Séminaire mathématiques accessibles

Marchal Olivier

April 4, 2013

Intro: Le théorème central limite

Theorem

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de moyenne $E(X_i) = \mu$ et de variance $Var(X_i) = \sigma^2$ et telles que $E(X_i^4) < \infty$ alors:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{p.s}{\rightarrow} \mu$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \overset{loi}{\rightarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

- Ce résultat est un résultat d'universalité: peu importe la loi de départ des X_i, la loi normale émerge quand n devient grand: l'aléatoire se moyenne et prend une forme Gaussienne.
- Ce type de résultat existe t-il sur des d'autres objets mathématiques?

Les matrices aléatoires basiques

- Idée générale: mettre des v.a. dans une matrice pour la rendre aléatoire et étudier son spectre (ses valeurs propres).
- Modèle basique:

$$M = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n,1} & \cdots & X_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{avec } X_i \text{ i.i.d.} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) + i\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \right)$$

- L'espace de probabilité est donné par la mesure produit:

$$d\mu(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n^2}{2}}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} dx_{ij} e^{-\frac{(x_{ij}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Theorem

Les matrices diagonalisables (au sens complexe) sont denses dans l'ensemble des matrices $\Rightarrow$ modulo un espace de probabilité nulle, les matrices possèdent toujours n valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}$

- Question: Comment se comporte les v.p. quand la matrice devient grande?

Théorème et loi limite

Theorem

Pour une matrice aléatoire décrite avec entrée i.i.d. $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ *on a en posant* $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\sigma\sqrt{n}}$ *les v.p. normalisées:*

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n} \delta(\mu_i) \underset{n\to\infty}{\overset{loi}{\to}} d\mu(z) = \rho(z)dz$$

où $d\mu(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}dxdy$.

- La loi de densité $f(x) = c\sqrt{a^2 - x^2}$ s'appelle la loi du demi-cercle ou loi de Tracy-Widom.
- Notons que la loi limite obtenue est angulairement uniforme: $d\theta = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow$ invariance par rotation

L'ensemble Hermitien

- Pour se ramener à une densité réelle (et pour d'autres raison), on préfère regarder des matrices hermitiennes dont les v.p. sont réelles

Theorem

Pour une matrice aléatoire décrite avec entrée i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *on a en posant* $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\sigma\sqrt{n}}$ *les v.p. normalisées:*

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n} \delta(\mu_i) \underset{n\to\infty}{\overset{loi}{\to}} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

- Si on prend des matrices réelles symétriques, le résultat limite reste inchangée
- Plus mystérieux: si on change la loi des entrées la loi limite reste inchangée

La recherche de conditions minimales

- Tout comme pour le théorème central limite, les probabilistes ont cherché à minimiser au maximum les conditions sur les entrées d'une matrice aléatoire pour obtenir la loi du demi-cercle.

Theorem

Si les entrées sont i.i.d. et que il existe $\epsilon > 0$ tel que $E(X_{i,j}^{2+\epsilon}) < \infty$ alors la distribution empirique des v.p. tend en loi vers la loi du demi-cercle. (Terence Tao, Van Vu, 2009)

- D'autres formes avec des entrées non i.i.d. existent (Laszlo Erdös) en demandant que $E(X_{i,j}^4) < \infty$ et que la matrice variance-covarience soit bornée.
- La conjecture dans ce domaine est que si les entrées sont i.i.d. avec $E(X_{i,j}^2) < \infty$ alors on retrouve la loi du demi-cercle (Wigner-Dyson)
- Preuves difficiles par la méthode des grandes déviations

Plus grande valeur propre

- Soit M une matrice aléatoire hermitienne et soit λ_n sa plus grande v.p.
- On a vu que $\lambda \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to \infty$. Peut-on faire mieux que cela?

Theorem

$$\sqrt{2}n^{-\frac{1}{6}}(\lambda - \sqrt{2n}) \underset{n\to\infty}{\to} T$$

où T est une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Tracy-Widom

- Ce résultat ne dépend que de la symétrie initiale de la matrice. Pour des matrices réelles symétriques, le résultat n'est pas le même.

Loi de Tracy-Widom

- La loi de Tracy-Widom n'a pas d'expression simple. Elle est reliée à un système intégrable et à l'équation de Painlevé II
- Forme déterminentale: Soit $F(s) = \int_{-\infty}^{s} TW(s)ds$ la fonction de répartition de la densité de Tracy-Widom alors

$$F(s) = \det(I - A_{[0,s]})$$

où $\det(I - A_{[0,s]})$ est le déterminant de Fredholm sur $[0, s]$ associé au noyau d'Airy:

$$K(x, y) = \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai(y)Ai'(y)}{x - y}$$

- Expression avec Painlevé II (Jimbo-Miwa-Sato-Ueno):

$$F(s) = \exp(-\int_{s}^{+\infty} (x - s)q(x)^2 dx)$$

où $q(x)$ est la solution de l'équation de Painlevé II:

$$q''(x)^2 = xq(x) + 2q(x)^3 \ q(x) \underset{x \to \infty}{\sim} Ai(x)$$

- Forme intégrale permet de faire des calculs numériques...

