

Preuve. La matrice $\mathbf{A}$ est primitive, donc $\rho(\mathbf{A}) > 0$. Par suite, cf. proposition II.6, on a $\rho(\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A}) = 1$. Comme $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple dominante de $\mathbf{A}$, 1 est une valeur propre simple dominante de la matrice $\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A}$. Avec le même raisonnement qu'en II.2.11, on montrer qu'alors

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{\mathbf{A}}{\rho(\mathbf{A})}\right)^k = \Pi_1,$$

où Π_1 est le projecteur spectral de la matrice $\frac{1}{\rho(\mathbf{A})}\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 1, ou de façon équivalente, le projecteur spectral de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$. □

III.3.2. Calcul du projecteur $\Pi_{\rho(\mathbf{A})}$.— Étant donnée une matrice primitive $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on exprime le projecteur $\Pi_{\rho(\mathbf{A})}$ en terme de vecteurs de Perron.

Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\top$ ont le même polynôme caractéristique, on a donc $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}^\top)$. La matrice $\mathbf{A}$ étant positive et irréductible, il en est de même pour la matrice $\mathbf{A}^\top$. Par suite, $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple de $\mathbf{A}$ et $\rho(\mathbf{A}^\top)$ est une valeur propre simple de $\mathbf{A}^\top$. Notons $\mathbf{p}$ le vecteur de Perron de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{q}$ le vecteur de Perron de $\mathbf{A}^\top$. Montrons que

$$\Pi_{\rho(\mathbf{A})} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}.$$

Les vecteurs $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont de Perron, donc $\mathbf{q}^\top\mathbf{p}$ est non nul. De plus $\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}$ est un projecteur, car

$$\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}.$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{Im}(\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \rho(\mathbf{A})\mathbf{1}_n) = \mathrm{Vect}(\mathbf{p}),$$

car si $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}})$, alors il existe un vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{q}^\top\mathbf{x}}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}\mathbf{p}.$$

Les deux sous-espaces sont de même dimension égale à 1, on a donc $\mathrm{Im}(\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \rho(\mathbf{A})\mathbf{1}_n)$. De la même façon, on montre que $\mathrm{Ker}(\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}) = \mathrm{Im}(\mathbf{A} - \rho(\mathbf{A})\mathbf{1}_n)$. On montre ainsi que $\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}}$ est le projecteur spectral de la matrice $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $\rho(\mathbf{A})$.

Les vecteurs de Perron $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont strictement positifs, par suite :

III.11 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice primitive de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors le projecteur spectral $\Pi_{\rho(\mathbf{A})}$ est strictement positif.

On obtient un critère de primitivité des matrices.

III.12 Proposition.— Une matrice positive $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive, si et seulement si, il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $\mathbf{A}^m$ est strictement positive.

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une matrice positive, telle qu'il existe un entier $m > 0$ tel que $\mathbf{A}^m > \mathbf{0}$. D'après la proposition III.3, la matrice $\mathbf{A}$ est irréductible.

Montrons que $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre dominante de $\mathbf{A}$. Supposons que le spectre de $\mathbf{A}$ soit $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}^m$ sont toutes de la forme $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_p^m$. On a de plus, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$,

$$\mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}^{\mathbf{A}}(\lambda_i) = \mathrm{mult}_{\mathrm{alg}}^{\mathbf{A}^m}(\lambda_i^m).$$

D'après le théorème de Perron II.13, la matrice $\mathbf{A}^m$ possède une unique valeur propre de module maximal. Il en est donc de même pour $\mathbf{A}$. Ainsi $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre dominante de $\mathbf{A}$.

Inversement, soit $\mathbf{A}$ une matrice primitive. D'après la proposition III.10,

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{\mathbf{A}}{\rho(\mathbf{A})}\right)^k = \Pi_{\rho(\mathbf{A})}.$$

D'après la proposition III.11, le projecteur $\Pi_{\rho(\mathbf{A})}$ est strictement positif, il existe donc un entier $m \geqslant 1$ tel que $\left(\frac{\mathbf{A}}{\rho(\mathbf{A})}\right)^m > \mathbf{0}$. D'où $\mathbf{A}^m > \mathbf{0}$. $\square$

III.3.3. Exemple.— Calculer $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k$, où $\mathbf{A}$ est la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix},$$

où $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

La matrice $\mathbf{A}$ est strictement positive donc primitive. On calcule $\rho(\mathbf{A}) = 1$. On a

$$\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},$$

et $\rho(\mathbf{A}^\top) = \rho(\mathbf{A}) = 1$. Le vecteur de Perron de $\mathbf{A}$, est $\mathbf{p} = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$, le vecteur de Perron de $\mathbf{A}^\top$ est $\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. D'après la section III.3.2, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{A}^k = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\mathbf{p}} = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & b \\ a & a \end{bmatrix}.$$

§ 4 Irréductibilité et graphe d'une matrice

III.4.1. Graphes orientés.— Un *graphe (orienté fini)* $\mathscr{G}$ est la donnée d'un ensemble fini S de *sommets*, d'un ensemble fini A d'*arêtes* et de deux applications $s,t : A \longrightarrow S$ qui à toute arête associe respectivement sa *source* et son *but*.

Soit $k \geqslant 1$ un entier, un chemin de longueur k du sommet s au sommet t est une suite $(e_1, \ldots, e_k)$ d'arêtes, telles que

$$s(e_1) = s,\ \ t(e_i) = s(e_{i+1}),\ \ \text{pour tout } i \in [\![1,k-1]\!],\ \ t(e_k) = t.$$

Un graphe est dit *fortement connexe* si, pour tout couple de sommets (s,t), il existe un chemin de source s et but t.

III.4.2. Graphe d'une matrice.— À toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on associe un graphe appelé *graphe de la matrice* $\mathbf{A}$, noté $\mathscr{G}_{\mathbf{A}}$, qui possède n sommets, numérotés $1, 2 \ldots, n$, et ayant une arête de source i et but j lorsque $\mathbf{A}_i^j \neq 0$.

