

UNIVERSITÉ DE PROVENCE  
U.F.R. M.I.M.  
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

*Spécialité : Mathématiques*

par

**Clément MARTEAU**

sous la direction du Pr. Laurent CAVALIER

*Titre :*

**Recherche d'inégalités oracles pour  
des problèmes inverses**

soutenue publiquement le 29 novembre 2007

### JURY

M. Yannick BARAUD	Université de Nice Sophia-Antipolis	Examineur
M. Emmanuel CANDÉS	California Institute of Technology	Rapporteur
M. Laurent CAVALIER	Université de Provence	Directeur
M. Yuri GOLUBEV	Université de Provence, CNRS	Examineur
M. Marc HOFFMANN	Université de Marne la Vallée	Rapporteur
M. Oleg LEPSKI	Université de Provence	Examineur
M. Marc RAIMONDO	University of Sydney	Examineur



Pour ma fille Mathilde,



# Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mon directeur de thèse Laurent Cavalier pour la manière dont il m'a encadré pendant ces trois années. Il a su me montrer le chemin à suivre tout en me laissant une grande liberté face aux différents obstacles mathématiques que j'ai pu rencontrer. Les discussions que j'ai eues avec lui m'ont appris à prendre du recul et de la hauteur par rapport aux difficultés dont regorge la théorie statistique. Ses remarques constructives m'ont également beaucoup apporté lors de la rédaction de mes articles et de ce manuscrit. Je garderai un excellent souvenir de ces trois dernières années d'études.

Je tiens ensuite à remercier les membres du jury d'avoir accepté de participer à la soutenance. Certains viennent de loin et tous ont certainement déjà fort à faire au travers de leurs activités d'enseignement et de recherche. Je tiens en particulier à remercier mes deux rapporteurs Emmanuel Candès et Marc Hoffmann d'avoir consacré du temps à la lecture de mon manuscrit.

J'aimerais également remercier Youri Golubev pour avoir répondu à mes questions mais aussi Christophe Pouet pour sa présence et ses conseils en tant que responsable de la Licence MASHS. Plus généralement, je remercie l'ensemble des enseignants avec qui j'ai eu l'occasion de travailler en tant que moniteur et plus récemment comme ATER. J'ai toujours été très bien accueilli et j'ai beaucoup appris à leur contact.

Pendant ces trois années de thèse, j'ai eu l'occasion de partager le bureau 114 avec Sébastien Loustau et Lionel Paris. Ces derniers ont toujours su trouver l'équilibre entre détente et concentration: travailler à leur contact fut un réel plaisir et je les en remercie. La pause café (institutionnelle) de dix heures me manquera certainement dans quelques années. Un grand merci également à Christophe Magnan et Richard Ostrowski qui nous ont accompagnés. De manière plus générale, j'aimerais remercier l'ensemble des thésards que j'ai pu côtoyer au CMI, que ce soit au détour d'un couloir ou au cours du séminaire des doctorants.

Je tiens enfin à remercier ma femme Alexandra pour tout un tas de bonnes raisons dont son soutien, ses aptitudes orthographiques mais également pour avoir donné naissance à notre fille Mathilde...



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Problèmes inverses et statistique</b>	<b>1</b>
1.1	Généralités . . . . .	1
1.2	Méthodes de régularisation . . . . .	4
1.2.1	Observations et estimation . . . . .	4
1.2.2	Quelques exemples . . . . .	6
1.3	Représentation d'un problème inverse . . . . .	9
1.3.1	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	9
1.3.2	Bases d'ondelettes et WVD . . . . .	13
1.3.3	Algorithmes complémentaires . . . . .	15
1.3.4	Représentation matricielle . . . . .	17
1.4	Régularisation et qualité d'estimation . . . . .	17
1.4.1	Estimation minimax et inégalités oracles . . . . .	18
1.4.2	Régularisation non-adaptative . . . . .	20
1.4.3	Sélection de modèle . . . . .	23
1.4.4	Estimation par seuillage . . . . .	28
1.5	Contenu de la Thèse . . . . .	30
1.5.1	Régularisation et opérateur bruité . . . . .	30
1.5.2	Généralisation de l'estimateur de Stein par blocs pénalisé . . . . .	31
1.5.3	Méthode RHM et bruit dans l'opérateur . . . . .	32
1.5.4	Généralisation de la méthode RHM . . . . .	33
1.5.5	Perspectives et annexes . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Regularization of inverse problems with unknown operator</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	Construction of the estimator . . . . .	37
2.2.1	Linear estimation . . . . .	37
2.2.2	Adaptive estimation . . . . .	40
2.2.3	Blockwise Stein's rule estimator . . . . .	41
2.3	Main results . . . . .	42
2.3.1	Notations and hypotheses . . . . .	42
2.3.2	Main result . . . . .	43
2.3.3	Choice of blocks and penalties . . . . .	44
2.4	Minimax adaptation . . . . .	45
2.4.1	The SVD case . . . . .	45
2.4.2	Non-diagonal case with $\sigma = 0$ . . . . .	47

