

# Séminaire APSSE

## Puissances de matrices unitaires aléatoires

Marchal Olivier

19 Juin 2015

- 1 Généralités
  - Exemples classiques en matrices aléatoires
  - Questions actuelles sur les matrices aléatoires
- 2 Puissance de matrices unitaires
  - Différents temps de retour vers l'identité
  - Le modèle de particules indépendantes
  - Résultats connus sur les matrices unitaires
- 3 Retour fort
- 4 Déterminants de Toeplitz
  - Définition et propriétés générales
  - Application à notre cas
- 5 Modèle de matrices
  - Forme générale de l'asymptotique
  - Calcul de la densité d'équilibre
  - Résultats finaux
- 6 Premier retour

# Matrices aléatoires complexes

## Définition

Une matrice aléatoire complexe  $M_N$  est une matrice  $N \times N$  dont les entrées sont supposées indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi d'espérance nulle et de variance 1 (normalisation). La loi sur la diagonale peut être différente de la loi hors-diagonale.

## Théorème

Avec probabilité 1, il y a  $N$  valeurs propres simples  $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N)$ . On normalise les valeurs propres par  $\lambda_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\sqrt{N}}$ .

Question: La mesure empirique des valeurs propres

$\mu_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - \lambda_i)$  admet-elle une limite (en loi, en proba, p.s.) lorsque  $N \rightarrow \infty$ ?

Réponse...

# Universalité globale

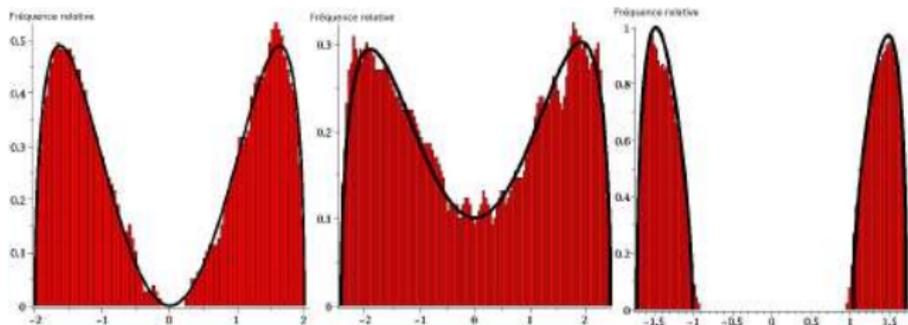
- La **mesure empirique** converge en loi vers une **mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue** qui ne dépend que de la **symétrie** de la matrice aléatoire: loi uniforme sur le disque unité, du demi-cercle.
- Théorème général (Erdős, Schlein, Yau, Tao, Vu, ...): Si  $X_{i,j}$ , **i.i.d.** (modulo symétrie) avec  $E(X_{i,j}) = 0$  et  $Var(X_{i,j}) = 1$  et  $\exists C > 0 / \mathbb{P}((X_{i,j}) \geq t^C) \leq e^{-t}$  alors la mesure empirique tend en loi vers la loi uniforme sur le disque (cas sans symétrie) ou vers la loi du demi-cercle (cas symétrique réelle ou hermitien).
- Ce n'est pas le résultat optimal.
- La condition d'indépendance peut être relâchée mais d'autres hypothèses sont nécessaires.

# Grandes questions sur les matrices aléatoires

- Obtenir les résultats optimaux sur les entrées pour obtenir la convergence: matrices de Wigner
- Le cas Gaussien peut se réécrire comme une mesure de type:

$$dM = \left( \prod_{i < j} d\text{Re}(M_{i,j}) d\text{Im}(M_{i,j}) \right) \left( \prod_{i=1}^N dM_{i,i} \right) e^{-cN\text{Tr}(MM^*)}$$

Généralisation au cas de mesure de poids  $e^{-cN\text{Tr}(V(M))}$  où  $V(x)$  est un potentiel polynomial. Ensemble invariant par changement de base unitaire  $\Rightarrow$  "gaz" de Coulomb  $2d$  de valeurs propres.



# Grandes questions sur les matrices aléatoires

- **Universalité locale** des v.p. dans le cas hermitien: La **statistique locale** (Ex: écart moyen entre deux v.p.) des v.p. dans le centre de la distribution est donnée par un **processus déterminantal** dont le noyau est la fonction sinus.
- Ce processus déterminantal est relié à l'**équation de Painlevé 5**.
- Processus déterminantaux similaires au voisinage des bords de la distribution limite: Noyau d'Airy, de Pearcey, etc. en relation avec des équations de Painlevé.
- Etude possible dans le cas hermitien avec des **polynômes orthogonaux** et leurs asymptotiques.
- Conclusion: Aspect **système intégrable** et algébrique pour le cas hermitien: Non traité aujourd'hui.

