In this Maple file, we compute the Casimir coefficients of the Lax matrix L associated to the second element of the Painlevé 2 hierarchy in relation with the spectral curve

```
> restart:
  P1:=x-> Pinfty01+Pinfty11*x+Pinfty21*x^2+Pinfty31*x^3;
  P2:=x-> Pinfty02+Pinfty12*x+Pinfty22*x^2+Pinfty32*x^3+Pinfty42*
  x^4+Pinfty52*x^5+Pinfty62*x^6;
  SpectralCurve:=unapply( y^2-P1(x)*y+P2(x),y);
```

$$P1 := x \rightarrow Pinfty01 + Pinfty11\, x + Pinfty21\, x^2 + Pinfty31\, x^3 \quad \textbf{(1)}$$

$$P2 := x \rightarrow Pinfty02 + Pinfty12\, x + Pinfty22\, x^2 + Pinfty32\, x^3 + Pinfty42\, x^4 + Pinfty52\, x^5 + Pinfty62\, x^6$$

$$SpectralCurve := y \rightarrow y^2 - \left(x^3\, Pinfty31 + x^2\, Pinfty21 + x\, Pinfty11 + Pinfty01\right) y + Pinfty62\, x^6 + Pinfty52\, x^5 + Pinfty42\, x^4 + Pinfty32\, x^3 + Pinfty22\, x^2 + Pinfty12\, x + Pinfty02$$

```
> DiaginftySheet1:=-tinfty14*x^3-tinfty13*x^2-tinfty12*x-tinfty11-
  tinfty10/x+Unknown/x^2;
  DiaginftySheet2:=-tinfty24*x^3-tinfty23*x^2-tinfty22*x-tinfty21-
  tinfty20/x+Unknown2/x^2;
```

$$DiaginftySheet1 := -tinfty14\, x^3 - tinfty13\, x^2 - tinfty12\, x - tinfty11 - \frac{tinfty10}{x} + \frac{Unknown}{x^2} \quad \textbf{(2)}$$

$$DiaginftySheet2 := -tinfty24\, x^3 - tinfty23\, x^2 - tinfty22\, x - tinfty21 - \frac{tinfty20}{x} + \frac{Unknown2}{x^2}$$

Expression of P_1 in terms of the diagonal expansion in both sheets

```
> series(DiaginftySheet1+DiaginftySheet2-P1(x),x=infinity);
  Pinfty01:=-(tinfty11+tinfty21);
  Pinfty11:=-(tinfty12+tinfty22);
  Pinfty21:=-(tinfty13+tinfty23);
  Pinfty31:=-(tinfty14+tinfty24);
  CoherenceEquation1:=residue(DiaginftySheet1+DiaginftySheet2-P1
  (x),x=infinity);
  tinfty20:=-tinfty10;
```

$$\frac{-tinfty10 - tinfty20}{x} + \frac{Unknown + Unknown2}{x^2} \quad \textbf{(3)}$$

$$Pinfty01 := -tinfty11 - tinfty21$$

$$Pinfty11 := -tinfty12 - tinfty22$$

$$Pinfty21 := -tinfty13 - tinfty23$$

$$Pinfty31 := -tinfty14 - tinfty24$$

$$CoherenceEquation1 := tinfty10 + tinfty20$$

$$tinfty20 := -tinfty10$$

Study at infinity

```
> series(SpectralCurve(DiaginftySheet1),x=infinity,6):
  series(SpectralCurve(DiaginftySheet2),x=infinity,6):
  residue(x^(-8)*SpectralCurve(DiaginftySheet1),x=infinity);
```

```
residue(x^(-8)*SpectralCurve(DiaginftySheet2),x=infinity);
EQinfty1:=residue(x^(-7)*SpectralCurve(DiaginftySheet1),x=
infinity);
EQinfty2:=residue(x^(-7)*SpectralCurve(DiaginftySheet2),x=
infinity);
EQinfty3:=residue(x^(-6)*SpectralCurve(DiaginftySheet1),x=
infinity);
EQinfty4:=residue(x^(-6)*SpectralCurve(DiaginftySheet2),x=
infinity);
EQinfty5:=residue(x^(-5)*SpectralCurve(DiaginftySheet1),x=
infinity);
EQinfty6:=residue(x^(-5)*SpectralCurve(DiaginftySheet2),x=
infinity);
EQinfty7:=residue(x^(-4)*SpectralCurve(DiaginftySheet1),x=
infinity);
EQinfty8:=residue(x^(-4)*SpectralCurve(DiaginftySheet2),x=
infinity);
EQinfty9:=residue(x^(-3)*SpectralCurve(DiaginftySheet1),x=
infinity);
EQinfty10:=residue(x^(-3)*SpectralCurve(DiaginftySheet2),x=
infinity);
EQinfty11:=residue(x^(-2)*SpectralCurve(DiaginftySheet1),x=
infinity);
EQinfty12:=residue(x^(-2)*SpectralCurve(DiaginftySheet2),x=
infinity);
EQinfty13:=residue(x^(-1)*SpectralCurve(DiaginftySheet1),x=
infinity);
EQinfty14:=residue(x^(-1)*SpectralCurve(DiaginftySheet2),x=
infinity);
```