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ sont deux matrices telles qu'il existe une matrice de permutation $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{A}' = \mathbf{P}^\top\mathbf{A}\mathbf{P}$, alors les graphes associés $\mathscr{G}_{\mathbf{A}}$ et $\mathscr{G}_{\mathbf{A}'}$ sont les mêmes, à une renumérotation des sommets près, définie par la permutation $\mathbf{P}$.

En particulier le graphe $\mathscr{G}_{\mathbf{A}}$ est fortement connexe si, et seulement si, le graphe $\mathscr{G}_{\mathbf{A}'}$ est fortement connexe.

III.4.3. Exemples.— Les graphes des matrices suivantes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

sont respectivement

Le premier graphe n'est pas fortement connexe, car il n'existe pas de chemin du sommet 1 au sommet 2. Le deuxième graphe est fortement connexe.

III.4.4. Irréductibilité et forte connexité.— L'irréductibilité d'une matrice est liée à la forte connexité du graphe associé.

III.13 Théorème.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice positive de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice $\mathbf{A}$ est irréductible si, et seulement si, son graphe $\mathscr{G}_{\mathbf{A}}$ est fortement connexe.

Preuve. Montrons que le graphe d'une matrice réductible n'est pas fortement connexe. Soit $\mathbf{A}$ une matrice réductible, il existe une matrice de permutation $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{P}^\top\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{A}',$$

où $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_t(\mathbb{R})$ et $\mathbf{D} \in \mathscr{M}_{n-t}(\mathbb{R})$ sont des matrices carrées. Pour tout $i \in [\![t+1,n]\!]$ et $j \in [\![1,t]\!]$, il n'existe pas d'arête dans le graphe $\mathscr{G}_{\mathbf{A}'}$, de source i et de but j. Ainsi, le graphe $\mathscr{G}_{\mathbf{A}'}$ n'est pas fortement connexe, par suite, le graphe $\mathscr{G}_{\mathbf{A}}$ n'est pas fortement connexe. On a donc montré que si le graphe $\mathscr{G}_{\mathbf{A}}$ est fortement connexe, alors la matrice $\mathbf{A}$ est irréductible.

Inversement, supposons que le graphe $\mathscr{G}_{\mathbf{A}}$ ne soit pas fortement connexe. Notons $1,\ldots,n$ les sommets du graphe $\mathscr{G}_{\mathbf{A}}$. Il existe au moins un couple de sommets de $\mathscr{G}_{\mathbf{A}}$, tels qu'il n'existe pas de chemin de l'un vers l'autre. Notons i_1 et i_n ces deux sommets, en supposant qu'il n'existe pas de chemin de i_n vers i_1. Notons

$$S_1 = \{i_1, \ldots, i_t\}$$

l'ensemble des sommets du graphe $\mathscr{G}_\mathbf{A}$ tel qu'il n'existe pas de chemins de i_n vers ces sommets. Les autres sommets forment un ensemble que l'on note

$$S_2 = \{i_{t+1}, \ldots, i_{n-1}\}.$$

Pour tout $j \in S_1$ et tout $i \in S_2$, il n'existe pas de chemin de i vers j. Par construction, on a donc

$$\mathbf{A}_i^j = 0,$$

pour tout $i \in S_2$ et tout $j \in S_1$. Notons $\mathbf{P}$ la matrice de la permutation correspondant à la renumérotation des sommets ainsi définie

$$(1,2,\ldots,n) \longmapsto (i_1,\ldots,i_t,i_{t+1},\ldots,i_n).$$

La matrice $\mathbf{P}^\top\mathbf{AP}$ est donc de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_t(\mathbb{R})$ et $\mathbf{D} \in \mathscr{M}_{n-t}(\mathbb{R})$. Ainsi, la matrice $\mathbf{A}$ est réductible. $\square$

III.4.5. Exemples.— Reprenons les matrices de l'exemple III.4.3. Le graphe $\mathscr{G}_\mathbf{A}$ n'est pas fortement connexe, donc la matrice $\mathbf{A}$ est réductible.

Le graphe $\mathscr{G}_\mathbf{B}$ est fortement connexe, donc la matrice $\mathbf{B}$ est irréductible. Par ailleurs, il est évident qu'aucune puissance de $\mathbf{B}$ n'est strictement positive. La matrice $\mathbf{B}$ n'est donc pas primitive. Cet exemple montre qu'en général une matrice irréductible n'est pas primitive.

Le graphe de la matrice de l'exemple III.2.8 est fortement connexe, donc la matrice est irréductible.

§ 5 Marches aléatoires sur un graphe

Cette partie présente une application du théorème de Perron-Frobenius, III.8, à l'étude des chaînes de Markov.

III.5.1. Les chaînes de Markov.— Une *chaîne de Markov* est un processus aléatoire « sans mémoire », dans lequel la prédiction du futur à partir du présent ne dépend pas du passé. Formellement, on définit une *chaîne de Markov en temps discret*, comme une suite de variables aléatoires $\{X_k\}_{k=0}^\infty$ prenant leurs valeurs dans un même ensemble d'états, appelé l'*espace des états*, et vérifiant, pour tout entier k,

$$P(X_{k+1} = e \mid X_0, X_1, \ldots, X_k) = P(X_{k+1} = e \mid X_k),$$

où e est un état quelconque du processus. Autrement dit, l'état de l'événement à l'instant $k+1$ dépend uniquement de l'état de l'événement à l'instant k et non pas des états aux instants précédents.

III.5.2. Matrices stochastiques.— On appelle *matrice stochastique* une matrice carrée réelle, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et dont la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1. Précisément, une matrice $\mathbf{P}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}_i^j \geqslant 0$ et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_i^j = 1.$$

En d'autres termes, $\mathbf{P}$ est stochastique, si tous ses coefficients sont positifs et si $\mathbf{Pe} = \mathbf{e}$.