2.4.3	The non-diagonal case . . . . .	48
2.4.4	Conclusion . . . . .	50
2.5	Example . . . . .	50
2.6	Technical lemmas . . . . .	52
2.7	Proof of Proposition 2.3.1 . . . . .	58
2.7.1	Bound of the risk on $\bar{C}_j$ . . . . .	59
2.7.2	Bound of the risk on $C_j$ . . . . .	60
2.7.3	Final bound of the risk . . . . .	62
<b>3</b>	<b>On the stability of the risk hull method for projection estimation</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	65
3.2	The risk hull method . . . . .	66
3.2.1	Statement of the problem . . . . .	66
3.2.2	Data-driven choice for the bandwidth . . . . .	67
3.2.3	Inverse problem with noisy operator . . . . .	68
3.3	Theoretical results and simulations . . . . .	70
3.3.1	Main result . . . . .	70
3.3.2	Numerical simulations . . . . .	71
3.3.3	Conclusion . . . . .	75
3.4	Technical lemmas . . . . .	75
3.5	Proof of Theorem 3.3.1 . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Risk hull method for general families of estimators</b>	<b>87</b>
4.1	Introduction . . . . .	87
4.2	Tikhonov estimator and model selection . . . . .	89
4.3	Risk hull . . . . .	94
4.3.1	Assumptions and construction . . . . .	94
4.3.2	Examples . . . . .	96
4.4	Oracle efficiency . . . . .	99
4.4.1	Theoretical results . . . . .	99
4.4.2	Numerical simulations . . . . .	101
4.4.3	Conclusion . . . . .	102
4.5	Proofs . . . . .	103
4.5.1	Proof of Lemma 4.3.1 . . . . .	103
4.5.2	Proof of Theorem 4.3.1 . . . . .	104
4.5.3	Proof of Theorem 4.4.1 . . . . .	109
4.5.4	Proof of Theorem 4.4.2 . . . . .	112
4.6	Ordered processes . . . . .	113
4.6.1	Technical lemmas . . . . .	114
4.6.2	Additionnal results . . . . .	118
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>WVD et estimateur de Stein par blocs pénalisé</b>	<b>125</b>



<b>B</b>	<b>Intégration fractionnaire: représentation matricielle</b>	<b>131</b>
B.1	Structure de la matrice inverse . . . . .	132
B.2	Vérification des hypothèses du Chapitre 2 . . . . .	135



# Chapitre 1

## Problèmes inverses et statistique

### Résumé

Ce chapitre propose une introduction aux problèmes inverses. Etant donnés  $H, K$ , deux espaces de Hilbert et  $A : H \rightarrow K$  un opérateur compact, nous allons nous intéresser à l'estimation d'un signal  $f \in H$  à partir d'observations bruitées sur  $Af \in K$ . Nous introduisons le modèle du bruit blanc gaussien permettant de modéliser d'éventuelles perturbations dans les observations ainsi que le concept d'inégalité oracle. Etant données une procédure  $f^*$  et une collection d'estimateurs  $\Lambda$ , une inégalité oracle permet de comparer, sans aucune hypothèse sur la fonction cible  $f$  et d'un point de vue non-asymptotique, les performances de  $f^*$  à celles du meilleur estimateur dans  $\Lambda$  connaissant  $f$ . Nous verrons comment ces notions peuvent s'articuler autour de l'étude statistique d'un problème inverse.

### 1.1 Généralités

Résoudre un problème inverse consiste à reconstruire un signal, une image ou de manière plus générale une fonction, à partir de données obtenues de manière indirecte. Cette démarche s'oppose à l'approche classique consistant, à partir d'un signal ou d'une donnée initiale, à prédire le comportement de cette dernière après une transformation donnée. Considérons l'exemple bien connu de transmission de la chaleur à travers un objet solide. Connaissant la température initiale  $u_0$ , chercher à déterminer la température  $u_t$  au temps  $t > 0$  à n'importe quel endroit du solide correspond à la résolution directe du problème. Si maintenant, connaissant  $u_t$  à un moment précis  $t$ , on cherche à retrouver les conditions initiales, on parlera plutôt de problème inverse.

Soient  $H$  et  $K$  deux espaces de Hilbert. D'un point de vue formel, un problème inverse s'exprime sous la forme d'une équation  $g = Af$  où  $A : H \rightarrow K$  représente un opérateur linéaire. On cherche à retrouver  $f = A^{-1}g$  à partir de  $g$ . Cette approche est beaucoup plus délicate que le cas direct où l'on cherche simplement à calculer  $g$  à partir de  $f$ . En effet, même en supposant que  $g$  et  $A$  sont connus, résoudre  $Af = g$  nécessite l'inversion d'un opérateur. Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique. Par ailleurs, de nombreux problèmes se posent concernant l'existence, l'unicité ou la continuité de la solution par rapport à la donnée  $g$ . Ces propriétés ont été mises en évidence par J. Hadamard et sont au coeur de la théorie des problèmes inverses. Si elles sont satisfaites,

c'est-à-dire si la solution de l'équation  $g = Af$  existe, est unique, et dépend continûment de  $g$ , on dira alors que le problème est **bien-posé**.

**Définition 1.1.1** Soient  $H, K$  deux espaces de Hilbert et  $A : H \rightarrow K$  un opérateur. L'équation

$$(1.1.1) \quad Af = g$$

est dite **bien posée** si  $A$  est bijectif et l'opérateur inverse  $A^{-1} : K \rightarrow H$  est continu. Dans le cas contraire, le problème est dit **mal-posé**.

