# In this Maple file, we check that the formulas found for the second element of the Painlevé 2 hierarchy corresponds to the theoretical ones.

Loading the results after symplectic reduction

```
> restart:
  with(LinearAlgebra):
  tinfty14:=1;
  tinfty24:=-1;
  tinfty13:=0;
  tinfty23:=0;
  tinfty12:=1/2*tau2;
  tinfty22:=-tinfty12;
  tinfty11:=1/2*tau1;
  tinfty21:=-tinfty11;
  tinfty20:=-tinfty10;
  P1:=lambda->0:
  tdP2:=unapply(-lambda^6-tau2*lambda^4-tau1*lambda^3-(2*
  tinfty10+1/4*tau2^2)*lambda^2,lambda);
  P2:=unapply(-lambda^6-tau2*lambda^4-tau1*lambda^3-(2*
  tinfty10+1/4*tau2^2)*lambda^2+Pinfty02+Pinfty12*lambda,lambda);
  dtdP2dlambda:=unapply(diff(tdP2(lambda),lambda),lambda);
  tdP2onlambda:=unapply(tdP2(lambda)/lambda,lambda):
```

$$tinfty14 := 1 \tag{1}$$
$$tinfty24 := -1$$
$$tinfty13 := 0$$
$$tinfty23 := 0$$
$$tinfty12 := \frac{1}{2}\,\tau 2$$
$$tinfty22 := -\frac{1}{2}\,\tau 2$$
$$tinfty11 := \frac{1}{2}\,\tau 1$$
$$tinfty21 := -\frac{1}{2}\,\tau 1$$
$$tinfty20 := -tinfty10$$
$$tdP2 := \lambda \rightarrow -\lambda^6 - \tau 2\,\lambda^4 - \tau 1\,\lambda^3 - \left(2\,tinfty10 + \frac{1}{4}\,\tau 2^2\right)\lambda^2$$
$$P2 := \lambda \rightarrow -\lambda^6 - \tau 2\,\lambda^4 - \tau 1\,\lambda^3 - \left(2\,tinfty10 + \frac{1}{4}\,\tau 2^2\right)\lambda^2 + Pinfty02 + Pinfty12\,\lambda$$
$$dtdP2dlambda := \lambda \rightarrow -6\,\lambda^5 - 4\,\tau 2\,\lambda^3 - 3\,\tau 1\,\lambda^2 - 2\left(2\,tinfty10 + \frac{1}{4}\,\tau 2^2\right)\lambda$$

