

Sujet de thèse

MÉTHODES DE RÉÉCRITURE EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

Présentations cohérentes de la 2-catégorie des bimodules de Bott-Samelson.

Encadrement.

- Stéphane Gaussent, Professeur à l'Université Jean Monnet Saint-Étienne, Institut Camille Jordan,
- Philippe Malbos, Maître de conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan.

Contexte. La thèse se déroulera à l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne, au sein de l'Institut Camille Jordan, UMR 5208 du CNRS.

Résumé du sujet de thèse. L'objectif est d'étudier la catégorie des bimodules de Soergel par des méthodes de réécriture de dimension supérieure développées dans [GM09] et [GM12]. Cette catégorie s'exprime comme l'enveloppe de Karoubi de la catégorie monoïdale des bimodules de Bott-Samelson, dont une présentation par générateurs et relations est donnée par Elias et Williamson dans [EW13]. Il s'agira, d'une part, de développer des méthodes de réécriture pour les présentations de catégories monoïdales, d'autre part, d'obtenir des présentations convergentes, i.e., terminantes et confluentes, de la catégorie des bimodules de Bott-Samelson afin de décrire les propriétés algébriques et homotopiques de la catégorie de Soergel.

Description détaillée. Soit $W = \langle s \in S \mid (st)^{m_{st}} = 1 \rangle$ un groupe de Coxeter finiment engendré avec $m_{st} \in \mathbb{N}_{\geq 1} \sqcup \{\infty\}$ et $m_{ss} = 1$. Par exemple, le groupe symétrique \mathfrak{S}_n est un groupe de Coxeter en prenant pour S l'ensemble des transpositions élémentaires. L'algèbre d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(W, S)$ est une déformation de l'algèbre du groupe W (voir par exemple le livre de Geck et Pfeiffer [GP00]).

Soergel a introduit une catégorie monoïdale $\mathbb{S}\text{Bim}$ dont les objets sont certains bimodules gradués sur l'algèbre R des fonctions régulières d'une représentation bien choisie de W , [Soe07]. Il a montré que le groupe de Grothendieck scindé de $\mathbb{S}\text{Bim}$ est isomorphe à $\mathcal{H}(W, S)$, autrement dit, $\mathbb{S}\text{Bim}$ est une catégorification de l'algèbre $\mathcal{H}(W, S)$. Pour décrire cette catégorie, il suffit de ne considérer que les bimodules de Bott-Samelson. C'est-à-dire, des bimodules de la forme $B_{s_1} \otimes_R \cdots \otimes_R B_{s_k}$, où (s_1, \dots, s_k) est une suite d'éléments de S et $B_s = R \otimes_{R^s} R(1)$.

Inspirés par les travaux de Soergel, Libedinsky [Lib08] puis Elias et Williamson ont étudié la structure des morphismes entre deux bimodules de Bott-Samelson. Ces derniers ont obtenu une présentation de la catégorie monoïdale $\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}$ des bimodules de Bott-Samelson par générateurs et relations, [EW13]. Cette présentation est exprimée en termes de diagrammes de cordes qui constituent un calcul graphique décrivant les opérations dans une catégorie monoïdale. Les objets de la catégorie sont vus comme des cordes et un morphisme comme un nœud reliant la corde source à la corde but. La structure de la catégorie monoïdale peut être décrite géométriquement grâce à cette interprétation, cf. [Lau10].

Une autre interprétation consiste à voir une catégorie monoïdale comme une 2-catégorie avec un seul objet. Il existe une description « graphique » des 2-catégories en termes de 3-polygraphes, introduite par Burroni, [Bur93], et Street, [Str87], exprimant les relations dans la 2-catégorie avec des 3-cellules globulaires. Les présentations par polygraphes sont duales des présentations par diagrammes de cordes. L'interprétation polygraphique permet d'appliquer des méthodes de réécriture de dimension supérieure pour exprimer les syzygys de la présentation.