# Définition du problème

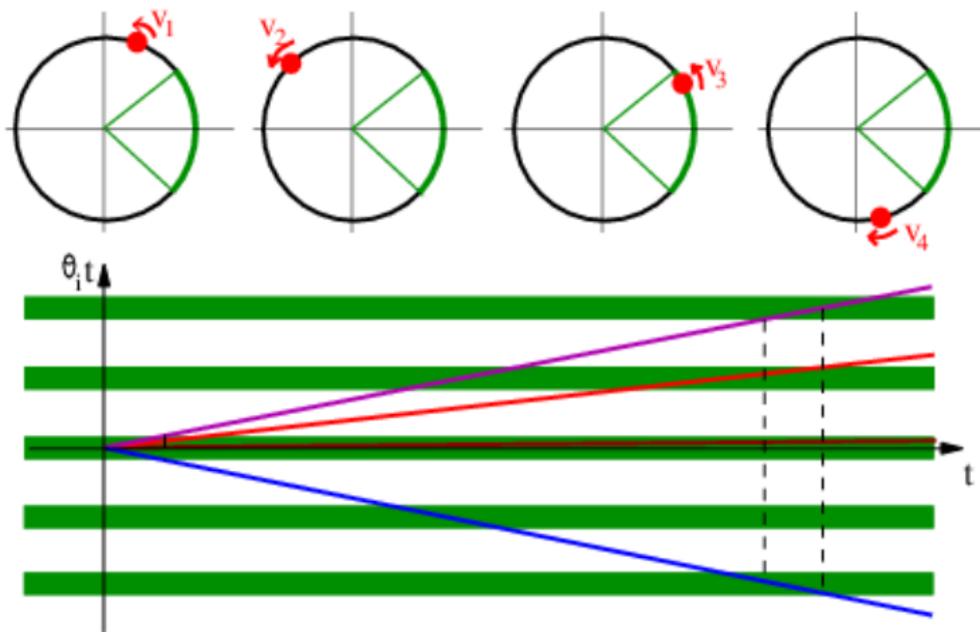
- Soit  $U_N$  une **matrice unitaire** tirée suivant la **mesure de Haar** de  $\mathcal{U}(N)$ . On note  $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N})$  les valeurs propres de  $U_N$  avec  $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ .
- On considère  $U_N(t) = (U_N)^t$  où  $t \in \mathbb{N}$  la puissance  $t^{\text{ième}}$  de  $U_N$ . Les valeurs propres de  $(U_N)^t$  sont  $(e^{it\theta_1}, \dots, e^{it\theta_N})$
- Pour  $t \notin \mathbb{N}$  on définit les valeurs propres par  $(e^{it\theta_1}, \dots, e^{it\theta_N})$ . A  $t = 0$  on a  $U_N(0) = I_N$ .
- Question: **Quelle est la probabilité que  $U_N(t)$  revienne “proche de” l’identité au temps  $t$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ ?**
- Existence de plusieurs définitions de la “proximité à l’identité”:

Retour fort:  $\forall 1 \leq i \leq N : t\theta_i \in [-\pi\epsilon, \pi\epsilon] \pmod{2\pi}$

Retour en moyenne:  $\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{it\theta_i} \right| \geq 1 - \delta$

Retour en partie réelle:  $\operatorname{Re} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{it\theta_i} \right) \geq 1 - \delta$

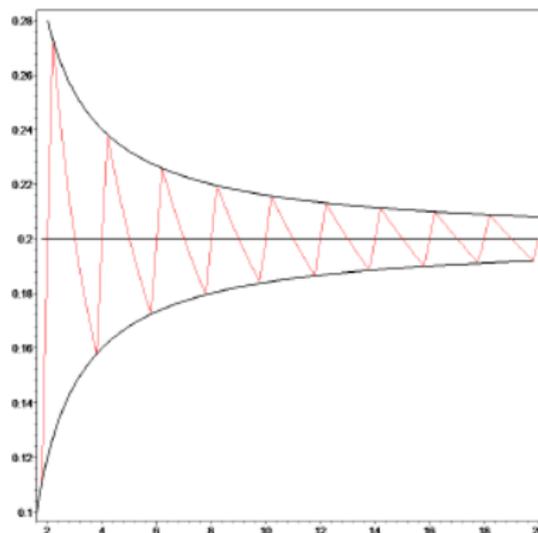
# Illustration du problème: retour fort



On tire des vitesses de rotation  $v_i$  aléatoirement dans  $[-\pi, \pi]$  (fixe aussi la position de départ). On regarde le temps de retour simultané dans la zone autour de 1.

# Un modèle jouet indépendant

- Soient  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  **i.i.d.** uniforme sur  $[-\pi, \pi]$ . Même question que précédemment: Quelle est la probabilité que  $(t\theta_1, \dots, t\theta_N)$  soit “proche” de l’identité au temps  $t$ ?
- Retour dans  $[e^{-i\pi\epsilon}, e^{i\pi\epsilon}]$ : Si  $\theta_i \sim \text{Unif}([-\pi, \pi])$ , alors  $t\theta_i \sim \text{Unif}([-t\pi, t\pi])$ . Proba. retour d’une v.p. au temps  $t$  donnée par:



# Un modèle jouet

Mathématiquement on peut l'exprimer par:

$$\mathbb{P}(|t\theta_i| \leq \epsilon \pmod{2\pi}) = \begin{cases} \frac{2\epsilon}{t} \lfloor \frac{t+\epsilon}{2} \rfloor + 1 - \frac{2}{t} \lfloor \frac{t+\epsilon}{2} \rfloor & \text{si } |t - 2\lfloor \frac{t+\epsilon}{2} \rfloor| \leq \epsilon \\ \frac{\epsilon(2\lfloor \frac{t+\epsilon}{2} \rfloor + 1)}{t} & \text{si } |t - 2\lfloor \frac{t+\epsilon}{2} \rfloor| > \epsilon \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} f(t)$$