Les problèmes mal-posés sont les plus contraignants d'un point de vue pratique mais les plus attrayants d'un point de vue mathématique. Dans cette thèse, nous nous intéresserons uniquement à ces derniers. D'après la Définition 1.1.1, un problème inverse sera mal-posé si une des trois conditions suivantes n'est pas satisfaite:

- la solution existe,
- la solution est unique,
- l'opérateur  $A^{-1}$  est continu.

La non-existence d'une solution correspond à la situation où l'opérateur  $A$  n'est pas surjectif dans  $K$ . En supposant qu'une solution existe, le problème d'unicité se pose alors: l'opérateur  $A$  peut ne pas être injectif. Dans ce cas, il faut réfléchir à quelle solution parmi celles existantes sera privilégiée. Enfin, le dernier cas, et non des moindres, concerne la non-continuité de l'opérateur inverse  $A^{-1} : K \rightarrow H$ . Dans cette situation, de petites perturbations dans la donnée  $g$  peuvent mener à des solutions  $f$  radicalement différentes. Ce comportement est particulièrement gênant puisque la fonction  $g$  est souvent obtenue par l'intermédiaire d'observations ou bien d'approximations numériques. La mesure de  $g$  est donc souvent entachée d'erreurs, plus ou moins importantes suivant le domaine d'application. D'un point de vue pratique, il serait souhaitable que ce "bruit" ait un minimum d'influence sur la solution proposée. Ce n'est évidemment pas le cas quand l'opérateur inverse  $A^{-1}$  n'est pas continu. Cette problématique a fait l'objet de nombreuses études, aussi bien dans le domaine de l'analyse numérique que statistique, et va nous intéresser tout au long de cette thèse.

Les champs d'application de la théorie des problèmes inverses sont multiples: physique, économie, astronomie, etc... Nous présentons dans ce qui suit quelques exemples de problèmes inverses mal-posés.

EXEMPLE 1.1.1. (Equation de la chaleur)

Considérons une tige en métal de longueur 1 dont les deux extrémités sont maintenues à la température 0. A chaque instant  $t \in [0,1]$ , la température de la baguette à la position  $x \in [0,1]$  est représentée par  $u(x,t)$ . Etant donnée une température finale  $u(x,1) = g(x)$ ,  $x \in [0,1]$ , on cherche à expliciter la distribution initiale, i.e. la fonction  $u(x,0)$ . C'est le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur. Plus formellement, ce dernier s'écrit sous la forme:

$$(1.1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t \in (0,1), x \in [0,1], \\ u(x,1) = g(x). \end{cases}$$

Pour tout  $x \in [0,1]$ , posons  $f(x) = u(x,0)$ . Il est possible de démontrer que le problème (1.1.2) peut s'exprimer sous la forme d'une équation intégrale du premier degré:

$$g(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy,$$

pour

$$k(x,y) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2k\pi} \sin(2k\pi y) \sin(2k\pi x), \quad x,y \in [0,1].$$

Considérons la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour:

$$g_n : x \mapsto g_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n\pi x), \quad x \in [0,1].$$

Pour chaque entier  $n$ , le problème de Cauchy associé admet une unique solution. Cette dernière peut être exprimée sous la forme:

$$f_n(x) = \frac{C}{n} \sin(n\pi x) \exp \{n^2\pi^2 t\},$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $n$ . Remarquons alors que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n(x)\|_{\infty} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n(x,t)\|_{\infty} = +\infty, \quad t < 0.$$

Alors que les données initiales tendent vers 0, la norme des solutions proposées explose pour de grandes valeurs de  $n$ . La solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur ne dépend pas continûment des données initiales: le problème est mal-posé.

EXEMPLE 1.1.2. (Tomographie et transformée de Radon)

La tomographie par rayons  $X$  est un des exemples les plus connus de problème inverse mal-posé. Cette technique est couramment utilisée dans, par exemple, le domaine de l'imagerie médicale.

Soit  $f : S \rightarrow [0,1]$  la fonction cible pour  $S \subset \mathbb{R}^2$  une surface compacte. Cette dernière peut être vue comme la coupe du corps d'un patient (vue en niveaux de gris) que l'on souhaiterait analyser: recherche d'une tumeur cancéreuse ou autre pathologie. Un scanner va envoyer des rayons  $X$  dans le corps du patient et mesurer en sortie le niveau d'atténuation de chacun d'entre eux. Ce taux correspond à l'intégrale de  $f$  sur la ligne suivie par le rayon. Etant donné une orientation  $\theta \in [0,2\pi[$  et  $p \in \mathbb{R}^+$ , on observe donc:

$$(1.1.3) \quad Rf(\theta,p) = \int \int_S f(x,y) \mathbf{1}_{\{x \cos \theta + y \sin \theta = p\}} dx dy, \quad \theta \in [0,2\pi], \quad p \in \mathbb{R}.$$

Chercher à reconstruire la fonction  $f$  d'après différentes mesures de  $Rf$  est un exemple type de problème inverse mal-posé.

Pour une liste d'exemples plus complète, nous citerons entre autres les ouvrages de Kress [51], Hackbusch [37], Engl et al. [31] ou encore Roy and Couchman [63].

## 1.2 Méthodes de régularisation

Dans cette thèse, nous ne considérerons que des problèmes inverses mal-posés au sens où l'opérateur n'est pas continûment inversible. Deux données initiales proches en norme peuvent conduire à des solutions radicalement différentes. Nous travaillerons essentiellement avec des opérateurs compacts.