Fonction de partition

- En physique statistique, si l'on a des particules en position x_i, il est utile de regarder la fonction de partition:

$$Z = \int_{R^n} d\vec{x} e^{-\mathcal{S}(x_1, \dots, x_n)}$$

où $\mathcal{S}(x_1, \dots, x_n)$ est l'action associée à la configuration $(x_1, \dots, x_n)$

- L'action se découpe souvent en:

$$\mathcal{S}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} V(x_i) + \mathcal{S}_{\text{interaction}}(x_1, \dots, x_n)$$

- Potentiel $V(x_i) = \frac{x_i^2}{2} + V_{\text{ext}}(x_i)$
- La trajectoire classique s'obtient en minimisant l'action

Fonction de partition pour les matrices aléatoires hermitiennes

Definition

La fonction de partition Z_n pour des matrices hermitiennes est donnée par:

$$Z_n = \int_{\mathcal{H}_n(\mathbb{C})} dM e^{-\frac{n}{T}\mathrm{Tr}(V(M))}$$

où $V(x)$ est un potentiel compatible (ex: polynomial de degré pair).

- La mesure sur les matrices hermitiennes est donnée par:

$$dM = \prod_{i=1} dM_{i,i} \prod_{i<j} dRe(M_{i,j}) dIm(M_{i,j})$$

- Diagonalisation:

$$Z_n = \int_{\mathcal{U}_n} dU d\lambda_1 \dots d\lambda_n \Delta(\lambda)^2 e^{-\frac{N}{T}\sum_{i=1}^n V(\lambda_i)}$$

où $\Delta(\lambda) = \prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)$ est le déterminant de Vandermonde.

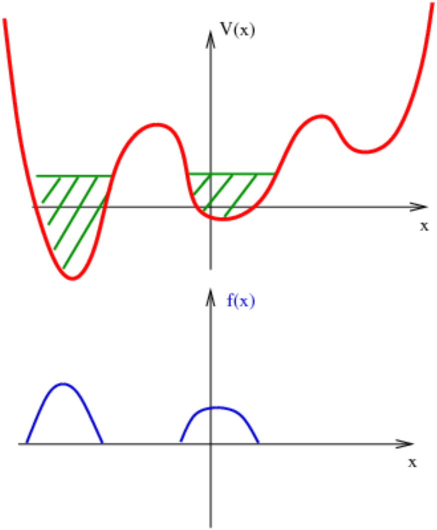
Gaz de v.p.

- Le problème sur les v.p. est donc:

$$\mathcal{S}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{n}{T} \sum_{i=1}^{n} V(\lambda_i) + 2 \ln |\lambda_i - \lambda_j|$$

- Compétition entre les puits du potentiel $V(x)$ et la répulsion logarithmique entre valeurs propres.
- Les v.p. ne sont pas indépendantes: gaz de v.p. soumis à une interaction logarithmique
- Si $V(x) = \frac{x^2}{2}$, on retrouve les matrices aléatoires gaussiennes.
- Le paramètre T controle la force du potentiel par rapport à la répulsion
- Question: Les v.p. vont-elles se condenser dans certaines zones? Si oui suivant quelle loi?

Image heuristique



Théorie potentiel

Theorem

Soit $d\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta(x-\lambda_i)$ *la densité empirique de v.p. Alors pour* $V(x) \underset{x\to\infty}{=} O(x^2)$*, on a:*

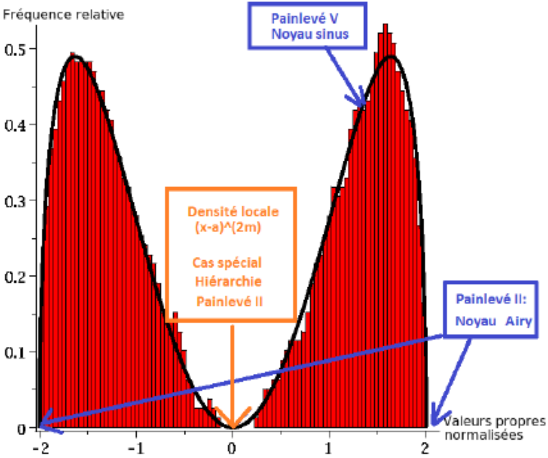
$$d\mu_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{weak}{\longrightarrow}} \rho(x)dx$$

où $\rho(x)$ *est une fonction continue par morceaux dont le support est une réunion finie d'intervalles* $[a_i, b_i]$*.*

- Pour $V(x) = x^2$ on retrouve la loi du demi-cercle.

Théorèmes d'universalité

- Existence de théorème d'universalité sur les statistiques locales
- La classe d'universalité dépend du type de point considéré



Définition

Definition

Soit $V(x)$ un potentiel polynomial de degré pair. On définit les polynomes orthogonaux $P_k(x)$ avec les relations:

$$\int_{\mathbb{R}} P_k(x)P_l(x)e^{-\frac{n}{2T}V(x)}dx = h_n\delta_{k,l} \text{ et } P_k(x) = x^k + \dots$$

- Ces polynomes existent et sont uniques et peuvent être obtenus par l'orthogonalisation de Gram-Schimdt de la base usuelle $1, x, x^2, \dots$
- Pour $V(x) = \frac{x^2}{2}$ on trouve les polynomes de Hermite:

$$P_k(x) = \frac{H_k(\sqrt{n}x)}{n^{\frac{k}{2}}} \text{ avec } H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

Lien avec les matrices aléatoires

Definition

Soit $V(x)$ un potentiel polynomial de degré pair. On définit les polynomes orthogonaux $P_k(x)$ avec les relations:

$$\int_{\mathbb{R}} P_k(x)P_l(x)e^{-\frac{n}{2T}V(x)}dx = h_n\delta_{k,l} \text{ et } P_k(x) = x^k + \dots$$

- Ces polynomes existent et sont uniques et peuvent être obtenus par l'orthogonalisation de Gram-Schimdt de la base usuelle $1, x, x^2, \dots$
- Pour $V(x) = \frac{x^2}{2}$ on trouve les polynomes de Hermite:

$$P_k(x) = \frac{H_k(\sqrt{n}x)}{n^{\frac{k}{2}}} \text{ avec } H_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$