Par exemple, la matrice suivante est stochastique

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 1. — Montrer que si $\mathbf{P}$ est une matrice stochastique, alors $\mathbf{P}^k$ est stochastique, pour tout entier $k \geqslant 1$.

III.5.3. Matrice de transition.— Lorsque l'espace des états d'une chaîne de Markov est fini, en numérotant les états par les entiers $1,\ldots,n$, on peut représenter la chaîne de Markov par une matrice $\mathbf{P}(k)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, appelée *matrice de transition* de la chaîne de Markov, dont le coefficient $(\mathbf{P}(k))_i^j$ est défini par

$$\mathbf{P}(k)_i^j = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i),$$

exprimant la probabilité que le processus se trouve dans l'état j à l'instant $k+1$, alors qu'il était dans l'état i à l'instant k.

III.14 Proposition. — La matrice de transition $\mathbf{P}(k)$ d'une chaîne de Markov est stochastique positive.

Dans la suite, on s'intéressera à des processus dont la matrice de transition est constante, i.e., indépendante du temps. La probabilité $\mathbf{P}_i^j$ de passer de l'état i à l'état j est indépendante du temps. Notons, qu'inversement, toute matrice stochastique définit un chaîne de Markov.

Soit $\mathbf{P}$ une matrice stochastique dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. On note $\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ ses valeurs propres différentes de 1. On suppose que pour tout i, $|\lambda_i| < 1$ et que $\mathbf{P}$ est diagonalisable. Alors

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}^k = \Pi_1,$$

où Π_1 est le projecteur spectral de la matrice $\mathbf{P}$ associé à la valeur propre 1.

III.5.4. Distribution de probabilité.— Une *distribution de probabilité* est un vecteur positif

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

de $\mathbb{R}^n$, tel que

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1.$$

Autrement dit, c'est un vecteur positif $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{x}^\top \mathbf{e} = 1$. La distribution de probabilité à la k-ième étape du processus de la chaîne de Markov est le vecteur $\mathbf{p}(k)$ de $\mathbb{R}^n$, defini par

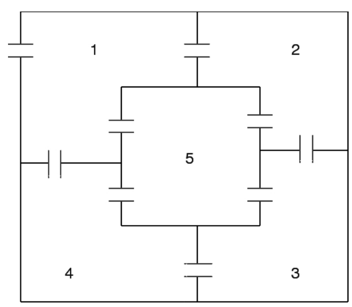
$$\mathbf{p}^\top(k) = [p_1(k) \ \dots \ p_n(k)],$$

où $p_i(k) = P(X_k = i)$ exprime la probabilité d'être dans l'état i, après la k-ième étape. La distribution de probabilité initiale est $\mathbf{p}(0)$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\mathbf{p}^\top(k) = \mathbf{p}^\top(0)\mathbf{P}^k.$$

Le coefficient $(\mathbf{P}^k)_i^j$ représente ainsi la probabilité de passer de l'état i à l'état j en exactement k étapes. Une distribution de probabilité est dite *invariante* si $\mathbf{p} = \mathbf{pP}$. Une distribution invariante représente l'état d'équilibre du système.

III.5.5. Au musée.— La situation suivante fournit un exemple de chaîne de Markov. Un visiteur se promène dans un musée. À chaque étape de sa visite, il change de salle en prenant une porte au hasard pour passer à la salle suivante. Passionné, notre visiteur va passer le restant de ses jours à poursuivre sa visite, sans plus jamais sortir du musée. Le plan du musée ci-dessous indique la position des salles et de leurs portes :



L'entrée du musée donne sur la salle 1, si bien que le vecteur de distribution initial est

$$\mathbf{p}^\top(0) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0].$$

Les déplacements du visiteur d'une salle à l'autre définissent une chaîne de Markov ; un état représente ici la présence du visiteur dans une salle.

Exercice 2. —

1. Écrire la matrice stochastique $\mathbf{P}$ de cette chaîne de Markov.
2. Montrer que le coefficient $(\mathbf{P}^k)_i^j$ représente la probabilité de passer de la salle i à la salle j en exactement k étapes.

Pour $i = 1 \ldots 5$, notons $p_i(k)$ la probabilité que le visiteur se trouve dans la i-ème salle après l'étape k. Soit

$$\mathbf{p}^\top(k) = [p_1(k) \ \ldots \ p_5(k)]$$

la distribution de probabilité à l'instant k.

Exercice 3. —

1. Calculer la probabilité que le visiteur se trouve dans la salle 3 en exactement 1, 2, 3 et 4 étapes.
2. Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{P}$. La matrice $\mathbf{P}$ est-elle diagonalisable ?
3. Calculer les projecteurs spectraux de $\mathbf{P}$.
4. Exprimer $\mathbf{P}$ en fonction des projecteurs spectraux. En déduire la valeur de $\mathbf{p}(k)$ en fonction de $\mathbf{p}(0)$ et des projecteurs spectraux.
5. Calculer la probabilité que le visiteur se trouve dans la salle 3 à la k-ème étape avec la distribution initiale $\mathbf{p}^\top(0) = [1\,0\,0\,0\,0]$.
6. Calculer $\mathbf{p}(10)$, $\mathbf{p}(20)$ avec la distribution initiale $\mathbf{p}^\top(0) = [1\,0\,0\,0\,0]$. Qu'observez-vous ?
7. Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{p}^\top(k)$ avec la distribution initiale $\mathbf{p}^\top(0) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]$ en utilisant la décomposition spectrale de $\mathbf{P}$.

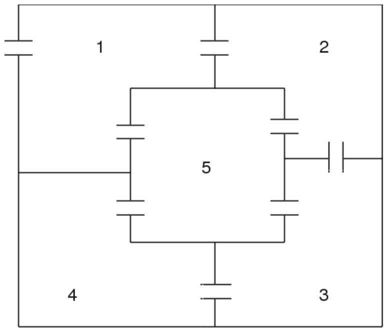
Si $\mathbf{q} = [q_1\, q_2\, q_3\, q_4\, q_5]$ désigne le vecteur limite. On peut interpréter cette *distribution de probabilité limite* en disant qu'à terme le visiteur aura passé en proportion q_i de son temps dans la salle i.