Conclusion: La probabilité de retour fort au voisinage de l'identité au temps  $t$  dans le modèle indépendant est donnée par:

$$P_{N,\text{ind}}(t) = (\mathbb{P}(|t\theta_i| \leq \epsilon \pmod{2\pi}))^N = e^{-N|\ln f(t)|}$$

# Convergence des matrices unitaires

## Théorème (Diaconis, Shahshahani)

*Soit  $U_N$  une suite de matrices unitaires de taille  $N \times N$  alors les valeurs propres  $(u_1, \dots, u_N)$  tendent presque sûrement vers des variables indépendantes et distribuées suivant la loi uniforme du cercle unité*

## Théorème (Rains, Meckes, Meckes)

*Pour  $m > N$  fixé, les valeurs propres  $(u_{1,m}, u_{2,m}, \dots, u_{N,m})$  de  $(U_N)^m$  sont indépendantes et uniformément distribuées sur le cercle unité.*

## Théorème (Duits, Johansson)

*Soit  $Z$  une variable aléatoire  $\mathcal{N}(0, 1)$  complexe et soit  $k(N)$  une suite croissante d'entiers. Alors:*

$$\frac{1}{\sqrt{\min(N, k(N))}} \operatorname{Tr} \left( U_N^{k(N)} \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} Z$$

# Cas des retours en moyenne/réel

- Rappel: Retour en moyenne:  $\frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N e^{it\theta_i} \right| \geq 1 - \delta$
- Point important: On peut le réécrire comme:

$$\frac{1}{n} \left| \text{Tr} \left( (U_n)^t \right) \right| \geq 1 - \delta$$

- On peut donc appliquer Duits, Johansson. On trouve pour  $t \in \mathbb{N}$  fixé ou pour une séquence  $t_N > N$  la proba. de retour moyen:

$$P_{N,\text{moyen}}(t) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\frac{(1-\delta)^2 N^2}{t}}$$

$$P_{N,\text{moyen}}(t_N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} e^{-(1-\delta)^2 N}$$

- Pour  $t$  fixé on trouve une probabilité de l'ordre de  $e^{-\alpha N^2}$  ce qui est différent du modèle indépendant en  $e^{-\alpha N}$
- Le cas réel se traite de façon similaire avec des résultats similaires.

# Cas du retour fort

- Rappel: Retour fort:  $\forall 1 \leq i \leq N : |t\theta_i| \leq \pi\epsilon \pmod{2\pi}$
- Différence avec le cas des retour moyens: on n'a **pas de moyennes** donc pas de **théorème central limite** et pas de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- Si on utilise l'indépendance quand  $N \rightarrow \infty$  on retombe sur le modèle indépendant dont l'ordre de grandeur n'est pas bon.
- Pour  $t > N$  et  $t \in \mathbb{N}$ , l'indépendance des valeurs propres est assurée donc le **modèle indépendant** s'appliquera.
- On s'intéresse ici à  $t$  fixé et  $N \rightarrow \infty$  donc malheureusement  $t > N$  ne sera pas réalisé.
- On souhaiterait aussi obtenir des résultats pour  $t \notin \mathbb{N}$ .

# Diagonalisation du problème

## Théorème (Weyl)

La mesure de Haar de  $\mathcal{U}(N)$  se diagonalise par une mesure absolument continue sur les valeurs propres donnée par:

$$\mu_N(u_1, \dots, u_N) = \Delta(u_1, \dots, u_N)^2 e^{-N \sum_{i=1}^N \ln u_i} \left( \prod_{i=1}^N du_i \right)$$

$$\text{où } \Delta(u_1, \dots, u_N) = \prod_{i < j} (u_i - u_j)$$

En termes d'angles  $u_i = e^{i\theta_i}$  la mesure se réécrit comme:

$$\mu_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = \left( \prod_{i < j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2 \right) \left( \prod_{i=1}^N d\theta_i \right)$$

Conséquences: **V.p. non indépendantes:** les  $\theta_i$  subissent une **répulsion à courte distance**  $\sim |\theta_i - \theta_j|^2$ .

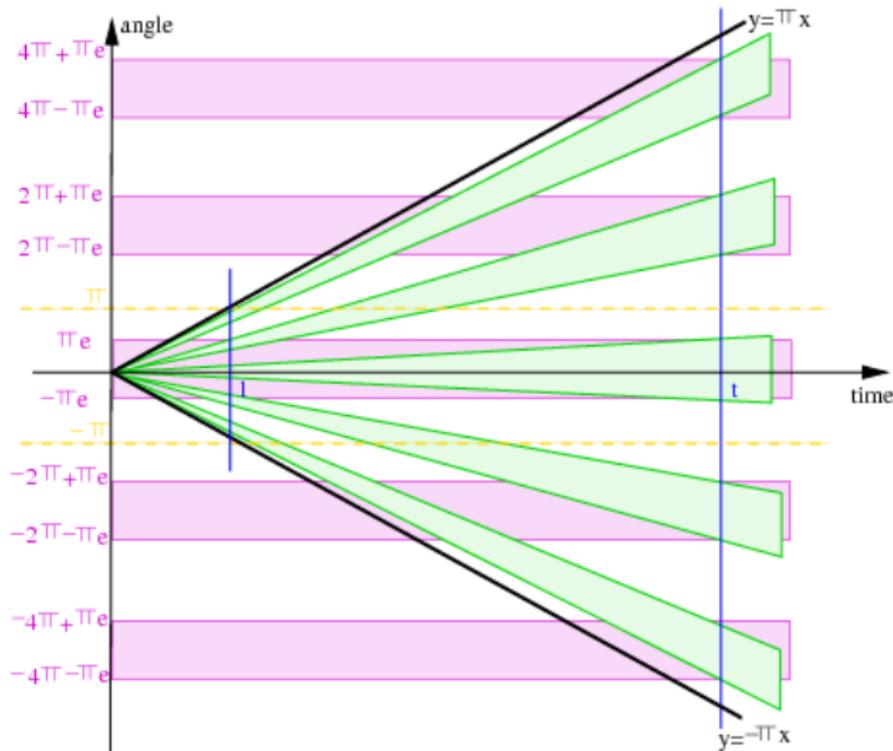
# Ressemblance avec des matrices hermitiennes