Definition of the matrices necessary to define the vector (c_{\infty,0}, c_{\infty,1}) and verification that we recover the correct formulas

```
> Q:=Matrix(2,2,0):
```

```
Q[1,1]:=1:
Q[1,2]:=q1:
Q[2,1]:=1:
Q[2,2]:=q2:
RHS1:=Matrix(2,1,0):
RHS1[1,1]:=p1^2+tdP2(q1)+h*(p2-p1)/(q1-q2)+h*q1^2:
RHS1[2,1]:=p2^2+tdP2(q2)+h*(p1-p2)/(q2-q1)+h*q2^2:
Q;
Q^(-1);
RHS1;

simplify(1/(q1-q2)*h*(p2-p1)/(q1-q2)-1/(q1-q2)*h*(p1-p2)/(q2-q1))
;
simplify(-q2/(q1-q2)*h*(p2-p1)/(q1-q2)+q1/(q1-q2)*h*(p1-p2)/(q2-
q1));

CVector:=simplify(Multiply(Q^(-1),RHS1)):
Cinfty0:=CVector[1,1]:
Cinfty1:=CVector[2,1]:

Cinfty1bis:=(p1^2-p2^2)/(q1-q2)-( (q1^2+q2^2+1/2*tau2)^2-q1^2*
q2^2 +(2*tinfty10-h))*(q1+q2)-(q1^2+q1*q2+q2^2)*tau1;
factor(Cinfty1-Cinfty1bis);

Cinfty0bis:=-(p1^2-p2^2)*q1/(q1-q2) -h*(p1-p2)/(q1-q2)+p1^2 +
(q1^4+q2^4+q1^3*q2+q2^3*q1+q1^2*q2^2+1/4*tau2^2+ (q1^2+q1*q2+
q2^2)*tau2+(q1+q2)*tau1+ 2*tinfty10-h)*q1*q2:
Cinfty0bis:=(p2^2*q1-q2*p1^2)/(q1-q2) -h*(p1-p2)/(q1-q2) +(q1^4+
q2^4+q1^3*q2+q2^3*q1+q1^2*q2^2+1/4*tau2^2+ (q1^2+q1*q2+q2^2)*
tau2+(q1+q2)*tau1+ 2*tinfty10-h)*q1*q2;
Cinfty0ter:=-(p1^2-p2^2)*q1/(q1-q2) -h*(p1-p2)/(q1-q2)+p1^2 +(
(q1^5-q2^5)/(q1-q2)+1/4*tau2^2+ (q1^3-q2^3)/(q1-q2)*tau2+(q1^2-
q2^2)/(q1-q2)*tau1+ 2*tinfty10-h)*q1*q2:
Cinfty0ter:=-(p1^2-p2^2)*q1/(q1-q2) -h*(p1-p2)/(q1-q2)+p1^2 -
(tdP2onlambda(q1)-tdP2onlambda(q2))/(q1-q2)*q1*q2 -h*q1*q2:
factor(Cinfty0-Cinfty0bis);
factor(Cinfty0-Cinfty0ter);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & q1 \\ 1 & q2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{q2}{q1-q2} & \frac{q1}{q1-q2} \\ \frac{1}{q1-q2} & -\frac{1}{q1-q2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p1^2 - q1^6 - \tau2\, q1^4 - \tau1\, q1^3 - \left(2\, tinfty10 + \frac{1}{4}\, \tau2^2\right) q1^2 + \frac{h\,(p2-p1)}{q1-q2} + h\, q1^2 \\ p2^2 - q2^6 - \tau2\, q2^4 - \tau1\, q2^3 - \left(2\, tinfty10 + \frac{1}{4}\, \tau2^2\right) q2^2 + \frac{h\,(p1-p2)}{q2-q1} + h\, q2^2 \end{bmatrix}$$

$$0$$

$$-\frac{h\,(p1-p2)}{q1-q2}$$

$$Cinfty1bis := \frac{p1^2 - p2^2}{q1-q2} - \left(\left(q1^2 + q2^2 + \frac{1}{2}\,\tau2\right)^2 - q1^2\, q2^2 + 2\, tinfty10 - h\right)(q1+q2) - \left(q1^2 + q1\, q2 + q2^2\right)\tau1$$

$$0$$

$$Cinfty0bis := \frac{-p1^2\, q2 + p2^2\, q1}{q1-q2} - \frac{h\,(p1-p2)}{q1-q2} + \left(q1^4 + q2^4 + q1^3\, q2 + q1\, q2^3 + q1^2\, q2^2 + \frac{1}{4}\,\tau2^2 + \left(q1^2 + q1\, q2 + q2^2\right)\tau2 + (q1+q2)\,\tau1 + 2\, tinfty10 - h\right) q1\, q2$$

$$0$$

$$0$$

Definition of the matrix M_{\infty} and of the vectors \nu_{\infty,1} and \nu_{\infty,2}

```
> Minfty:=Matrix(4,4,0):
  Minfty[1,1]:=2:
  Minfty[2,2]:=2:
  Minfty[3,3]:=2:
  Minfty[4,4]:=2:
  Minfty[3,1]:=tau2:
  Minfty[4,1]:=tau1:
  Minfty[4,2]:=tau2:
  Minfty;
  Minfty^(-1);

  E3:=Matrix(4,1,0):
  E3[3,1]:=1:
  E4:=Matrix(4,1,0):
  E4[4,1]:=1:
  E3;
  E4;

