Du monde formel au monde convergent

Marchal Olivier

Université Jean Monnet St-Etienne, France
Institut Camille Jordan, Lyon, France
Institut Universitaire de France

22 Juin 2023

Un exemple historique: série géométrique

Identité géométrique

Série géométrique partielle

Soit q un nombre complexe et N un entier positif alors

$$\sum_{i=0}^{N} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

- Identité algébrique connue depuis l'Antiquité (Euclide).
- Preuve par récurrence ou par téléscopage:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N} q^i &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^N \\
-q\sum_{i=0}^{N} q^i &= -q - q^2 - \ldots - q^N - q^{N+1} \\
(1-q)\sum_{i=0}^{N} q^i &= 1 + (q - q) + (q^2 - q^2) + \cdots + (q^N - q^N) - q^{N+1} = 1 - q^{N+1}
\end{aligned}$$

- Nombreuses applications ((dé)croissance exponentielle, intérêts composés en banque, suites géométriques, probabilités, etc.)

Série géométrique

Série géométrique

Série géométrique partielle: $q \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{N} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Que se passe t-il pour N grand?

- $q = \frac{1}{4}$

$$N = 10 \ : \ 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^N = \frac{1398101}{1048576} = 1.333333015$$

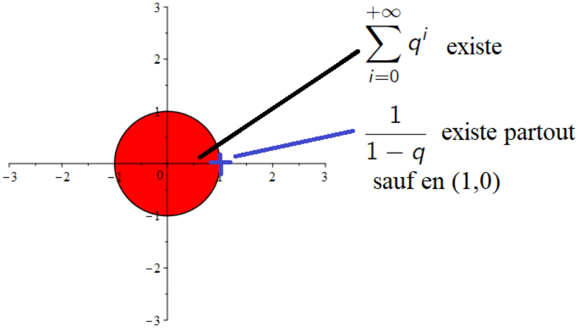
$$\Rightarrow \lim_{N \to \infty} 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^N = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1.333333$$

- Pour $q = 3$:

$$N = 10 \ : \ 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{10} = 88573 = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3}$$

$$N \to \infty \ : \ \lim_{N \to \infty} 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^N = +\infty \ \text{ mais } \ \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$$

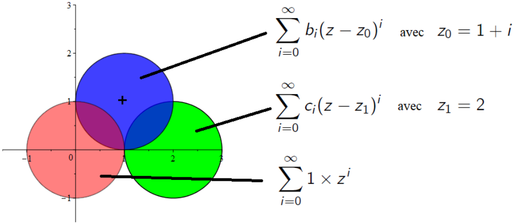
Rayon de convergence



- $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ a un **rayon de convergence** égal à 1.
- Fonctions développables en série entière, développements de Taylor: 18$^{\text{ème}}$ siècle.
- Théorème général sur les rayons de convergence des fractions rationnelles.

Prolongement analytique

Comment à partir de $\sum_{i=0}^{\infty} 1 \times z^i$ obtenir la valeur en $z = 2$?



- Etape 1: A partir de $\sum_{i=0}^{\infty} 1 \times z^i$, obtenir de l'information sur les coefficients $(b_i)_{i \geq 0}$
- Etape 2: A partir des coefficients $(b_i)_{i \geq 0}$, obtenir de l'information sur les coefficients $(c_i)_{i \geq 0}$.
- Etape 3: c_0 donnera la valeur en $z = 2$.

Prolongement analytique et analyse complexe

- Théorie du prolongement analytique des **fonctions de la variable complexe**.
- Théorie de l'analyse complexe, des **fonctions holomorphes** (niveau *L*3 de mathématiques).
- Déformations de contours, homotopie, théorème des résidus, etc.
- Théorie formalisée au 19ème siècle (Cauchy, Riemann, Abel, etc.) et au 20ème siècle (Borel, Lebesgue, Hardy, Littlewood, etc.).
- **Outil puissant des mathématiques modernes** y compris en théorie des nombres, algèbre, géométrie, etc.
- Ouvre la voie à la **géométrie complexe** (variétés, surfaces de Riemann).

Développements perturbatifs vs. exacts

Projet de recherche IUF

- Domaine des **systèmes intégrables** et de développements asymptotiques exacts.
- A l'interface entre beaucoup de domaines de mathématiques:
  1. Géométrie (algébrique, différentielle, complexe)
  2. Combinatoire (géométrie énumérative, cartes aléatoires, etc.)
  3. Probabilités (matrices aléatoires)
  4. Equations différentielles (EDP)
  5. Algèbre (algèbres de Lie, opérades, groupes de tresses)
  6. Analyse complexe (prolongements analytiques, resommation de Borel)
  7. Physique mathématique (gravité quantique, gaz de Coulomb)
- Situation **atypique** en mathématiques...

Solutions formelles d'équations différentielles

Solutions formelles

Etude de famille d'**équations différentielles de type Schrödinger** dites "intégrables" :

$$\hbar^2\psi''(\lambda) + V(\lambda)\psi(\lambda) = 0 \ , \ \ V \ \text{ fraction rationnelle}$$

Pas de solution explicite connue $\Rightarrow$ On cherche une solution formelle:

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= \exp\left(\frac{\psi_{-1}(\lambda)}{\hbar} + \psi_0(\lambda) + \psi_1(\lambda)\hbar + \psi_2(\lambda)\hbar^2 + \dots\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=-1}^{\infty} \psi_k(\lambda)\hbar^k\right)\end{aligned}$$

Une formule de récurrence permet d'obtenir les termes $(\psi_k(\lambda))_{k\geq -1}$.

Solution seulement formelle

- $\psi(\lambda) = \exp\left(\sum_{k=-1}^{\infty} \psi_k(\lambda)\hbar^k\right)$ ne converge nulle part. On parle de "développements perturbatifs" ou "solution formelle".
- Coefficients $(\psi_k(\lambda))_{k\geq -1}$ permettent de compter certains objets géométriques (invariants de Gromov-Witten, etc.) même si la série n'a pas de sens analytique.
- **Comment définir une solution "exacte" (aussi appelée non-perturbative) à partir du seul développement perturbatif?**
- Problème très similaire à l'exemple historique sauf que l'on ne dispose même pas de disque de convergence au départ.
- Situation fréquente en physique théorique: diagrammes de Feymann en théorie des champs, approximations de petits paramètres. Typique de la physique théorique du 20$^{\text{ème}}$ siècle.
- **Les premiers termes du développement formel collent bien aux observations/simulations ... puis la situation se dégrade avec les suivants...**

Outils généraux et conclusion

- Méthode 1: Resommation de Borel + Prolongement analytique dans l'espace de Borel + Retour à l'espace initial (transformée de Laplace inverse). **Methode limitée à certains cas** (dit de genre 0).
- Méthode 2: Modification du développement perturbatif: ajout d'une transformée de Fourier-Laplace discrète (série → **trans-série**). Problème: **Théorie analytique des trans-séries à construire**.
- Permet d'obtenir l'existence et l'unicité d'une solution ayant le développement perturbatif formel souhaité mais **seulement dans certains secteurs du plan complexe**.
- Le recollement des secteurs fait apparaitre des **sauts brutaux de la solution** (phénomènes de Stokes). Eléments fondamentaux pour la physique et applications. Cohérent avec les simulations/observations.
- Deux méthodes (ré)apparues ces dix dernières années (E. Delabaere, O. Costin, K. Iwaki, N. Nikloaev, M. Marino) sur des travaux antérieurs de la fin du 20ème siècle (J. Écalle, A. Voros).
- Permettra peut-être d'avoir une **physique théorique mathématiquement consistante**?