L'objectif de la thèse est double ; il s'agit, d'une part, de développer des méthodes de réécriture pour les présentations de catégories monoïdales, d'autre part, d'étudier les propriétés algébriques et homotopiques de la catégorie des bimodules de Bott-Samelson en utilisant les présentations

cohérentes polygraphiques. En particulier, on cherchera à calculer des descriptions explicites des syzygys de ces présentations et leur interprétation en termes de relations de Zamolodchikov.

Profil des candidats. Ce sujet, à l'interaction des mathématiques et de l'informatique fondamentale, nécessite naturellement un très bon niveau en mathématiques, en particulier, en algèbre et en combinatoire. En outre, l'étudiant devra avoir des connaissances en informatique fondamentale et en programmation. Ce sujet peut intéresser des étudiants en Master de mathématiques ou des étudiants en Master d'informatique fondamentale ayant suivi une formation initiale en mathématiques.

Candidature. Envoyer un curriculum vitae, les résultats du cursus académique des trois dernières années, ainsi qu'une lettre de motivation et une lettre de recommandation à Stéphane Gaussent (stephane.gaussent@univ-st-etienne.fr) et à Philippe Malbos (malbos@math.univ-lyon1.fr).

Date limite de candidature. 16 mai 2014.

Abriged english version.

Title. Rewriting methods in representation theory. Coherent presentations of the 2-category of Bott-Samelson bimodules.

Context. The Ph.D thesis will take place within the Institute Camille Jordan at the Université Jean Monnet, in Saint-Étienne. The thesis will be under the supervision of Stéphane Gaussent and Philippe Malbos.

Candidates should send a CV, grades of the last 3 years, a cover letter and a letter of recommendation before May the 16th to Stéphane Gaussent (stephane.gaussent@univ-st-etienne.fr) and to Philippe Malbos (malbos@math.univ-lyon1.fr).

Subject of the thesis. The aim of this work is to study the monoidal category of Soergel bimodules $\mathbb{S}\text{Bim}$ from the perspective of higher-dimensional rewriting methods developed in [GM09] and [GM12]. More precisely, we seek a convergent presentation of this category with the hope of a better description of its algebraic and homotopical properties.

To understand the category of Soergel bimodules, it is enough to understand the monoidal category of Bott-Samelson bimodules which is described by generators and relations by Elias and Williamson in [EW13]. The category $\mathbb{S}\text{Bim}$ is a categorification of the Iwahori-Hecke algebra associated to the Coxeter system.

Références bibliographiques.

- [Bur93] Albert Burroni. Higher-dimensional word problems with applications to equational logic. *Theoret. Comput. Sci.*, 115(1) :43–62, jul 1993.
- [EW13] Ben Elias and Geordie Williamson. Soergel Calculus. *ArXiv e-prints*, 1309.0865, 2013.
- [GM09] Yves Guiraud and Philippe Malbos. Higher-dimensional categories with finite derivation type. *Theory Appl. Categ.*, 22 :No. 18, 420–478, 2009.
- [GM12] Yves Guiraud and Philippe Malbos. Higher-dimensional normalisation strategies for acyclicity. *Adv. Math.*, 231(3-4) :2294–2351, 2012.
- [GP00] Meinolf Geck and Götz Pfeiffer. *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, volume 21 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [Lau10] Aaron D. Lauda. A categorification of quantum $\mathfrak{sl}(2)$. *Adv. Math.*, 225(6) :3327–3424, 2010.
- [Lib08] Nicolas Libedinsky. Sur la catégorie des bimodules de Soergel. *J. Algebra*, 320(7) :2675–2694, 2008.
- [Soe07] Wolfgang Soergel. Kazhdan-Lusztig-Polynome und umzerlegbare Bimoduln über Polynomringen. *J. Inst. Math. Jussieu*, 6(3) :501–525, 2007.
- [Str87] Ross Street. The algebra of oriented simplexes. *J. Pure Appl. Algebra*, 49(3) :283–335, 1987.