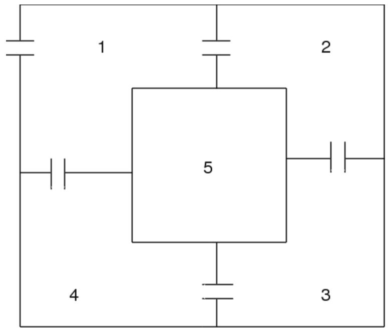
Exercice 4. — Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{p}^\top(k)$ avec la distribution initiale

$$\mathbf{p}^\top(0) = [1/5\ \ 1/5\ \ 1/5\ \ 1/5\ \ 1/5].$$

C'est la distribution que l'on peut considérer si le visiteur débute sa visite en choisissant au hasard l'une des cinq salles.

Exercice 5. — Dans ce qui suit, le visiteur entre toujours par la porte de la salle 1, mais quelques modifications ont été apportées. Dans le premier cas, la porte qui relie les salles 1 et 4 a été bouchée. Dans le second cas, la salle 5 a été condamnée, sa visite est impossible. Les plans correspondant à ces deux cas sont respectivement





Dans chaque cas, calculer la distribution de probabilité limite.

III.5.6. Chaînes de Markov irréductible.— Une chaîne de Markov est dite *irréductible* (resp. *réductible*), si sa matrice de transition est irréductible (resp. *réductible*).

III.15 Proposition. — Soit $\mathbf{P}$ une matrice stochastique, positive et irréductible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

i) $\rho(\mathbf{P}) = 1$,

ii) le vecteur de Perron de $\mathbf{P}$ est

$$\mathbf{p} = \frac{1}{n}\mathbf{e}.$$

Preuve. La matrice $\mathbf{P}$ est stochastique, donc le vecteur $\mathbf{e}$, dont tous les coefficients sont égaux à 1, est vecteur propre de $\mathbf{P}$, on a $\mathbf{Pe} = \mathbf{e}$. La matrice $\mathbf{P}$ étant positive et irréductible, d'après le théorème de Perron-Frobenius III.8, le vecteur $\mathbf{e}$ étant positif, il est multiple positif du vecteur de Perron $\mathbf{p}$ de $\mathbf{P}$. Comme $\mathbf{p}$ est unitaire, on a nécessairement $\mathbf{p} = \frac{1}{n}\mathbf{e}$. De $\rho(\mathbf{P})\mathbf{p} = \mathbf{Pp}$, on déduit donc que $\rho(\mathbf{P})\mathbf{e} = \mathbf{e}$, d'où $\rho(\mathbf{P}) = 1$. □

III.16 Proposition. — Soit $\mathbf{P}$ une matrice stochastique et primitive. Alors, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{P}^k$ existe et

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}^k = \mathbf{eq}^\top,$$

où $\mathbf{q}$ est le vecteur de Perron de $\mathbf{P}^\top$.

Preuve. Si la matrice $\mathbf{P}$ est primitive, d'après le théorème de Perron-Frobenius III.8, $\rho(\mathbf{P}) = 1$ est une valeur propre simple dominante de $\mathbf{P}$. Donc, la suite $(\mathbf{P}^k)_k$ converge et

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}^k = \Pi_1$$

où Π_1 est le projecteur spectral de $\mathbf{P}$ associé à la valeur propre 1. Le fait que $\Pi_1 = \mathbf{e}\mathbf{q}^\top$, où $\mathbf{q}$ est un vecteur de Perron de $\mathbf{P}^\top$ est une conséquence immédiate de la section III.3.2 :

$$\Pi_1 = \frac{\frac{1}{n}\mathbf{e}\mathbf{q}^\top}{\mathbf{q}^\top\frac{1}{n}\mathbf{e}} = \mathbf{e}\mathbf{q}^\top.$$

□

III.17 Proposition. — Une matrice stochastique primitive $\mathbf{P}$ admet une unique distribution de probabilité invariante.

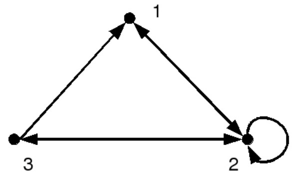
Preuve. Si la matrice $\mathbf{P}$ est primitive, alors $\mathbf{P}^\top$ est primitive. La valeur propre $\rho(\mathbf{P}^\top) = 1$ est simple et dominante. Une distribution de probabilité invariante de $\mathbf{P}$ est un vecteur unitaire $\mathbf{p}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, tel que $\mathbf{p} = \mathbf{p}\mathbf{P}$, ou de façon équivalente $\mathbf{p}^\top = \mathbf{P}^\top\mathbf{p}^\top$. Le vecteur $\mathbf{p}^\top$ est donc le vecteur de Perron de la matrice $\mathbf{P}^\top$. La distribution de probabilité invariante de la matrice $\mathbf{P}$ est ainsi unique. □

III.5.7. Marche aléatoire sur un graphe orienté.— Étant donné un graphe orienté $\mathscr{G}$, on peut définir une chaîne de Markov à partir d'une *marche aléatoire* sur le graphe $\mathscr{G}$. La matrice de transition de cette marche aléatoire est la matrice stochastique $\mathbf{P}$ définie par

$$\mathbf{P}_i^j = \frac{n_{i,j}}{n_i},$$

où $n_{i,j}$ est le nombre d'arêtes de source i et but j et n_i le nombre total d'arêtes de source i.