- Ressemblance dans l'écriture en  $u_i$  avec des v.p. de matrices hermitiennes:

$$\tilde{\mu}_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)^2 e^{-N \sum_{i=1}^N V(\lambda_i)} \left( \prod_{i=1}^N d\lambda_i \right)$$

- **Support est  $\mathcal{C}$  et non  $\mathbb{R}$ .** Potentiel logarithmique  $V(x) = \ln x$  non analytique.
- Les  $u_i$  sont complexes donc l'interprétation en termes d'énergie est problématique.
- La fonction de partition des matrices hermitiennes est connue pour être d'ordre  $e^{-\alpha N^2}$ .

# Probabilité de retour fort à $t$ fixé



## Probabilité de retour fort à $t$ fixé

- A  $t$  fixé, le support  $I(t)$  de  $\theta_i$  est une réunion d'intervalles:

$$\forall t \in [2k + \epsilon, 2(k+1) - \epsilon] : I(t) = \bigcup_{j=-k}^k \left[ \frac{2\pi j - \pi\epsilon}{t}, \frac{2\pi j + \pi\epsilon}{t} \right]$$

$$\forall t \in [2k - \epsilon, 2k + \epsilon] : I(t) = \left( \bigcup_{j=-k+1}^{k-1} \left[ \frac{2\pi j - \pi\epsilon}{t}, \frac{2\pi j + \pi\epsilon}{t} \right] \right) \cup \left[ \frac{2\pi k - \pi\epsilon}{t}, \pi \right] \cup \left[ -\pi, -\frac{2\pi k - \pi\epsilon}{t} \right]$$

- La probabilité de retour fort au temps  $t$  est:

$$P_{\text{fort}}(t) = \frac{1}{Z_N} \int_{I(t)^N} \left( \prod_{i < j}^N |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2 \right) \left( \prod_{i=1}^N d\theta_i \right)$$

$$\text{où } Z_N = \int_{[-\pi, \pi]^N} \left( \prod_{i < j}^N |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2 \right) \left( \prod_{i=1}^N d\theta_i \right)$$

- Comment calculer ces intégrales ou leur asymptotique  $N \rightarrow \infty$ ?

Calcul de  $Z_N$ 

$$\begin{aligned}
Z_N &= \int_{[-\pi, \pi]^N} \prod_{i < j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2 d\theta_1 \dots d\theta_N \\
&= \int_{[-\pi, \pi]^N} d\theta_1 \dots d\theta_N \det \left( \left( e^{i(j-1)\theta_i} \right)_{i,j=1..N} \right) \det \left( \left( e^{-i(j-1)\theta_i} \right)_{i,j=1..N} \right) \\
&= \int_{[-\pi, \pi]^N} d\theta_1 \dots d\theta_N \sum_{\sigma, \tau \in S_N} (-1)^{|\sigma|+|\tau|} \prod_{k=1}^N e^{i(\sigma(k)-1)\theta_k} \prod_{r=1}^N e^{-i(\tau(r)-1)\theta_r} \\
&= \sum_{\sigma, \tau \in S_N} (-1)^{|\sigma|+|\tau|} \int_{[-\pi, \pi]^N} d\theta_1 \dots d\theta_N \prod_{k=1}^N e^{i(\sigma(k)-\tau(k))\theta_k} \\
&= \sum_{\sigma, \tau \in S_N} (-1)^{|\sigma|+|\tau|} \prod_{k=1}^N \left( \int_{[-\pi, \pi]} d\theta_k e^{i(\sigma(k)-\tau(k))\theta_k} \right) \\
&= (2\pi)^N N!
\end{aligned}$$

# Déterminant de Toeplitz

## Définition

Les intégrales de la forme:

$$I_N(f) = \int_{[-\pi, \pi]^N} \prod_{i < j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2 f(e^{i\theta_1}) \dots f(e^{i\theta_N}) d\theta_1 \dots d\theta_N$$

où  $f$  est intégrable sur  $\mathcal{C}$  sont appelées intégrales de Toeplitz. Elles s'expriment comme le déterminant de la matrice de Toeplitz associée:

$$I_N(f) = (2\pi)^N N! \det (T_{i,j}(f) = t_{i-j})_{1 \leq i, j \leq N} \quad \text{où } t_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta}$$

Une matrice  $A$  de taille  $N \times N$  est dite de Toeplitz si  $A_{i,j}$  ne dépend que de l'écart à la diagonale  $i - j$ .