$$0 \tag{4}$$

$$0$$

$$EQinfty1 := -tinfty14^2 - (-tinfty14 - tinfty24)\, tinfty14 - Pinfty62$$

$$EQinfty2 := -tinfty24^2 - (-tinfty14 - tinfty24)\, tinfty24 - Pinfty62$$

$$EQinfty3 := -2\, tinfty14\, tinfty13 - (-tinfty14 - tinfty24)\, tinfty13 - (-tinfty13 - tinfty23)\, tinfty14 - Pinfty52$$

$$EQinfty4 := -2\, tinfty24\, tinfty23 - (-tinfty14 - tinfty24)\, tinfty23 - (-tinfty13 - tinfty23)\, tinfty24 - Pinfty52$$

$$EQinfty5 := -2\, tinfty14\, tinfty12 - tinfty13^2 - (-tinfty14 - tinfty24)\, tinfty12 - (-tinfty13 - tinfty23)\, tinfty13 - (-tinfty12 - tinfty22)\, tinfty14 - Pinfty42$$

$$EQinfty6 := -2\, tinfty24\, tinfty22 - tinfty23^2 - (-tinfty14 - tinfty24)\, tinfty22 - (-tinfty13 - tinfty23)\, tinfty23 - (-tinfty12 - tinfty22)\, tinfty24 - Pinfty42$$

$$EQinfty7 := -2\, tinfty14\, tinfty11 - 2\, tinfty13\, tinfty12 - (-tinfty14 - tinfty24)\, tinfty11 - ($$

$-tinfty13 - tinfty23)\ tinfty12 - (-tinfty12 - tinfty22)\ tinfty13 - (-tinfty11 - tinfty21)\ tinfty14 - Pinfty32$

$$EQinfty8 := -2\ tinfty24\ tinfty21 - 2\ tinfty23\ tinfty22 - (-tinfty14 - tinfty24)\ tinfty21 - (-tinfty13 - tinfty23)\ tinfty22 - (-tinfty12 - tinfty22)\ tinfty23 - (-tinfty11 - tinfty21)\ tinfty24 - Pinfty32$$

$$EQinfty9 := -2\ tinfty14\ tinfty10 - 2\ tinfty13\ tinfty11 - tinfty12^2 - (-tinfty14 - tinfty24)\ tinfty10 - (-tinfty13 - tinfty23)\ tinfty11 - (-tinfty12 - tinfty22)\ tinfty12 - (-tinfty11 - tinfty21)\ tinfty13 - Pinfty22$$

$$EQinfty10 := 2\ tinfty10\ tinfty24 - 2\ tinfty23\ tinfty21 - tinfty22^2 + (-tinfty14 - tinfty24)\ tinfty10 - (-tinfty13 - tinfty23)\ tinfty21 - (-tinfty12 - tinfty22)\ tinfty22 - (-tinfty11 - tinfty21)\ tinfty23 - Pinfty22$$

$$EQinfty11 := 2\ tinfty14\ Unknown - 2\ tinfty13\ tinfty10 - 2\ tinfty12\ tinfty11 + (-tinfty14 - tinfty24)\ Unknown - (-tinfty13 - tinfty23)\ tinfty10 - (-tinfty12 - tinfty22)\ tinfty11 - (-tinfty11 - tinfty21)\ tinfty12 - Pinfty12$$

$$EQinfty12 := 2\ tinfty24\ Unknown2 + 2\ tinfty10\ tinfty23 - 2\ tinfty22\ tinfty21 + (-tinfty14 - tinfty24)\ Unknown2 + (-tinfty13 - tinfty23)\ tinfty10 - (-tinfty12 - tinfty22)\ tinfty21 - (-tinfty11 - tinfty21)\ tinfty22 - Pinfty12$$

$$EQinfty13 := 2\ tinfty13\ Unknown - 2\ tinfty12\ tinfty10 - tinfty11^2 + (-tinfty13 - tinfty23)\ Unknown - (-tinfty12 - tinfty22)\ tinfty10 - (-tinfty11 - tinfty21)\ tinfty11 - Pinfty02$$