  Multiply(Minfty^(-1),E3);
  Multiply(Minfty^(-1),E4);
  nu2infty1:=1/2*Multiply(Minfty^(-1),E3)[3,1];
```

```
nu2infty2:=1/2*Multiply(Minfty^(-1),E3)[4,1];
nu1infty1:=Multiply(Minfty^(-1),E4)[3,1];
nu1infty2:=Multiply(Minfty^(-1),E4)[4,1];

nu1inftyVector:=Matrix(2,1,0):
nu1inftyVector[1,1]:=nu1infty1:
nu1inftyVector[2,1]:=nu1infty2:
nu1inftyVector;

nu2inftyVector:=Matrix(2,1,0):
nu2inftyVector[1,1]:=nu2infty1:
nu2inftyVector[2,1]:=nu2infty2:

nu2inftyVector;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \tau 2 & 0 & 2 & 0 \\ \tau 1 & \tau 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\tau 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4}\tau 1 & -\frac{1}{4}\tau 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$nu2infty1 := \frac{1}{4}$$
$$nu2infty2 := 0$$
$$nu1infty1 := 0$$
$$nu1infty2 := \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definition of the matrix V and the vector \mu_{\tau_1} and \mu_{\tau_2}

```
> V:=Matrix(2,2,0):
  V[1,1]:=1:
  V[1,2]:=1:
  V[2,1]:=q1:
  V[2,2]:=q2:
  V;
  V^(-1);
  Mu1inftyVector:=Multiply(V^(-1),nu1inftyVector);
  Mu2inftyVector:=Multiply(V^(-1),nu2inftyVector);
  mutau11:=Mu1inftyVector[1,1];
  mutau12:=Mu1inftyVector[2,1];
  mutau21:=Mu2inftyVector[1,1];
  mutau22:=Mu2inftyVector[2,1];
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ q1 & q2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{q2}{q1-q2} & \frac{1}{q1-q2} \\ \frac{q1}{q1-q2} & -\frac{1}{q1-q2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\,(q1-q2)} \\ -\frac{1}{2\,(q1-q2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\,\frac{q2}{q1-q2} \\ \frac{1}{4}\,\frac{q1}{q1-q2} \end{bmatrix}$$

$$mutau11 := \frac{1}{2\,(q1-q2)}$$

$$mutau12 := -\frac{1}{2\,(q1-q2)}$$

$$mutau21 := -\frac{1}{4}\,\frac{q2}{q1-q2}$$

$$mutau22 := \frac{1}{4}\,\frac{q1}{q1-q2}$$

Definition of the theoretical Hamiltonian evolutions using the formulas proved in the article.

```
> hdq1dtau1:=2*p1*mutau11- h*(mutau12+mutau11)/(q1-q2);
  hdq2dtau1:=2*p2*mutau12- h*(mutau12+mutau11)/(q2-q1);
  hdp1dtau1:=simplify(h*(mutau12+mutau11)*(p2-p1)/(q1-q2)
  ^2+mutau11*(-diff(tdP2(q1),q1)+Cinfty1-2*h*q1));
  hdp2dtau1:=simplify(h*(mutau12+mutau11)*(p1-p2)/(q1-q2)^2+
  mutau12*(-diff(tdP2(q2),q2)+Cinfty1-2*h*q2));
  Ham1:=factor(-h*(mutau12+mutau11)*(p1-p2)/(q1-q2)+mutau11*(p1^2+
  tdP2(q1)+h*q1^2)+mutau12*(p2^2+tdP2(q2)+h*q2^2)) ;