# Déterminant de Toeplitz

## Théorème

Inversement on peut reconstruire  $f(x)$  sur  $\mathcal{C}$  à partir de sa matrice de Toeplitz par:

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^N t_k e^{ik\theta}$$

- $Z_N$  peut se calculer par cette méthode avec la fonction constante  $f(x) = 1$  ce qui donne  $t_0 = 1$  et  $t_k = 0$  si  $k \neq 0$
- Une  $N$ -intégrale se ramène à un déterminant  $N \times N$ .
- Théorèmes généraux donnant l'asymptotique des déterminants de Toeplitz quand  $N \rightarrow \infty$ : Szegő pour le cas de  $f > 0$  continue
- Fisher-Hartwig si  $f(x)$  a des sauts et reste strictement positive.
- Résultat (à l'ordre dominant seulement) de Widom pour le cas où  $f = \mathbf{1}_{[\theta, \pi - \theta]}$
- Seul Widom donne un ordre de grandeur en  $e^{-\alpha N^2} \Rightarrow f$  s'annule sur  $\mathcal{C}$  est l'élément primordial.

# Déterminant de Toeplitz

Dans notre cas,  $f(x)$  est l'indicatrice d'une union d'intervalles  $\Rightarrow$  Aucun cas ne s'applique. Coeffs. de Fourier se calculent explicitement:

$$P_N(t \in [2R + \epsilon, 2(R + 1) - \epsilon]) = \det \left[ \frac{\sin \frac{(j-i)(2R+1)\pi}{t} \sin \frac{(j-i)\pi\epsilon}{t}}{\pi(j-i) \sin \frac{(j-i)\pi}{t}} \right]_{1 \leq i, j \leq N}$$

$$P_N(t \in [2R - \epsilon, 2R + \epsilon]) = \det \left[ \delta_{j-i=0} - \frac{\sin \frac{2(j-i)\pi R}{t} \sin \frac{(1-\epsilon)(j-i)\pi}{t}}{\pi(j-i) \sin \frac{(j-i)\pi}{t}} \right]$$

Question: **Comment obtenir le développement asymptotique  $N \rightarrow \infty$  de ces déterminants?**

Remarque: Au moins on peut **évaluer numériquement les déterminants** (matrice symétrique) plus facilement que les intégrales.

# Simplification aux temps entiers

Les formules se simplifient si  $t \in \mathbb{N}$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ :

$$P_N(2k+1) = \epsilon^N \det \left[ \sin_c \left( \frac{(j-i)\pi\epsilon}{2k+1} \right) \delta_{(j-i) \equiv 0 [2k+1]} \right]_{1 \leq i, j \leq N}$$

$$P_N(2k) = \det \left[ \delta_{j-i} - (1-\epsilon) \sin_c \left( \frac{(j-i)\pi(1-\epsilon)}{2k} \right) \delta_{(j-i) \equiv 0 [2k]} \right]_{1 \leq i, j \leq N}$$

- Déterminants **essentiellement creux** mais toujours pas de formules connues quand  $N \rightarrow \infty$ .
- Pour  $t > N$ , seule la diagonale est non-nulle. On retrouve

$$P_{\text{fort}, N}(t) = \epsilon^N = e^{-N |\ln \epsilon|}$$

- Compatible avec le fait que  $((u_1)^m, \dots, (u_N)^m)$  sont i.i.d. uniformes dès que  $m > N$ .

# Modèle de matrice hermitien

- Approche déterminant Toeplitz donne  $t > N$  ainsi qu'une formule alternative plus rapide numériquement.
- Mais **pas de méthode générale de calcul** ou d'estimation.
- Changement d'outil: Utiliser la **similarité avec les modèles de matrices hermitiennes**.
- Avantage: on connaît beaucoup d'outils (intégrabilité) pour ces matrices hermitiennes.
- Inconvénient: trouver une méthode pas trop sensible au domaine d'intégration ( $\mathcal{C}$  au lieu de  $\mathbb{R}$ )

# Forme générale de l'asymptotique

Première étape: Obtenir la forme générale de l'asymptotique:

**Théorème (Borot-Guionnet-Kozlowski, 2014)**

*L'interaction étant d'ordre  $|\theta_i - \theta_j|^2$  à courte distance, les intégrales du type:*

$$I_N(t) = \int_{I(t)^N} \prod_{i < j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2 d\theta_1 \dots d\theta_N$$

*vont (sous certaines hypothèses) voir les v.p. se condenser sur  $g + 1$  intervalles et avoir un développement à  $N \rightarrow \infty$  de la forme:*

$$\begin{aligned} \ln I_N(t) &= N^2 F_{\epsilon^*}^{[-2]} + N \ln N + \frac{1}{4}(g+1) \ln N + F_{\epsilon^*}^{[0]} \\ &+ \ln \left( \Theta_{-N\epsilon^*} \left( \mathbf{0} \mid F_{\epsilon^*}^{[-2],(2)} \right) \right) + O\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

# Conditions techniques

- $I(t)$  réunion de  $g + 1$  segments  $A_i$  non-réduit à un point  $\Rightarrow$  exclut les temps isolés  $t = 2\mathbb{N} + \epsilon$  mais sinon OK
- La fonction:

$$T(\theta_i, \theta_j) = \ln \left( \frac{|e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2}{|\theta_i - \theta_j|^2} \right) = \ln \left( \sin_c^2 \left( \frac{\theta_i - \theta_j}{2} \right) \right)$$

est continue et bornée sur  $I(t)$ : OK

- $T$  est holomorphe dans un voisinage de  $I(t)$ : OK
- La fonctionnelle d'énergie:

$$\mathcal{E}[\mu] = - \int_{I(t)^2} \left( \frac{T(x_1, x_2)}{2} + \frac{\beta}{2} \ln |x_1 - x_2| \right) d\mu(x_1) d\mu(x_2)$$

admet un unique minimum sur l'espace des probabilités sur  $I(t)$ : OK  
par convexité de  $T$