**Définition 1.2.1** *Un opérateur linéaire  $A : H \rightarrow K$  est dit compact si l'image par  $A$  de chaque ensemble borné dans  $H$  est relativement compact dans  $K$ .*

Les équations impliquant de tels opérateurs sont toujours mal-posées puisqu'un opérateur compact n'est pas continûment inversible. Il existe de nombreux exemples d'opérateurs compacts parmi lesquels figure, entre autres, la transformée de Radon décrite dans l'Exemple 1.1.2.

Idéalement, on souhaite donc utiliser la donnée  $g$  pour retrouver la fonction  $f$ , solution de  $Af = g$ . D'un point de vue pratique, ce n'est malheureusement pas toujours possible. Suivant le domaine d'étude concerné, seule une mesure approximative (ou observation) de la fonction  $g$  est disponible.

### 1.2.1 Observations et estimation

Nous supposons par la suite que la donnée initiale  $g$  est entachée d'erreurs. Plus formellement, partant de la donnée:

$$Y = Af + \text{"bruit"},$$

on cherche à approximer, le plus fidèlement possible, la solution de l'équation  $g = Af$ . Ici, la dénomination "bruit" représente l'erreur dans la donnée initiale. Cette dernière peut être induite par un manque de précision dû aux conditions d'expérimentations ou encore obtenue à la suite d'approximations numériques. Dans la littérature, deux modèles différents ont été étudiés.

**Modèle déterministe:** C'est historiquement la première modélisation utilisée. On s'intéresse à l'équation  $g = Af$  pour laquelle seule une donnée bruitée  $Y_\delta$  est disponible, cette dernière vérifiant:

$$(1.2.1) \quad \|Y_\delta - g\| \leq \delta, \delta > 0.$$

La quantité  $\delta$  modélise le bruit présent dans  $Y_\delta$ .

**Modèle statistique:** La donnée bruitée est cette fois-ci représentée par

$$(1.2.2) \quad Y = Af + \epsilon\xi, \epsilon > 0.$$

On parlera par la suite d'observation. L'erreur est, dans ce cas, aléatoire. Elle est modélisée par  $\epsilon\xi$  où  $\epsilon > 0$  désigne le niveau de bruit et  $\xi$  représente un bruit blanc gaussien. Le terme

$\xi$  est une variable aléatoire généralisée. Pour toute fonction  $v \in K$ , il est en fait possible d'observer:

$$(1.2.3) \quad \langle Y, v \rangle = \langle Af, v \rangle + \epsilon \langle \xi, v \rangle, \text{ pour } \langle \xi, v \rangle \sim \mathcal{N}(0, \|v\|^2).$$

Pour tout  $v_1, v_2 \in K$ , la covariance entre  $\langle \xi, v_1 \rangle$  et  $\langle \xi, v_2 \rangle$  est donnée par:

$$\mathbb{E}[\langle \xi, v_1 \rangle \langle \xi, v_2 \rangle] = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Ce type d'objet est étudié plus en détail dans Hida [39] par exemple. Le modèle du bruit blanc gaussien est également souvent exprimé dans la littérature sous la forme:

$$dY(t) = Af(t)dt + \epsilon dW(t), t \geq 0,$$

où  $W$  représente un processus de Wiener. Dans la suite de ce chapitre, bien que la plupart des propriétés présentées soient valables pour le modèle numérique (1.2.1), nous nous concentrerons exclusivement sur le modèle statistique (1.2.2).

A partir du moment où la donnée initiale est perturbée, il est difficile, voir complètement impossible de retrouver de manière exacte la solution de l'équation  $g = Af$ . Une partie de l'information est en quelque sorte perdue. Tout ce que l'on peut espérer est d'approcher la solution  $f$ . Idéalement, plus le bruit est petit, plus l'approximation proposée doit être proche de  $f$ . Plus formellement, le minimum requis pour un estimateur  $\tilde{f}_\epsilon$  est de converger, dans un sens qui reste à préciser, vers la solution  $f$  quand  $\epsilon$  tend vers 0. Même en supposant que  $Y$  appartienne à l'image de  $A$ , l'approximation naïve  $\tilde{f} = A^{-1}Y$  n'est donc pas du tout recevable. L'opérateur  $A^{-1}$  n'étant pas continu, rien ne garantit qu'un "petit" bruit va conduire à une bonne qualité d'estimation. Dès lors, il faut réfléchir à des méthodes plus fines pour l'estimation de la fonction  $f$ , appelées procédures de régularisation. Ces dernières ont fait l'objet de nombreuses études, aussi bien d'un point de vue numérique que statistique. L'ambition de ce chapitre n'est bien sûr pas de dresser une synthèse exhaustive, mais plutôt de présenter une partie des méthodes existantes.

La construction d'une méthode de régularisation part d'une volonté de résoudre l'équation  $g = Af$  à partir de données bruitées  $Y$ . Une possibilité est de considérer l'approximation  $\tilde{f}$  vérifiant:

$$\tilde{f} = \arg \inf_{f \in H} \|A\tilde{f} - Y\|.$$

La quantité  $\tilde{f}$  est appelée quasi-solution ou solution des moindres carrés. C'est la fonction qui minimise la distance entre  $Af$  et l'image de  $A$ . Cette notion est surtout utilisée en analyse numérique. En effet, la perturbation étant déterministe, il se peut que  $Y$  n'appartienne plus à l'image de  $A$  dans  $K$ . Dans le modèle (1.2.2), le bruit est exprimé à l'aide d'une variable aléatoire généralisée  $\xi$ . La notion de solution des moindres carrés est donc moins courante en statistique.