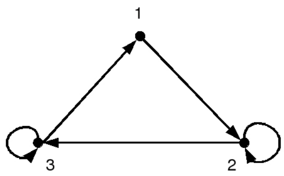
III.5.8. Exemple.— Considérons le graphe $\mathscr{G}$ suivant

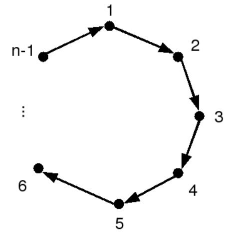


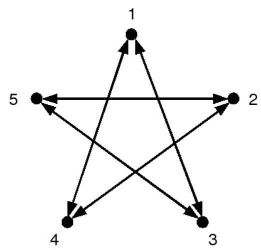
La matrice stochastique d'une marche aléatoire sur $\mathscr{G}$ est

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

III.5.9. Exemples.— On considère les marches aléatoires sur les graphes suivants







Les matrices de transition sont respectivement

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}),$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrices $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_3$ sont primitives, car $\mathbf{P}_1^3 > \mathbf{0}$ et $\mathbf{P}_3^4 > \mathbf{0}$. La matrice $\mathbf{P}_1$ (resp. $\mathbf{P}_3$) admet donc une unique distribution de probabilité $\mathbf{p_1}$ (resp. $\mathbf{p_2}$), définie par

$$\mathbf{p}_1^\top = [1/5 \;\; 2/5 \;\; 2/5], \qquad (\text{resp. } \; \mathbf{p}_3^\top = [1/5 \;\; 1/5 \;\; 1/5 \;\; 1/5 \;\; 1/5]).$$

La suite $(\mathbf{P}_1^k)_k$ (resp. $(\mathbf{P}_3^k)_k$) converge vers

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (\text{resp. } \frac{1}{5}\mathbf{E}).$$

La matrice $\mathbf{P}_2$ n'est pas primitive. Elle est cependant irréductible car son graphe associé est fortement connexe. La valeur propre $\rho(\mathbf{P}_2) = 1$ n'est pas dominante, car les valeurs propres de $\mathbf{P}_2$ sont les racines $n-1$-ième de l'unité. D'après la première partie du théorème de Perron II.13, la matrice $\mathbf{P}_2$ admet une unique distribution de probabilité invariante :

$$\mathbf{p}_2^\top = [1/n \;\; \ldots \;\; 1/n].$$

La suite $(\mathbf{P}_2^k)_k$ ne converge pas.

§ 6 Recherche documentaire, l'exemple du PageRank

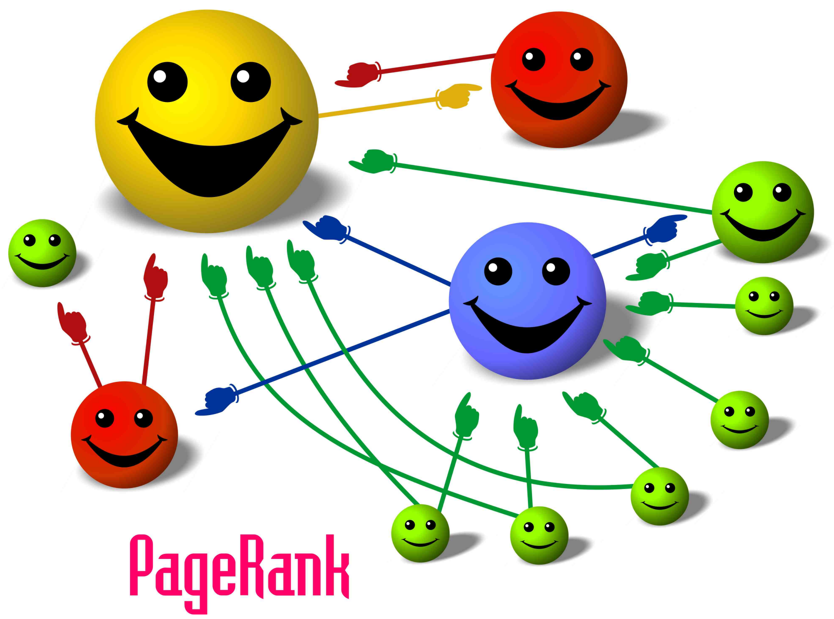


FIGURE III.1.: Le PageRank selon Felipe Micaroni Lall

En 1998, Serge Brin et Larry Page, deux doctorants en informatique de l'Université de Stanford et fondateurs de la firme Google, font une contribution importante au domaine de la recherche d'information sur le web (Web information retrieval) en développant l'algorithme du PageRank qui évalue l'importance d'une page relativement à la topologie du graphe du web et indépendamment des requêtes de l'utilisateur. L'algorithme de classement PageRank est à la base du moteur de recherche Google qui calcule une mesure quantitative de la popularité des pages du Web.

Le PageRank détermine l'importance d'une page web P en fonction de l'importance des pages web qui possèdent un lien vers la page P. Cette idée est ancienne et a été utilisée dans différents contexte avant son application au classement des pages du web. En particulier, des méthodes similaires ont été introduites dans le domaine de l'extraction de données, en biblométrie, sociométrie et économétrie.

III.6.1. Formulation du PageRank.— Le principe de base du PageRank est d'attribuer à chaque page un *score* proportionnel au nombre de fois que passerait par cette page un utilisateur parcourant le graphe du Web en cliquant aléatoirement sur les liens contenus sur chaque page. Ainsi, une page possèdera un PageRank d'autant plus important que sera grande la somme des PageRanks des pages qui pointent vers elle :

une page est importante si elle est pointée par d'autres pages importantes.

Au lieu de parler de chaînes de Markov, Brin et Page parlent de « *surfer aléatoire* », mais leur approche correspond à celle d'une marche aléatoire sur le graphe du Web, le graphe orienté dont les sommets représentent les pages web et les arêtes les hyperliens. Le surfer aléatoire suit les liens au hasard, c'est-à-dire, lorsque il arrive sur une page web contenant plusieurs liens, il va choisir l'un de ces liens au hasard. Il poursuit sa visite indéfiniment. À terme, le temps qu'il va passer sur une page sera proportionnel à l'importance de la page. S'il passe beaucoup de temps sur un page, c'est que la structure du graphe lui aura donné d'autant plus de chance de tomber sur cette page. En d'autres termes, le PageRank est la probabilité stationnaire d'une chaîne de Markov, c'est-à-dire le vecteur de Perron-Frobenius de la matrice d'adjacence du graphe du Web, appelée la *matrice Google*.