  hdq1dtau2:=simplify(2*p1*mutau21- h*(mutau22+mutau21)/(q1-q2));
  hdq2dtau2:=simplify(2*p2*mutau22- h*(mutau22+mutau21)/(q2-q1));
  hdp1dtau2:=simplify(h*(mutau22+mutau21)*(p2-p1)/(q1-q2)^2+
  mutau21*(-diff(tdP2(q1),q1)+Cinfty1-2*h*q1));
  hdp2dtau2:=simplify(h*(mutau22+mutau21)*(p1-p2)/(q1-q2)^2+
  mutau22*(-diff(tdP2(q2),q2)+Cinfty1-2*h*q2));
  Ham2:=factor(-h*(mutau22+mutau21)*(p1-p2)/(q1-q2)+mutau21*(p1^2+
  tdP2(q1)+h*q1^2)+mutau22*(p2^2+tdP2(q2)+h*q2^2)) ;
```

$$hdq1dtau1 := \frac{p1}{q1-q2} \qquad \textbf{(5)}$$

$$hdq2dtau1 := -\frac{p2}{q1 - q2}$$

$$hdp1dtau1 := \frac{1}{8}\,\frac{1}{(q1-q2)^2}\Big(20\,q1^6 - 24\,q1^5\,q2 + 12\,\tau 2\,q1^4 + (-16\,q2\,\tau 2 + 8\,\tau 1)\,q1^3 + (-12\,q2\,\tau 1 + \tau 2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10)\,q1^2 + 8\,q2\left(-\frac{1}{4}\,\tau 2^2 + h - 2\,tinfty10\right)q1 + 4\,q2^6 + 4\,\tau 2\,q2^4 + 4\,\tau 1\,q2^3 + (\tau 2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10)\,q2^2 + 4\,p1^2 - 4\,p2^2\Big)$$

$$hdp2dtau1 := \frac{1}{8}\,\frac{1}{(q1-q2)^2}\Big(4\,q1^6 + 4\,\tau 2\,q1^4 + 4\,\tau 1\,q1^3 + (\tau 2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10)\,q1^2 + 8\,q2\left(-3\,q2^4 - 2\,\tau 2\,q2^2 - \frac{3}{2}\,\tau 1\,q2 - \frac{1}{4}\,\tau 2^2 + h - 2\,tinfty10\right)q1 + 20\,q2^6 + 12\,\tau 2\,q2^4 + 8\,\tau 1\,q2^3 + (\tau 2^2 - 4\,h + 8\,tinfty10)\,q2^2 - 4\,p1^2 + 4\,p2^2\Big)$$

$$Ham1 := \frac{1}{8}\,\frac{1}{q1-q2}\big(-4\,q1^6 + 4\,q2^6 - 4\,q1^4\,\tau 2 + 4\,q2^4\,\tau 2 - 4\,q1^3\,\tau 1 - q1^2\,\tau 2^2 + 4\,q2^3\,\tau 1 + q2^2\,\tau 2^2 + 4\,h\,q1^2 - 4\,h\,q2^2 - 8\,q1^2\,tinfty10 + 8\,q2^2\,tinfty10 + 4\,p1^2 - 4\,p2^2\big)$$

$$hdq1dtau2 := \frac{-2\,p1\,q2 - h}{4\,q1 - 4\,q2}$$

$$hdq2dtau2 := \frac{2\,p2\,q1 + h}{4\,q1 - 4\,q2}$$

$$hdp1dtau2 := \frac{1}{16}\,\frac{1}{(q1-q2)^2}\Big(-4\,q2^7 - 4\,\tau 2\,q2^5 - 4\,\tau 1\,q2^4 + (-\tau 2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10)\,q2^3 - 8\,q1\left(-3\,q1^4 - 2\,q1^2\,\tau 2 - \frac{3}{2}\,\tau 1\,q1 - \frac{1}{4}\,\tau 2^2 + h - 2\,tinfty10\right)q2^2 + (-20\,q1^6 - 12\,\tau 2\,q1^4 - 8\,\tau 1\,q1^3 + (-\tau 2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10)\,q1^2 - 4\,p1^2 + 4\,p2^2)\,q2 - 4\,h\,(p1 - p2)\Big)$$

$$hdp2dtau2 := \frac{1}{16}\,\frac{1}{(q1-q2)^2}\Big(-4\,q1^7 - 4\,\tau 2\,q1^5 - 4\,\tau 1\,q1^4 + (-\tau 2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10)\,q1^3 - 8\,q2\left(-3\,q2^4 - 2\,\tau 2\,q2^2 - \frac{3}{2}\,\tau 1\,q2 - \frac{1}{4}\,\tau 2^2 + h - 2\,tinfty10\right)q1^2 + (-20\,q2^6 - 12\,\tau 2\,q2^4 - 8\,\tau 1\,q2^3 + (-\tau 2^2 + 4\,h - 8\,tinfty10)\,q2^2 + 4\,p1^2 - 4\,p2^2)\,q1 + 4\,h\,(p1 - p2)\Big)$$

$$Ham2 := -\frac{1}{16}\,\frac{1}{q1-q2}\big(-4\,q1^6\,q2 + 4\,q1\,q2^6 - 4\,q1^4\,q2\,\tau 2 + 4\,q1\,q2^4\,\tau 2 - 4\,q1^3\,q2\,\tau 1 - q1^2\,q2\,\tau 2^2 + 4\,q1\,q2^3\,\tau 1 + q1\,q2^2\,\tau 2^2 + 4\,h\,q1^2\,q2 - 4\,h\,q1\,q2^2 - 8\,q1^2\,q2\,tinfty10 + 8\,q1\,q2^2\,tinfty10 + 4\,p1^2\,q2 - 4\,p2^2\,q1 + 4\,h\,p1 - 4\,h\,p2\big)$$

Comparing the theoretical formulas giving the Hamiltonian evolutions with the one obtained from solving the compatibility equations (in a previous Maple file)