$$EQinfty14 := 2\ tinfty23\ Unknown2 + 2\ tinfty10\ tinfty22 - tinfty21^2 + (-tinfty13 - tinfty23)\ Unknown2 + (-tinfty12 - tinfty22)\ tinfty10 - (-tinfty11 - tinfty21)\ tinfty21 - Pinfty02$$

```
> Pinfty62:=factor(solve(EQinfty1,Pinfty62));
  Pinfty52:=factor(solve(EQinfty3,Pinfty52));
  Pinfty42:=factor(solve(EQinfty5,Pinfty42));
  Pinfty32:=factor(solve(EQinfty7,Pinfty32));
  Pinfty22:=factor(solve(EQinfty9,Pinfty22));
  simplify(EQinfty2);
  simplify(EQinfty4);
  simplify(EQinfty6);
  simplify(EQinfty8);
  simplify(EQinfty10);
```

$$Pinfty62 := tinfty14\ tinfty24 \tag{5}$$

$$Pinfty52 := tinfty13\ tinfty24 + tinfty14\ tinfty23$$

$$Pinfty42 := tinfty12\ tinfty24 + tinfty13\ tinfty23 + tinfty14\ tinfty22$$

$$Pinfty32 := tinfty11\ tinfty24 + tinfty12\ tinfty23 + tinfty13\ tinfty22 + tinfty14\ tinfty21$$

$$Pinfty22 := -tinfty10\ tinfty14 + tinfty10\ tinfty24 + tinfty11\ tinfty23 + tinfty12\ tinfty22 + tinfty13\ tinfty21$$

$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$
$$0$$

Summary of coefficients

```
> Pinfty01:=Pinfty01;
  Pinfty11:=Pinfty11;
```

```
Pinfty21:=Pinfty21;
Pinfty31:=Pinfty31;
Pinfty02:=Pinfty02;
Pinfty12:=Pinfty12;
Pinfty22:=Pinfty22;
Pinfty32:=Pinfty32;
Pinfty42:=Pinfty42;
Pinfty52:=Pinfty52;
Pinfty62:=Pinfty62;
P1:=unapply(P1(lambda),lambda);
P2:=unapply(P2(lambda),lambda);
```

$$
\begin{gathered}
Pinfty01 := -tinfty11 - tinfty21 \\
Pinfty11 := -tinfty12 - tinfty22 \\
Pinfty21 := -tinfty13 - tinfty23 \\
Pinfty31 := -tinfty14 - tinfty24 \\
Pinfty02 := Pinfty02 \\
Pinfty12 := Pinfty12 \\
Pinfty22 := -tinfty10\, tinfty14 + tinfty10\, tinfty24 + tinfty11\, tinfty23 + tinfty12\, tinfty22 + tinfty13\, tinfty21 \\
Pinfty32 := tinfty11\, tinfty24 + tinfty12\, tinfty23 + tinfty13\, tinfty22 + tinfty14\, tinfty21 \\
Pinfty42 := tinfty12\, tinfty24 + tinfty13\, tinfty23 + tinfty14\, tinfty22 \\
Pinfty52 := tinfty13\, tinfty24 + tinfty14\, tinfty23 \\
Pinfty62 := tinfty14\, tinfty24 \\
P1 := \lambda \to -tinfty11 - tinfty21 + (-tinfty12 - tinfty22)\,\lambda + (-tinfty13 - tinfty23)\,\lambda^2 + (-tinfty14 - tinfty24)\,\lambda^3 \\
P2 := \lambda \to Pinfty02 + Pinfty12\,\lambda + (-tinfty10\, tinfty14 + tinfty10\, tinfty24 + tinfty11\, tinfty23 + tinfty12\, tinfty22 + tinfty13\, tinfty21)\,\lambda^2 + (tinfty11\, tinfty24 + tinfty12\, tinfty23 + tinfty13\, tinfty22 + tinfty14\, tinfty21)\,\lambda^3 + (tinfty12\, tinfty24 + tinfty13\, tinfty23 + tinfty14\, tinfty22)\,\lambda^4 + (tinfty13\, tinfty24 + tinfty14\, tinfty23)\,\lambda^5 + tinfty14\, tinfty24\,\lambda^6
\end{gathered} \tag{6}
$$

We have 2 undetermined coefficients: Pinfty02 and Pinfty12 and one coherence relation: the sum of monodromies is vanishing: tinfty10+tinfty20=0