## Conditions techniques 2

- Condition de non-criticalité: La mesure d'équilibre  $\mu_{eq}$  (unique mesure minimisant  $\mathcal{E}$ ) est **non-critique** dans le sens où son support  $\mathcal{S}$  est l'union de  $g_0 + 1$  segments non réduits à un point et:

$$d\mu_{eq}(x) = \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{S}}(x)dx}{2\pi} M(x) \prod_{\alpha \in \partial\mathcal{S} \setminus \partial I(t)} |x - \alpha|^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha \in \partial\mathcal{S} \cap \partial I(t)} |x - \alpha|^{-\frac{1}{2}}$$

avec  $M(x) > 0$ : pas OK

- Cela suppose de connaître la mesure d'équilibre, i.e. la mesure limite des v.p.
- Même pas évident que  $g_0 = g$ , i.e. que les v.p. vont utiliser tout l'espace disponible.
- Argument généraux de transfert de masse impossible.
- Solution partielle: Pour  $I(t)$  restreint à **un intervalle** ou  $t \in \mathbb{N}$  on peut connaître  $\mu_{eq}$  explicitement et vérifier qu'elle est non-critique.

# Equations de boucles

- La méthode **algébrique** des “équations de boucle” est relativement insensible au contour.
- On définit  $W_1(x) = \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{x-\lambda_i} \right\rangle$ : transformée de Stieltjes de la mesure empirique.
- $W_1$  et les  $W_n(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_n=1}^N \frac{1}{x_1-\lambda_{i_1}} \dots \frac{1}{x_n-\lambda_{i_n}} \right\rangle_c$  satisfont un groupe d'équations algébriques.
- La présence du contour impose certains poles au bord du domaine.
- Au premier ordre on peut obtenir une **équation algébrique partielle** fermée sur  $y(x) = W_1^{(0)}(x) - \frac{1}{2x}$
- Exemple:  $I = [\theta_0, \theta_1]$ :

$$y(x) = \frac{1}{4x^2} - \frac{\mu + \nu}{x} + \frac{\mu}{x - e^{i\theta_0}} + \frac{\nu}{x - e^{i\theta_1}} = \frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{4x^2(x - e^{i\theta_0})(x - e^{i\theta_1})}$$

- Il reste à déterminer  $(\mu, \nu) \leftrightarrow (\alpha, \gamma)$  pour obtenir la mesure d'équilibre.

# Calcul de la densité d'équilibre

Deuxième étape: Equations de boucles et calcul de la densité d'équilibre

- $I = [\theta_0, \theta_1]$  donne  $\exists(\alpha, \gamma) \in \mathbb{C}^2$  tel que:

$$y(x) = \frac{1}{4x^2} - \frac{\mu + \nu}{x} + \frac{\mu}{x - e^{i\theta_0}} + \frac{\nu}{x - e^{i\theta_1}} = \frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{4x^2(x - e^{i\theta_0})(x - e^{i\theta_1})}$$

- Si  $\alpha \neq \gamma$  alors la densité d'équilibre aura un support  $[e^{i\theta_0}, \alpha] \cup [\gamma, e^{i\theta_1}] \Rightarrow$  **Densité d'équilibre critique**
- Si  $\alpha = \gamma$  alors **densité non-critique**  $\Leftrightarrow \alpha \notin [e^{i\theta_0}, e^{i\theta_1}]$
- Heureusement:  $y\left(e^{-i\frac{\theta_0 + \theta_1}{2}}\right) = 0$  et par **symétrie de conjugaison et rotation** ce zéro est double.

# Preuve

$$\begin{aligned}
 W_1 \left( -e^{i\frac{\theta_0+\theta_1}{2}} \right) &= -e^{-i\frac{\theta_0+\theta_1}{2}} \left\langle \sum_{i=1}^{N \in \mathcal{C}_0} \frac{1}{1 + e^{-i\frac{\theta_0+\theta_1}{2}} u_i} \right\rangle \\
 &= -e^{-i\frac{\theta_0+\theta_1}{2}} \left\langle \sum_{i=1}^{N \in \mathcal{C}_0} \frac{1}{1 + \tilde{u}_i} \right\rangle_{\tilde{u}_i \in \left[ e^{-i\frac{\theta_1-\theta_0}{2}}, e^{i\frac{\theta_1-\theta_0}{2}} \right]}
 \end{aligned}$$

puis par symétrie ( $\frac{1}{u} = \bar{u}$  pour  $u \in \mathcal{C}$ ):

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \tilde{u}_i} \right\rangle_{\tilde{u}_i \in \left[ e^{-i\frac{\theta_1-\theta_0}{2}}, e^{i\frac{\theta_1-\theta_0}{2}} \right]} = \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \frac{1}{\tilde{u}_i}} \right\rangle_{\tilde{u}_i \in \left[ e^{-i\frac{\theta_1-\theta_0}{2}}, e^{i\frac{\theta_1-\theta_0}{2}} \right]}$$