La taille (gigantesque) de ce graphe et son évolution dynamique (modifications de pages et d'hyperliens, connexion ou déconnexion de serveurs web) rendent cependant impossible un calcul direct de ce vecteur propre : des algorithmes d'approximation sont utilisés pour calculer le PageRank.

III.6.2. Formalisation du PageRank.— Trois facteurs déterminent le PageRank d'une page P :

- le nombre de liens qui pointent vers la page P,
- le nombre liens contenus par les pages qui ont un lien vers la page P,
- le PageRank des pages qui ont un lien vers la page P.

Notons $r(P_i)$ le PageRank d'une page web P_i, il est défini comme la somme pondérée des PageRank des pages web qui ont un lien vers la page P_i :

$$r(P_i) = \sum_{P_j \in \mathscr{B}_{P_i}} \frac{r(P_j)}{|P_j|},$$

où $\mathscr{B}_{P_i}$ est l'ensemble des pages web qui ont un lien vers P_i et $|P_j|$ est le nombre de liens sortants de P_j. Dans cette formule, le PageRank $r(P_j)$ est pondéré par le nombre de recommandations $|P_j|$ faites par la page P_j.

III.6.3. Calcul itératif du PageRank.— Pour calculer le PageRank $r(P_i)$ avec la formule précédente, il faut connaître les PageRank $r(P_j)$, pour toutes les pages P_j ayant un lien vers P_i. Brin et Page utilisent une méthode itérative de calcul. Au départ, ils supposent que toutes les pages ont le même PageRank, pour toute page P_i,

$$r(P_i) = \frac{1}{n},$$

où n est le nombre total de pages du web indexées par le moteur de recherche. Le PageRank est alors calculé itérativement, en notant $r_k(P_i)$ la valeur du PageRank de la page P_i à la k-ième itération, on a, pour toute page P_i,

$$\left| \begin{array}{ll} r_0(P_i) & = \frac{1}{n} \\ r_{k+1}(P_i) & = \displaystyle\sum_{P_j \in \mathscr{B}_{P_i}} \frac{r_k(P_j)}{|P_j|}, \end{array} \right.$$

III.6.4. Formulation matricielle.— On peut donner une formulation matricielle de l'équation du PageRank basée sur la structure de graphe du web. Soit n le nombre de pages webs indexées par le moteur de recherche. La *matrice des hyperliens* est la matrice $\mathbf{H}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$,

$$\mathbf{H}_i^j = \begin{cases} \frac{1}{|P_i|}, & \text{s'il existe un lien de la page } P_i \text{ à la page } P_j,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Les coefficients non nuls de la ligne i correspondent aux liens sortant de la page P_i.

Notons

$$\pi_k = \begin{bmatrix} r_k(P_0)\\ \vdots \\ r_k(P_n)\end{bmatrix}$$

le *vecteur de PageRank* de la k-ième itération. Pour tout entier $k \geqslant 0$, la formule

$$r_{k+1}(P_i) = \sum_{P_j \in \mathscr{B}_{P_i}} \frac{r_k(P_j)}{|P_j|}.$$

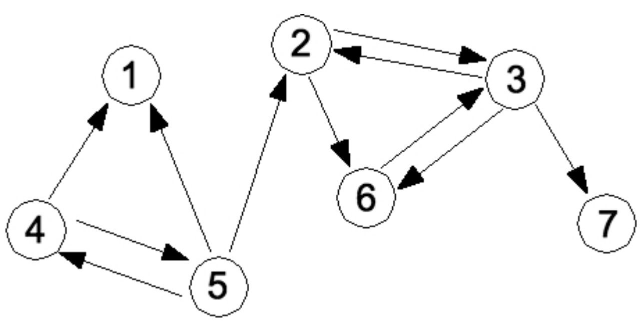
s'écrit

$$[r_{k+1}(P_0)\ \dots\ r_{k+1}(P_i)\ \dots\ r_{k+1}(P_n)] = [r_k(P_0)\ \dots\ r_k(P_i)\ \dots\ r_k(P_n)]\mathbf{H}.$$

soit

$$\pi_{k+1}^\top = \pi_k^\top \mathbf{H}.$$

III.6.5. Exemple.— On considère un ensemble de 7 pages reliées par les liens indiquées par la figure suivante



La matrice des hyperliens de ce graphe est

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III.6.6. Premiers ajustements du modèle : ajustement stochastique.— Le premier problème rencontré par le surfeur aléatoire est la présence de *nœuds pendants* (dangling nodes), avec les pages qui ne possèdent pas de lien vers d'autres pages. Il existe de nombreux nœuds pendants dans le graphe du Web, tels que par exemple les fichiers (image, pdf, ...). Dans la matrice $\mathbf{H}$, les nœuds pendants correspondent aux lignes ne contenant que des coefficients nuls. Sans correction du modèle, ces pages peuvent retenir sur elles indéfiniment le surfer aléatoire.

Dans le graphe de l'exemple III.6.5, les pages P_1 et P_7 ne possèdent pas de lien sortant. Ceci se traduit par le fait que dans la matrice des hyperliens $\mathbf{H}$, la première et dernière ligne ne possèdent que des coefficients nuls.