```
> simplify(mutau12+mutau11);
  simplify(mutau22+mutau21);
```

```
hdp1dtau1bis:=(p1^2-p2^2)/2/(q1-q2)^2+1/2*(5*q1^4+4*q1^3*q2+3*
q1^2*q2^2+2*q1*q2^3+q2^4)
+(q1+q2/2)*tau1+1/2*(3*q1^2+2*q1*q2+q2^2)*tau2+tau2^2/8+tinfty10-
h/2;
factor(series(hdp1dtau1-hdp1dtau1bis,p1=0));

hdp2dtau1bis:=-(p1^2-p2^2)/2/(q1-q2)^2+1/2*(5*q2^4+4*q2^3*q1+3*
q2^2*q1^2+2*q2*q1^3+q1^4)
+(q2+q1/2)*tau1+1/2*(3*q2^2+2*q2*q1+q1^2)*tau2+tau2^2/8+tinfty10-
h/2;
factor(series(hdp2dtau1-hdp2dtau1bis,tau2=0));

Ham1bis:=(p1^2-p2^2)/2/(q1-q2)-(1/2)*(q1+q2)*((q1^2+q2^2)^2-q1^2*
q2^2)
-1/2*(q1^2+q1*q2+q2^2)*tau1-1/2*(q1+q2)*(q1^2+q2^2)*tau2
-1/8*(q1+q2)*tau2^2 -1/2*(q1+q2)*(2*tinfty10-h);
factor(series(Ham1-Ham1bis,tau2=0));
```

$$0 \tag{6}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$hdp1dtau1bis := \frac{1}{2}\,\frac{p1^2-p2^2}{(q1-q2)^2}+\frac{5}{2}\,q1^4+2\,q1^3\,q2+\frac{3}{2}\,q1^2\,q2^2+q1\,q2^3+\frac{1}{2}\,q2^4+\left(q1+\frac{1}{2}\,q2\right)\tau1+\frac{1}{2}\left(3\,q1^2+2\,q1\,q2+q2^2\right)\tau2+\frac{1}{8}\,\tau2^2+tinfty10-\frac{1}{2}\,h$$

$$0$$

$$hdp2dtau1bis := -\frac{1}{2}\,\frac{p1^2-p2^2}{(q1-q2)^2}+\frac{1}{2}\,q1^4+q1^3\,q2+\frac{3}{2}\,q1^2\,q2^2+2\,q1\,q2^3+\frac{5}{2}\,q2^4+\left(q2+\frac{1}{2}\,q1\right)\tau1+\frac{1}{2}\left(q1^2+2\,q1\,q2+3\,q2^2\right)\tau2+\frac{1}{8}\,\tau2^2+tinfty10-\frac{1}{2}\,h$$

$$0$$

$$Ham1bis := \frac{1}{2}\,\frac{p1^2-p2^2}{q1-q2}-\frac{1}{2}\,(q1+q2)\left(\left(q1^2+q2^2\right)^2-q1^2\,q2^2\right)-\frac{1}{2}\left(q1^2+q1\,q2+q2^2\right)\tau1-\frac{1}{2}\,(q1+q2)\left(q1^2+q2^2\right)\tau2-\frac{1}{8}\,(q1+q2)\,\tau2^2-\frac{1}{2}\,(q1+q2)\,(2\,tinfty10-h)$$

$$0$$