Un calcul élémentaire montre que l'expression exacte de cette solution approchée est donnée par:

$$(1.2.4) \quad \tilde{f} = (A^*A)^{-1}A^*Y.$$

Cette solution ne répond pas aux contraintes formulées précédemment. En effet, l'opérateur  $A^*A$  est compact et n'est donc pas continûment inversible. En particulier,  $\|(A^*A)^{-1}\| = +\infty$ . La solution des moindres carrés a ainsi peu de chances de converger vers la cible  $f$  quand le niveau de bruit tend vers 0. Pour palier à ce problème, on considère plutôt des approximations du type:

$$\hat{f}_t = \Phi_t(A^*A)A^*Y.$$

La fonction  $\Phi_t$  est choisie de telle sorte que  $\Phi_t(x) \rightarrow x^{-1}$  quand le paramètre  $t$  tend vers l'infini. L'opérateur  $(A^*A)^{-1}$  est ainsi approximé par  $\Phi_t(A^*A)$ . Le choix du paramètre de régularisation  $t$  est extrêmement important. Généralement,  $t \rightarrow +\infty$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Cette propriété garantit la convergence de l'estimateur  $\hat{f}_t$  vers la fonction  $f$ . Nous verrons dans les sections suivantes que la façon dont  $t \rightarrow +\infty$  est prépondérante et conditionne complètement les performances de  $\hat{f}_t$ .

### 1.2.2 Quelques exemples

Pour clore cette première partie, nous présentons quelques méthodes de régularisation courantes. Bien qu'initialement introduites pour le modèle numérique (1.2.1), elles sont également largement utilisées en statistique. Nous ne parlerons pas ici des différentes manières de choisir le paramètre  $t$ . Cette aspect sera étudié en détail dans la Section 1.4.

#### EXEMPLE 1.2.1. (Méthode de Tikhonov)

La méthode de Tikhonov fait partie des procédures de régularisation les plus connues, aussi bien en statistique que dans le domaine de l'analyse numérique. On souhaite construire un estimateur permettant d'approcher au mieux la fonction  $f$  à partir de  $Y$  défini en (1.2.2). Cette approche mène à la solution des moindres carrés (1.2.4), peu satisfaisante dans la mesure où la norme de l'opérateur  $(A^*A)^{-1}$  est infinie. Afin de construire une méthode plus précise, l'idée est de chercher dans le même temps à contrôler la norme de l'approximation proposée. Pour prendre en compte ces deux contraintes, il est nécessaire de résoudre le problème d'optimisation:

$$\tilde{f}_t = \arg \inf_{\bar{f} \in H} \{ \|A\bar{f} - Y\|^2 + t^{-1} \|\bar{f}\|^2 \},$$

pour  $t > 0$  fixé. Soit  $G$  la fonctionnelle définie par  $G : \bar{f} \mapsto \|A\bar{f} - Y\|^2 + t^{-1} \|\bar{f}\|^2$ . Pour tout  $h \in H$ , la fonction différentielle de  $G$  en  $h$  est donnée par:

$$D_{\bar{f}}G.h = 2\langle Af - Y, Ah \rangle + 2t^{-1}\langle \bar{f}, h \rangle.$$

On obtient ainsi que:

$$D_{\bar{f}}G.h = 0 \Leftrightarrow \langle (A^*A + t^{-1}I)\bar{f}, h \rangle = \langle A^*Y, h \rangle, \forall h \in H.$$

L'estimateur de Tikhonov  $\tilde{f}_t$  est donc défini par:

$$(1.2.5) \quad \tilde{f}_t = \Phi_t(A^*A)A^*Y, \text{ pour } \Phi_t(A^*A) = (A^*A + t^{-1}I)^{-1}.$$

Plus  $t$  est grand, plus  $\Phi_t(A^*A)$  se rapproche de l'opérateur  $(A^*A)^{-1}$  et donc plus l'erreur induite est importante. Au contraire, la norme de  $\|\tilde{f}_t\|$  sera mieux contrôlée pour de petites



valeurs de  $t$ , au risque de "s'éloigner" de la solution  $f$ . Il y a donc un compromis à trouver pour le choix de  $t$ . Nous reviendrons de manière plus approfondie sur cette méthode de régularisation dans le Chapitre 4.

EXEMPLE 1.2.2. (Variantes de Tikhonov)

L'estimateur de Tikhonov défini en (1.2.5) n'est parfois pas suffisant pour garantir une qualité d'estimation convenable, même avec un bon choix de paramètre. En particulier, nous verrons que les vitesses de convergence produites par cette méthode sont souvent loin d'être optimales pour des solutions  $f$  très "régulières". Tout cela sera rediscuté de manière plus rigoureuse dans les sections suivantes. Il est cependant possible d'améliorer sensiblement cette méthode.