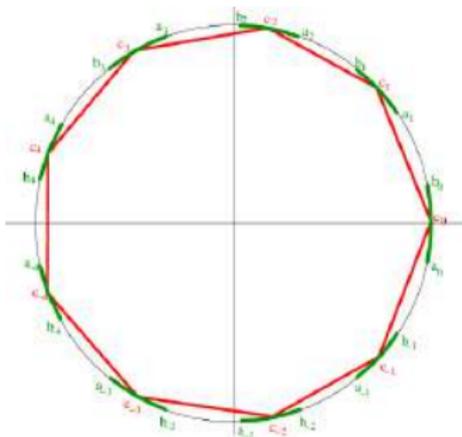
et donc:

$$\begin{aligned}
 2W_1 \left( -e^{i\frac{\theta_0+\theta_1}{2}} \right) &= -e^{-i\frac{\theta_0+\theta_1}{2}} \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + \tilde{u}_i} + \frac{\tilde{u}_i}{\tilde{u}_i + 1} \right\rangle_{\tilde{u}_i \in \left[ e^{-i\frac{\theta_1-\theta_0}{2}}, e^{i\frac{\theta_1-\theta_0}{2}} \right]} \\
 &= -Ne^{-i\frac{\theta_0+\theta_1}{2}}
 \end{aligned}$$

# Cas des temps entiers $t \in \mathbb{N}$

$t \in \mathbb{N}$ : Beaucoup d'intervalles  $\Rightarrow$  beaucoup d'indéterminées dans la forme de  $y(x)$ .

Point clé: Pour  $t \in \mathbb{N}$ : Invariance par rotation discrète: Symétrie exceptionnelle:



$\Rightarrow$  On se ramène au cas à un seul intervalle. Puis on observe que:

$$\forall 0 \leq j \leq 2k : y\left(-e^{\frac{2i\pi j}{2k+1}}\right) = 0 \text{ ou } \forall 0 \leq j \leq 2k - 1 : y\left(e^{\frac{i\pi}{k} + \frac{2i\pi j}{2k}}\right) = 0$$

$\Rightarrow$  Détermine la fonction  $y(x)$  complètement: elle est **non-critique**

# Récurrance topologique

## Théorème

*On peut appliquer la “récurrance topologique” à la courbe spectrale  $y(x)$  pour obtenir les nombres  $F^{[2k]}$  du développement asymptotique.*

- A priori, ordre arbitrairement grand possible. En pratique les calculs deviennent vite impossibles pour  $k \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \ln I_N(t) = & N^2 F_{\epsilon^*}^{[-2]} + N \ln N + \frac{1}{4}(g+1) \ln N + F_{\epsilon^*}^{[0]} \\ & + \ln \left( \Theta_{-N\epsilon^*} \left( \mathbf{0} \mid F_{\epsilon^*}^{[-2],(2)} \right) \right) + O \left( \frac{1}{N} \right) \end{aligned}$$

- $\epsilon^*$ : vecteur des proportions de v.p. sur chaque intervalle de  $\mu_{\text{eq}}$ .  
Connu par symétrie dans le cas à 1 intervalle ou aux temps entiers.
- En revanche,  $F^{[-2],(2)}$ : dérivée de  $F^{[-2]}$  par rapport à  $\epsilon^*$  reste inaccessible même pour des temps entiers.
- Pour **un seul intervalle**, seuls les  $F^{[2k]}$  apparaissent et donc **la méthode fournit un résultat** à tout ordre en théorie.

# Résultats

## Théorème

Pour  $\forall t \in [\epsilon, 2 - \epsilon]$ , la probabilité d'avoir un retour fort est:

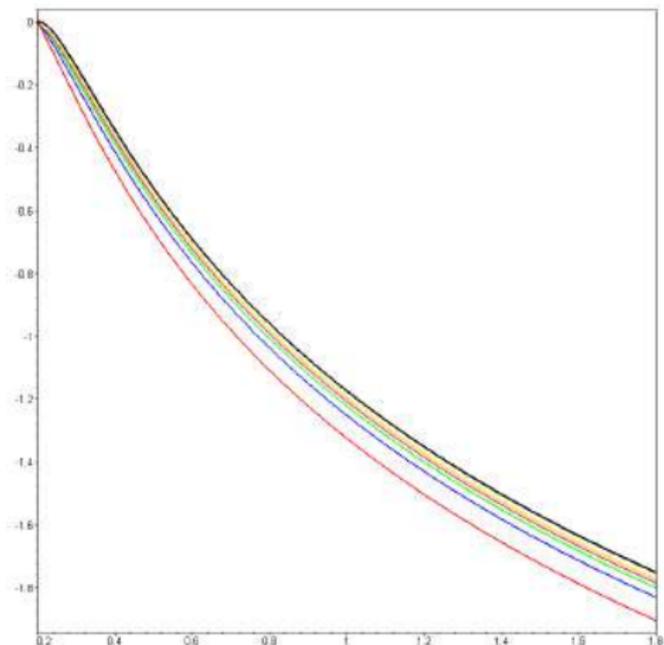
$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \ln P_{N, \text{fort}}(t) + \frac{1}{N^2} \ln((2\pi)^N N!) \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \ln \left( \sin \frac{\pi\epsilon}{2t} \right) + \frac{\ln N}{N} + \frac{1}{4} \frac{\ln N}{N^2} \\ & + \frac{1}{24N^2} \ln \left( \frac{2 \sin^3 \frac{\pi\epsilon}{t}}{\tan \frac{\pi\epsilon}{2t}} \right) + \frac{1}{64N^4} \frac{1 - 3 \cos \left( \frac{\pi\epsilon}{t} \right)}{1 + \cos \left( \frac{\pi\epsilon}{t} \right)} + O \left( \frac{1}{N^6} \right) \end{aligned}$$