```
> hdp1dtau2bis:=-(1/4)*q2*(p1^2-p2^2)/(q1-q2)^2 -(1/4)*h*(p1-p2)/
(q1-q2)^2
-(1/4)*q2*(5*q1^4+4*q1^3*q2+3*q1^2*q2^2+2*q1*q2^3+q2^4)
-(1/4)*q2*(2*q1+q2)*tau1 -1/4*q2*(3*q1^2+2*q1*q2+q2^2)*tau2
-1/16*q2*tau2^2
-1/4*q2*(2*tinfty10-h);
factor(series(hdp1dtau2-hdp1dtau2bis,tinfty10=0));
```

```
dp1dtau2ter:=-(p1-p2)*(p1*q2+p2*q2+h)/(4*(q1-q2)^2)
-(1/4)*q2*(2*q1+q2)*tau1-(1/4)*q2*(3*q1^2+2*q1*q2+q2^2)*tau2-
(1/16)*q2*tau2^2-(1/4)*q2*(5*q1^4+4*q1^3*q2+3*q1^2*q2^2+2*q1*
q2^3+q2^4)-(1/2)*q2*(tinfty10-h/2);

dp2dtau2ter:=(p1-p2)*(p1*q1+p2*q1+h)/(4*(q1-q2)^2)-(1/4)*q1*
(q1+2*q2)*tau1
-(1/4)*q1*(q1^2+2*q1*q2+3*q2^2)*tau2-(1/16)*q1*tau2^2-(1/4)*q1*
(q1^4+2*q1^3*q2+3*q1^2*q2^2+4*q1*q2^3+5*q2^4)
-(1/2)*q1*(tinfty10-h/2);

factor(series(hdp1dtau2-dp1dtau2ter,tinfty10=0));
factor(series(hdp2dtau2-dp2dtau2ter,tinfty10=0));

hdp2dtau2bis:=(1/4)*q1*(p1^2-p2^2)/(q1-q2)^2 +(1/4)*h*(p1-p2)/(q1
-q2)^2
-(1/4)*q1*(5*q2^4+4*q2^3*q1+3*q2^2*q1^2+2*q2*q1^3+q1^4)
-(1/4)*q1*(2*q2+q1)*tau1 -1/4*q1*(3*q2^2+2*q2*q1+q1^2)*tau2
-1/16*q1*tau2^2
-1/4*q1*(2*tinfty10-h);
factor(series(hdp2dtau2-hdp2dtau2bis,tinfty10=0));