Une première variante consiste à utiliser un contrôle différent pour la solution. Pour tout entier  $a$ , introduisons  $L^a = (A^*A)^{-a}$ . Au lieu de s'intéresser à la norme de l'approximation  $\hat{f}_t$ , on va plutôt chercher à contrôler la norme de  $L^a \tilde{f}_t$  pour un entier  $a$  donné. L'opérateur  $L^a$  est en quelque sorte un opérateur différentiel. La quantité  $a$  peut être vue comme un a priori que l'on placerait sur la régularité de la solution. L'estimateur de Tikhonov avec régularité a priori est donc défini par:

$$\tilde{f}_t = \arg \inf_{\tilde{f} \in H} \{ \|A\tilde{f} - Y\|^2 + t^{-1} \|L^a \tilde{f}\|^2 \}.$$

En utilisant la même méthodologie que pour la méthode de Tikhonov classique, on trouve:

$$(1.2.6) \quad \tilde{f}_t = \Phi_t(A^*A)A^*Y, \text{ pour } \Phi_t(A^*A) = (A^*A + t^{-1}(L^a)^*L^a)^{-1}.$$

Nous verrons dans le Chapitre 4 que cette méthode permet d'estimer une gamme de fonctions beaucoup plus large que la procédure classique introduite dans l'Exemple 1.2.1.

Une deuxième variante de la méthode de Tikhonov utilise des itérations. Cette approche est étudiée de manière complète dans Engl [30]. Fixons  $\hat{f}_0 = 0$ . Pour tout entier  $j > 1$ , et étant donnée  $\hat{f}_t^{j-1}$ , l'estimateur  $\hat{f}_t^j$  est défini comme la solution de l'équation:

$$(A^*A + t^{-1}I)\hat{f}_t^j = A^*Y + t^{-1}\hat{f}_t^{j-1}.$$

Dans cette situation,  $t$  joue toujours le rôle du paramètre de régularisation. Le nombre d'itérations  $j$  permet en quelque sorte d'élargir le champ d'action de l'estimateur de Tikhonov. Plus le nombre d'itérations sera important, plus il sera possible d'estimer des fonctions très régulières. D'un point de vue pratique, cette méthode ne requiert pas plus de temps de calcul que la procédure classique. L'opérateur inverse  $(A^*A + t^{-1}I)^{-1}$  peut être réutilisé à chaque étape sans calcul supplémentaire.

EXEMPLE 1.2.3. (Méthode itérative de Landweber)

Les différentes méthodes de Tikhonov nécessitent l'inversion d'un opérateur pour pouvoir être implémentées. C'est la principale critique qui peut être faite à ces dernières. Cette opération est souvent coûteuse en temps de calcul. De nombreuses alternatives ont donc

été proposées. Parmi elles, la méthode itérative de Landweber. L'équation  $g = Af$  peut être écrite sous la forme:

$$f = f + \rho A^*(g - Af),$$

pour  $0 < \rho < 1$ . Posons  $\hat{f}_0 = 0$ . Pour tout  $t > 1$ , connaissant  $\hat{f}_{t-1}$ , la  $t$ -ème itération de Landweber est définie par:

$$\hat{f}_t = \hat{f}_{t-1} + \rho A^*(Y - A\hat{f}_{t-1}).$$

La quantité  $\rho$  est choisie de telle sorte que la norme de l'opérateur  $\rho A^*$  soit plus petite que 1, garantissant ainsi la convergence de la méthode pour  $t \rightarrow +\infty$ . Le principal intérêt de cette procédure est qu'elle ne requiert pas l'inversion d'un opérateur.

Le rôle du paramètre de régularisation est ici tenu par le nombre d'itérations  $t$ . Ainsi, contrairement à la méthode de Tikhonov itérée, ce dernier conditionne complètement la qualité de l'estimateur  $\hat{f}_t$ . Si  $t$  est très grand, le biais sera plutôt petit mais l'erreur induite sera très importante. Au contraire, si le nombre d'itérations est petit, l'erreur dans l'estimateur sera parfaitement contrôlée, au dépend de la précision. Encore une fois, le choix de  $t$  est fondamental.

EXEMPLE 1.2.4. (Procédures semi-itératives et  $\nu$ -méthodes)

Les méthodes présentées dans cet exemple généralisent l'approche précédente. A chaque itération, on va cette fois-ci utiliser une partie, voire toutes les approximations construites successivement au lieu de simplement se servir de la précédente. On parlera dès lors de méthode semi-itérative.

Posons  $\hat{f}_0 = 0$ . Pour tout  $t > 1$ , connaissant  $(\hat{f}_j)_{j=0\dots t-1}$ , la  $t$ -ème itération est définie par:

$$\hat{f}_t = \mu_{1,t}\hat{f}_{t-1} + \dots + \mu_{t,t}\hat{f}_0 + \omega_t A^*(Y - A\hat{f}_{t-1}), \quad t \in \mathbb{N},$$

avec la contrainte:

$$\mu_{1,t} + \dots + \mu_{t,t} = 1.$$

Comme pour la précédente, ce type de méthode ne requiert pas l'inversion d'un opérateur et est donc plus facilement implémentable. Par ailleurs, il est démontré que les méthodes semi-itératives nécessitent beaucoup moins d'itérations pour une qualité d'estimation équivalente à la méthode de Landweber. Le temps de calcul nécessaire est donc logiquement diminué.

La méthode itérative de Landweber correspond au cas particulier où  $\omega_t = \rho$  et  $\mu_{2,t} = \dots = \mu_{t,t} = 0$ , pour tout entier  $t$ .