## Théorème

Aux temps entiers  $t = k \in \mathbb{N}^*$ , la probabilité de retour fort est:

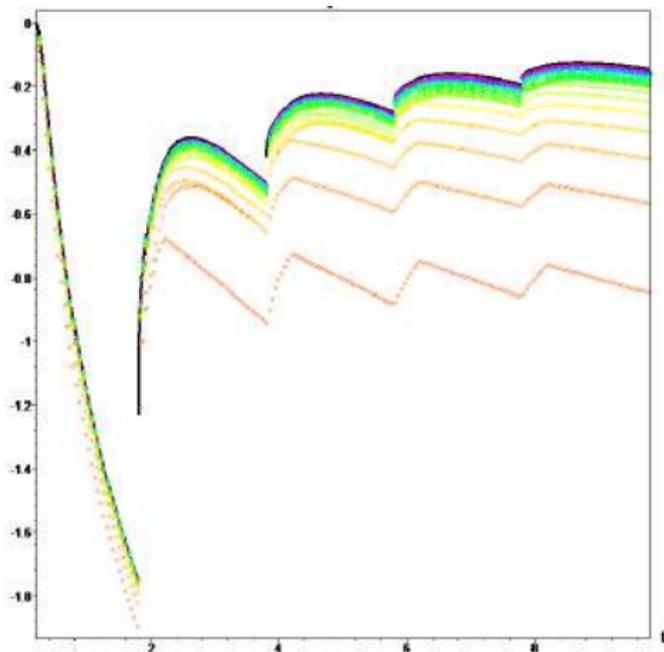
$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \ln P_{N, \text{fort}}(k) + \frac{1}{N^2} \ln((2\pi)^N N!) = \frac{1}{k} \ln \left( \sin \frac{\pi\epsilon}{2} \right) + \frac{\ln N}{N} + \frac{k}{4} \frac{\ln N}{N^2} \\ & - \frac{k}{24N^2} \left( 2 \ln(k) + \ln \left( 4 \tan \frac{\pi\epsilon}{2} \right) \right) + \frac{1}{N^2} \ln \left( \Theta_{-N\epsilon^*} \left( \mathbf{0} \mid F_{\epsilon^*}^{[-2], (2)} \right) \right) \\ & + o \left( \frac{1}{N^2} \right) \text{ avec } \epsilon^* = \left( \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k} \right) \in \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

# Simulations



Tracé de  $P_{N,fort}(t)$  pour  $\epsilon \leq t \leq 2 - \epsilon$ . En noir: Résultat théorique. En couleur: Calculs exact pour différentes valeurs de  $N$

# Simulations



Tracé de  $P_{N,\text{fort}}(t)$  pour  $t \leq 10$ . En noir: Résultat théorique (obtenue avec approximation pour  $t \notin \mathbb{N}$ ). En couleur: Calculs exacts (déterminants de Toeplitz) pour  $N$  de 2 à 20.

# Temps de premier retour

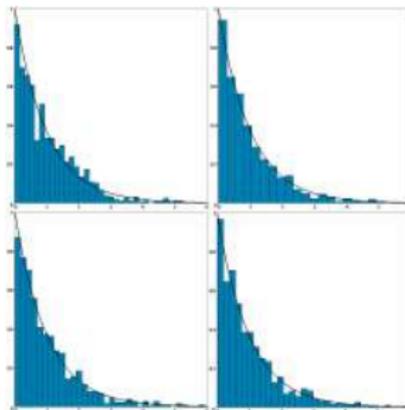
## Définition

Soit  $\tau_{N,\text{fort}}$  la variable aléatoire représentant le temps de premier retour fort.

## Conjecture

Pour  $N$  grand on a :

$$\frac{N\tau_{N,\text{fort}}}{4\epsilon^{-(N-1)}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{Loi}} \mathcal{E}(1) \text{ Loi exponentielle de paramètre 1}$$



# Heuristique

A  $\tau_{N,\text{fort}}$ , une des v.p. rentre dans la zone  $[-\pi\epsilon, \pi\epsilon] \Rightarrow$  les seuls temps possibles sont:

$$t_{i,k} = \frac{2\pi k}{|\theta_i|} - \frac{\epsilon}{2} \text{Sign}(\theta_i), \quad \forall 1 \leq i \leq N \text{ and } k \in \mathbb{N}^*$$

On définit alors les variables aléatoires:

$$S_{i,k} = \mathbf{1}_{\left|t_{i,k} \frac{\theta_1}{2\pi}\right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \dots, \left|t_{i,k} \frac{\theta_N}{2\pi}\right| \leq \frac{\epsilon}{2}}$$

qui sont des variables de Bernoulli de paramètre  $p = \epsilon^{N-1} \ll 1$ . Ainsi  $S_{i,k} = 1$  est un évènement rare, ainsi  $\tau_{N,\text{fort}}$  est le **premier succès de variables de Bernoulli dépendantes associées à des évènements rares**.

Idee: **Méthode de Stein** pour la convergence vers une loi exponentielle. Mais **pas de contrôle suffisant sur la dépendance** (à portée infinie ici) pour appliquer des résultats connus.

# Références

O. Marchal, “Matrix models, Toeplitz determinants and recurrence times for powers of random unitary matrices”, *Random Matrices: Theory and Applications*, RMTA-D-15-00001R2 (2015).