Pour résoudre ce problème, Brin et Page font alors l'ajustement stochastique suivant : le surfer aléatoire qui rentre sur une page qui ne possède pas de lien sortant va poursuivre sa visite sur une autre page du web choisie au hasard. On remplace alors la ligne nulle $\mathbf{0}^\top$ associée à une telle page dans la matrice des hyperliens, par une distribution de probabilités uniforme :

$$\frac{1}{n}\mathbf{e}^\top = [\frac{1}{n}\ \frac{1}{n}\ \cdots\ \frac{1}{n}].$$

On pose

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} + \mathbf{a}(\frac{1}{n}\mathbf{e}^\top),$$

où $\mathbf{a}$ est le vecteur dont le i-ième coefficient est égal à 1 si P_i est une page sans lien sortant, et égal à 0 sinon. Notons que la matrice $\mathbf{a}(\frac{1}{n}\mathbf{e}^\top)$ est de rang 1.

Plus généralement, il est possible d'utiliser une autre distribution de probabilités pour faire échapper le surfer aléatoire d'un nœud pendant. En considérant la matrice

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} + \mathbf{a}\mathbf{u},$$

où $\mathbf{u}$ est un vecteur tel que $\|\mathbf{u}\|_1 = 1$.

III.6.7. Exemple.— La matrice $\mathbf{H}$ de l'exemple III.6.5 devient alors

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

III.6.8. Ajustement de primitivité.— Avec l'ajustement permettant de résoudre le problème des nœuds pendants, la matrice **S** devient stochastique ; elle correspond à la matrice de la chaîne de Markov définie par la marche aléatoire du surfer. En particulier, la matrice **S** admet donc 1 comme valeur propre et **e** comme vecteur propre associé.

Le simple fait que **S** soit stochastique ne suffit pas pour assurer la convergence de la suite (π_k). C'est le deuxième problème à résoudre dans cette modélisation : lorsque le surfer aléatoire entre dans une partie du graphe, qui est fortement connexe, mais sans lien sortant en dehors de cette partie. Autrement dit, lorsque la matrice du graphe n'est pas irréductible.

Brin et Page proposent un deuxième ajustement permettant d'obtenir une matrice stochastique et irréductible. L'ajustement se fait de la façon suivante. Le surfer aléatoire abandonne à certains moments sa visite via les hyperliens en saisissant une url valide au hasard dans le navigateur. Le surfer se *téléporte* ainsi sur une page au hasard du Web qui peut ne pas être liée à la page sur laquelle il se trouve. Ceci se modélise de la façon suivante :

$$\mathbf{G} = \alpha\mathbf{S} + (1-\alpha)\frac{1}{n}\mathbf{e}\mathbf{e}^\top,$$

où le paramètre α est un réel compris entre 0 et 1. La matrice **G** est appelée la *matrice de Google*. Le paramètre α contrôle la proportion du temps pendant lequel le surfer aléatoire va suivre les liens hypertextes. Par exemple, si $\alpha = 0.6$, alors 60% des fois, le surfer va suivre une page en suivant un lien au hasard et 40% des fois il va se téléporter au hasard sur une page du web. La matrice

$$\mathbf{E} = \frac{1}{n}\mathbf{e}\mathbf{e}^\top$$

est appelée la *matrice de téléportation*.

Il est possible d'utiliser une matrice de téléportation personalisée $\mathbf{E} = \mathbf{eu}$, où **u** est un vecteur de *personalisation* préjugeant favorable des pages relatives à certains thèmes.

Les concepteurs du modèle suggèrent de fixer le paramètre α à la valeur $\alpha = 0.85$.

III.18 Proposition (Propriétés de la matrice Google).— La matrice Google **G** est

i) *stochastique*,

ii) *irréductible*, car chaque page est reliée à une autre page,

iii) *primitive*, car il existe un entier m, tel que $\mathbf{G}^m > \mathbf{0}$.

III.6.9. Problème du PageRank.— Le problème du PageRank consiste à trouver un vecteur π vérifiant

$$\left| \begin{array}{ll} \pi^\top & = \pi^\top \mathbf{G} \\ \pi^\top \mathbf{e} & = 1 \end{array} \right.$$

Comme la matrice $\mathbf{G}$ est stochastique, la première équation admet toujours une solution, il existe donc au moins un vecteur de PageRank. La matrice $\mathbf{G}$ est positive et irréductible, donc d'après le théorème de Perron-Frobenius III.8, le vecteur de PageRank est unique, c'est le vecteur de Perron de la matrice $\mathbf{G}^\top$. On a

III.19 Théorème.— Il existe un unique vecteur positif π limite de la suite

$$\pi_{k+1}^\top = \pi_k^\top \mathbf{G}.$$

De plus, ce vecteur peut être calculé en utilisant la méthode des puissances itérées.

III.6.10. La méthode des puissances itérées.— Le dernier problème à résoudre est celui du calcul effectif du vecteur PageRank. Pour cela, est utilisée la méthode des puissances itérées, qui est une méthode itérative numérique introduite par von Mises et Pollaczek-Geiringer pour calculer la valeur propre dominante d'une matrice et un vecteur propre associé.

Considérons une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (que l'on suppose diagonalisable) dont les valeurs propres, calculées dans $\mathbb{C}$, vérifient

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|.$$

Si x_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui ne soit pas orthogonal au sous-espace propre $E_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)$, alors la suite $(x_k)_k$ de $\mathbb{R}^n$, définie par

$$x_{k+1} = \frac{1}{||\mathbf{A}x_k||}\mathbf{A}x_k,$$

converge vers un vecteur propre x de $\mathbb{R}^n$, associé à la valeur propre dominante λ_1. De plus, la suite