Les  $\nu$ -méthodes sont très prisées en analyse numérique et donnent un exemple intéressant de procédures semi-itératives. Elles sont construites en posant:

$$\mu_1 = 1, \quad \omega_1 = \frac{4\nu + 2}{4\nu + 1},$$

avec  $\nu \in [0,1]$ . Pour tout entier  $k$ :

$$\mu_k = 1 + \frac{(k-1)(2k-3)(2k+2\nu-1)}{(k+2\nu-1)(2k+4\nu-1)(2k+2\nu-3)}, \quad \text{et } \omega_k = 4 \frac{(2k+2\nu-1)(k+\nu-1)}{(k+2\nu-1)(2k+4\nu-1)}.$$

La  $t$ -ème itération est alors définie par:

$$\hat{f}_t = \mu_t \hat{f}_{t-1} + (1 - \mu_t) \hat{f}_{t-2} + \omega_t A^*(Y - A \hat{f}_{t-1}).$$

Les  $\nu$ -méthodes utilisent seulement les deux itérations précédentes à chaque étape. Il a été démontré que cette méthode requiert seulement la racine carrée du nombre d'itérations de la procédure de Landweber pour une qualité d'estimation équivalente. Les temps de calcul sont donc significativement améliorés.

Le formalisme utilisé dans cette première partie est très général. Si par exemple  $H = L^2(0,1)$ , chaque fonction  $f$  est approximée en tout point  $x \in [0,1]$  par un estimateur  $\hat{f}(x)$ . Nous verrons dans la Section 1.3 que de nombreux formalismes, simplifiant considérablement le problème, ont été proposés. En particulier, chaque fonction pourra être représentée par la valeur de ses coefficients dans une base donnée de  $H$ : nous raisonnerons donc plutôt en terme de "fréquence".

L'ensemble des méthodes présentées ici nécessite un choix précis pour le paramètre de régularisation  $t$ . Cette problématique est de toute première importance, aussi bien dans le domaine de l'analyse numérique que de la théorie statistique. La Section 1.4 est en partie axée sur cette thématique. Nous présenterons également un certain nombre d'estimateurs utilisant un principe de seuillage et ne nécessitant aucun calibrage de paramètre.

## 1.3 Représentation d'un problème inverse

Nous allons présenter dans cette section une partie des formalismes les plus couramment utilisés en statistique. Chacun d'entre eux possède ses avantages mais aussi ses propres inconvénients. Il existe par ailleurs de nombreuses nuances dans la difficulté d'un problème inverse. Ceci pourra être quantifié de manière très précise.

### 1.3.1 Décomposition en valeurs singulières

Une des approches les plus naturelles pour étudier un problème inverse consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur  $A$ . Cette représentation propose des bases pour les espaces de Hilbert  $H$  et  $K$  permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

**Théorème 1.3.1** *Soit  $X$  un espace de Hilbert et  $D : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact borné et auto-adjoint. Toutes les valeurs propres de  $D$  sont réelles et s'accumulent en 0. Les espaces propres associés à chaque valeur propre sont de dimension finie et orthogonaux entre eux.*

Puisque  $A$  est compact,  $A^*A : H \rightarrow H$  possède également cette propriété. Par le Théorème 1.3.1, cet opérateur, étant auto-adjoint, admet donc une suite réelle pour valeurs singulières que nous noterons  $(b_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$  (cette dernière étant positive). On désignera par  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite de vecteurs propres associée. Dans cette thèse, nous supposerons que le

système  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définit une base orthonormée de  $H$ . En particulier, pour toute fonction  $f \in H$ , il est possible d'écrire que:

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \theta_k \phi_k,$$

où  $\theta_k = \langle f, \phi_k \rangle$  pour tout entier  $k$ . D'un point de vue mathématique, la fonction  $f$  peut être identifiée à la suite  $\theta = (\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Estimer  $f$  revient à estimer un nombre infini de paramètres.

A présent, intéressons-nous à l'espace d'arrivée  $K$ . L'idée est de construire une base de telle sorte que la matrice de représentation de l'opérateur  $A^*A$  soit diagonale. C'est la forme la plus simple et la plus facile à manipuler dans les calculs. Pour tout entier  $k$ , posons:  $\psi_k = b_k^{-1} A \phi_k$ . Il est alors facile de voir que:

$$A^* \psi_k = b_k^{-1} A^* A \phi_k = b_k \phi_k,$$

puisque  $b_k^2$  est une valeur propre de  $A^*A$  associée au vecteur propre  $\phi_k$ . La décomposition en valeurs singulières de  $A^*A$  est alors exprimée à travers la relation:

$$(1.3.1) \quad \begin{cases} A \phi_k = b_k \psi_k, \\ A^* \psi_k = b_k \phi_k, \end{cases}$$

pour tout entier  $k$ . Le triplet  $(\phi_k, \psi_k, b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est appelé *système singulier*. La matrice de représentation de  $A^*A$  est diagonale. Ceci va nous permettre de représenter le problème plus simplement. Pour tout entier  $k$ , remplaçons  $v$  par  $\psi_k$  dans l'équation (1.2.3), obtenant ainsi:

$$\langle Y, \psi_k \rangle = \langle Af + \epsilon \xi, \psi_k \rangle = \langle f, A^* \psi_k \rangle + \epsilon \langle \xi, \psi_k \rangle.$$

En posant  $\xi_k = \langle \xi, \psi_k \rangle$ , et en utilisant la décomposition en valeurs singulières (1.3.1), le modèle (1.2.2) peut alors être écrit sous forme séquentielle:

$$(1.3.2) \quad \langle Y, \psi_k \rangle \triangleq y_k = b_k \theta_k + \epsilon \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Puisque le système  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est aussi orthonormal, les  $\xi_k$  sont i.i.d. de loi normale centrée réduite.