Ham2bis:=(1/4)*(q1*p2^2-q2*p1^2)/(q1-q2)+1/4*(q1^4+q1^3*q2+q1^2*
q2^2+q1*q2^3+q2^4)*q2*q1
-(1/4)*h*(p1-p2)/(q1-q2)
+(1/4*(q1+q2))*q2*q1*tau1+(1/4*(q1^2+q1*q2+q2^2))*q2*q1*
tau2+1/16*q2*q1*tau2^2
+(1/4)*q2*q1*(2*tinfty10-h);
factor(series(Ham2-Ham2bis,p2=0));
```

$$hdp1dtau2bis := -\frac{1}{4}\frac{q2\left(p1^2-p2^2\right)}{(q1-q2)^2}-\frac{1}{4}\frac{h\,(p1-p2)}{(q1-q2)^2}-\frac{1}{4}\,q2\left(5\,q1^4+4\,q1^3\,q2+3\,q1^2\,q2^2+2\,q1\,q2^3+q2^4\right)-\frac{1}{4}\,q2\,(2\,q1+q2)\,\tau1-\frac{1}{4}\,q2\left(3\,q1^2+2\,q1\,q2+q2^2\right)\tau2-\frac{1}{16}\,q2\,\tau2^2-\frac{1}{4}\,q2\,(2\,tinfty10-h) \tag{7}$$

$$0$$

$$dp1dtau2ter := -\frac{1}{4}\frac{(p1-p2)\,(p1\,q2+p2\,q2+h)}{(q1-q2)^2}-\frac{1}{4}\,q2\,(2\,q1+q2)\,\tau1-\frac{1}{4}\,q2\left(3\,q1^2+2\,q1\,q2+q2^2\right)\tau2-\frac{1}{16}\,q2\,\tau2^2-\frac{1}{4}\,q2\left(5\,q1^4+4\,q1^3\,q2+3\,q1^2\,q2^2+2\,q1\,q2^3+q2^4\right)-\frac{1}{2}\,q2\left(tinfty10-\frac{1}{2}\,h\right)$$

$$dp2dtau2ter := \frac{1}{4}\,\frac{(p1-p2)\,(p1\,q1+p2\,q1+h)}{(q1-q2)^2}-\frac{1}{4}\,q1\,(2\,q2+q1)\,\tau 1-\frac{1}{4}\,q1\,\left(q1^2+2\,q1\,q2+3\,q2^2\right)\,\tau 2-\frac{1}{16}\,q1\,\tau 2^2-\frac{1}{4}\,q1\,\left(q1^4+2\,q1^3\,q2+3\,q1^2\,q2^2+4\,q1\,q2^3+5\,q2^4\right)-\frac{1}{2}\,q1\,\left(tinfty10-\frac{1}{2}\,h\right)$$

$$0$$

$$0$$

$$hdp2dtau2bis := \frac{1}{4}\,\frac{q1\,\left(p1^2-p2^2\right)}{(q1-q2)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{h\,(p1-p2)}{(q1-q2)^2}-\frac{1}{4}\,q1\,\left(q1^4+2\,q1^3\,q2+3\,q1^2\,q2^2+4\,q1\,q2^3+5\,q2^4\right)-\frac{1}{4}\,q1\,(2\,q2+q1)\,\tau 1-\frac{1}{4}\,q1\,\left(q1^2+2\,q1\,q2+3\,q2^2\right)\,\tau 2-\frac{1}{16}\,q1\,\tau 2^2-\frac{1}{4}\,q1\,(2\,tinfty10-h)$$

$$0$$

$$Ham2bis := \frac{1}{4}\,\frac{-p1^2\,q2+p2^2\,q1}{q1-q2}+\frac{1}{4}\,\left(q1^4+q1^3\,q2+q1^2\,q2^2+q1\,q2^3+q2^4\right)\,q2\,q1-\frac{1}{4}\,\frac{h\,(p1-p2)}{q1-q2}+\frac{1}{4}\,(q1+q2)\,q2\,q1\,\tau 1+\frac{1}{4}\,\left(q1^2+q1\,q2+q2^2\right)\,q2\,q1\,\tau 2+\frac{1}{16}\,q1\,q2\,\tau 2^2+\frac{1}{4}\,q2\,q1\,(2\,tinfty10-h)$$

$$0$$