$$v_k = x_{k+1}^\top x_k,$$

converge vers la valeur propre λ_1.

```
sage: n =10
sage: A = random_matrix(RDF,n);
sage: A = A*(A.transpose())
sage: # A est alors symétrique donc diagonalisable
sage: x0 = vector(RDF,[1 for i in range(0,n)])
```

```
sage: x = x0
....: for k in range(0,100):
....:     y = A*x
....:     z = 1/y.norm()*y
....:     lam = z*y
....:     s = (x-z).norm()
....:     print k, "\ts=", s, "\tlambda=", lam
....:     if s < 1.e-5:
....:         print z
....:         break
....:     x = z
0       s= 2.55617316187        lambda= 5.21414168329
1       s= 0.453212001909       lambda= 3.72208309541
2       s= 0.357184657715       lambda= 5.14024921218
3       s= 0.312010105108       lambda= 6.51554249234
4       s= 0.21716030309        lambda= 7.53984582843
5       s= 0.137207397706       lambda= 8.03377258374
6       s= 0.0897377497424      lambda= 8.2422670389
...
...
49      s= 8.40178900006e-06    lambda= 8.47902476543
(-0.475762099734, 0.161213866868, 0.641234227458, 0.363296261128,
-0.294002970319, -0.295170588207, 0.0408181253164, -0.151695435379,
0.0403420937886, 0.0680181892903)
sage: A.eigenvalues()
[8.47902476828, 6.87137133371, 4.66150363665, 3.61986608321,
2.2180921718, 1.83030160184, 0.023788308412, 0.132637233436,
0.851974838839, 1.04820065235]
```

III.6.12. Exemple.— Par exemple, avec la matrice **H** de l'exemple III.6.7 et $\alpha = 0.6$, on a

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{5}{14} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{5}{14} & \frac{2}{35} \\ \frac{2}{35} & \frac{9}{35} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{9}{35} & \frac{9}{35} \\ \frac{5}{14} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{5}{14} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{9}{35} & \frac{9}{35} & \frac{2}{35} & \frac{9}{35} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{23}{35} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Le vecteur initial est

$$\pi_0^\top = \begin{bmatrix} 0.14286 & 0.14286 & 0.14286 & 0.14286 & 0.14286 & 0.14286 & 0.14286 \end{bmatrix}$$

On applique la méthode des puissances itérées :

```
sage: x = x0
....: for k in range(0,100):
....:     y = G*x
....:     z = 1/y.norm(1)*y
....:     lam = z*y
....:     s = (x-z).norm(1)
....:     print k, "\ts=", s, "\tlambda=", lam
....:     if s < 1.e-5:
....:         print z
....:         break
....:     x = z
0       s= 0.175510204082       lambda= 0.150087463557
1       s= 0.0654227405248      lambda= 0.151078622003
2       s= 0.0222307371928      lambda= 0.152795839411
3       s= 0.00691854584399     lambda= 0.153043327307
```

```
4       s= 0.00222345723296      lambda= 0.15320790217
5       s= 0.000697394666702     lambda= 0.153248512004
6       s= 0.000216815702606     lambda= 0.153261865454
7       s= 7.03158845077e-05     lambda= 0.153267185812
8       s= 2.35229654938e-05     lambda= 0.153268390455
9       s= 7.57424362428e-06     lambda= 0.153268972576
10      s= 2.48438579022e-06     lambda= 0.153269103571
11      s= 7.85803567105e-07     lambda= 0.15326916099
12      s= 2.5837539e-07         lambda= 0.153269176376
13      s= 8.21200262235e-08     lambda= 0.153269181899
14      s= 2.68341306398e-08     lambda= 0.153269183658
15      s= 8.7279090899e-09      lambda= 0.153269184207
16      s= 2.80503101302e-09     lambda= 0.153269184397
17      s= 9.20731935139e-10     lambda= 0.153269184455
18      s= 2.95198601674e-10     lambda= 0.153269184475
19      s= 9.66428048699e-11     lambda= 0.153269184481
(0.131047488439, 0.145379735984, 0.222869878268, 0.100805760335,
0.109206240363, 0.167152408703, 0.123538487909) 0.391496084886
```

Le vecteur stationnaire de la suite $(\pi_k)_k$ est

$$\pi = \left[\begin{array}{ccccccc} 0.13105 & 0.14538 & 0.22287 & 0.10081 & 0.10921 & 0.16715 & 0.12354 \end{array}\right]$$

Par exemple, le surfer aléatoire passe $13,105\%$ du temps sur la page P_1. Le PageRank des pages de ce mini Web est

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
4	3	1	7	6	2	5

Ainsi, la page la plus populaire est la page P_3, la page la moins populaire est la page P_4.

III.6.13. Nani gigantum humeris insidentes.— Cette métaphore (des nains sur des épaules de géants) de Bernard de Chartres, XIIe siècle, souligne l'importance pour tout homme d'appuyer son ambition intellectuelle sur les travaux des grands penseurs du passé. La méthode de PageRank du moteur de recherche Google développée par Brin et Page utilise des résultats mathématiques du début du XXe siècle :

– la théorie des chaînes de Markov, 1906,
– le théorème de Perron, 1907,
– le théorème de Perron-Frobenius, 1912,
– la méthode des puissances itérées, von Mises and Pollaczek- Geiringer, 1929.

Par ailleurs, la problématique de la recherche d'information abordée avec des méthodes similaires à celle du PageRank est apparue dans d'autres contextes que celui du web, comme en particulier

– l'économétrie, pour l'analyse d'échanges interindustriels, Leontief 1941,
– la sociométrie pour l'analyse quantitative des relations sociales et réseaux sociaux, Seeley 1949, Wei Sport ranking, 1952, Katz, 1953,
– en bibliométrie pour l'analyse quantitative des processus de publication, basée sur des indicateurs d'influence de revues et d'articles de recherche (une revue est influente si elle est citée par des revues influentes ...), Pinski et Narin, 1976.

Enfin, notons qu'il existe d'autres algorithmes d'indexation du web, comme l'algorithme HITS (Hypertext Induced Topic Search) développé par Kleinberg en 1998. Les algorithmes PageRank et HITS sont similaires mais développés de façon indépendantes.

On renvoie le lecteur au livre de Amy Langville et Carl Meyer, *Google's PageRank and Beyond : The Science of Search Engine Rankings* pour un exposé plus complet sur les méthodes d'algèbre linéaire sous-jacentes aux algorithmes des moteurs de recherche du Web.

Exercice 6. — Calculer le vecteur PageRank du graphe de la figure III.1.