Une des propriétés les plus marquantes des opérateurs compacts est la convergence de leurs valeurs propres vers 0. En utilisant la forme séquentielle du modèle du bruit blanc (1.3.2), on comprend mieux l'effet de l'opérateur sur la fonction  $f$ . Plus l'indice  $k$  est grand, plus  $b_k$  est petite. Le signal  $b_k \theta_k$  devient par là même de plus en plus ténu. Un opérateur compact a donc tendance à "lisser" le signal rendant ainsi l'estimation de  $f$  très délicate en présence de bruit. En effet, le modèle séquentiel (1.3.2) peut être écrit sous la forme:

$$b_k^{-1} y_k = \theta_k + \epsilon b_k^{-1} \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pour chaque coefficient  $\theta_k$ , l'estimateur le plus naturel est  $b_k^{-1} y_k$ . La variance de celui-ci tend donc vers l'infini quand  $k \rightarrow +\infty$ . L'estimation de chaque  $\theta_k$  induit systématiquement l'erreur  $\epsilon b_k^{-1} \xi_k$ . On ne peut donc pas espérer pouvoir estimer l'ensemble des coefficients  $\theta_k$ .

L'idée est donc de "filtrer" la suite  $(b_k^{-1}y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  pour ne garder que les coefficients les plus significatifs. On considère pour cela des estimateurs du type:

$$\hat{f}_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t) b_k^{-1} y_k \phi_k, \text{ pour } \lambda_k(t) \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N}.$$

Le terme  $t$  symbolise un éventuel paramètre de régularisation. La suite  $(\lambda_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  est appelée filtre. La plupart des estimateurs présentés dans les exemples 1.2.1-1.2.4 peuvent être identifiés à un filtre par l'intermédiaire de la décomposition en valeurs singulières. Si la suite  $(\lambda_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  ne dépend pas de  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , on parlera d'estimateur linéaire. Si au contraire, cette suite est construite à partir des observations, on parlera de méthodes non-linéaires. Ce sera le cas pour une grande partie des méthodes d'estimation présentées dans cette thèse.

Il existe plusieurs nuances dans la difficulté d'un problème inverse. Plus formellement, plus la suite de valeurs propres va converger vite vers 0, plus l'estimation de la fonction  $f$  sera délicate. Si la suite  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  possède un comportement polynomial, le problème est dit moyennement mal-posé. On notera  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (k^{-\beta})_{k \in \mathbb{N}}$  pour  $\beta > 0$ . Ce paramètre est appelé degré du problème inverse. Si maintenant la suite de valeurs propres décroît exponentiellement vite vers 0, on parlera plutôt de problème sévèrement mal-posé. Dans cette situation, seul un petit nombre de coefficients peut être estimé, au risque de voir exploser l'erreur induite. Ce type de problème nécessite la plupart du temps des méthodes spécifiques prenant en compte cette particularité et sera peu souvent évoqué au cours de cette thèse.

Nous présentons dans ce qui suit quelques exemples d'opérateurs pour lesquels la SVD est plutôt accessible.

EXEMPLE 1.3.1. (Opérateur d'intégration)

Soit  $A : L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$  l'opérateur défini par:

$$\begin{aligned} Af & : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto Af(x) = \int_0^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Régulariser ce problème dans ces conditions revient à essayer d'estimer la dérivée  $f$  d'un signal  $g = Af$  à partir d'observations bruitées sur ce dernier. Pour tout  $f \in L^2(0,1)$  et  $x \in [0,1]$ ,

$$A^* Af = \int_x^1 \int_0^y f(t) dt dy.$$

Il est alors possible de démontrer que le système singulier  $(b_k, \phi_k, \psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  associé à cet opérateur est défini par:

$$b_k = \frac{2}{(2k-1)\pi}, \phi_k(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right), \psi_k(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right),$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0,1]$ . La décroissance des valeurs propres est polynomiale d'ordre 1: le problème est moyennement mal-posé.

EXEMPLE 1.3.2. (Opérateur de convolution)

Soient  $H = K = L^2(0,1)$  et l'opérateur défini par:

$$Af : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow Af(x) = \int_0^1 \mathcal{K}(x-y)f(y)dy.$$

La fonction  $\mathcal{K} : [0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}$  est appelée noyau de convolution et est supposée être 1-périodique. Considérons la base trigonométrique réelle sur  $[0,1]$  définie par:

$$\phi_1(t) \equiv 1, \phi_{2k}(t) = \cos(2\pi kt) \text{ et } \phi_{2k+1}(t) = \sin(2\pi kt), \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Il est alors possible de montrer que, pour tout entier  $k$  et  $t \in [0,1]$ :

$$A\phi_k(t) = b_k\phi_k(t), \text{ pour } b_k = \int_0^1 \mathcal{K}(x)\phi_k(x)dx.$$

La relation (1.3.1) est obtenue en posant  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

EXEMPLE 1.3.3. (Equation de la chaleur)

L'opérateur étudié dans l'Exemple 1.2.1 admet pour vecteurs propres la suite  $(\phi_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $\phi_k(t) = \sqrt{2}\sin(k\pi t)$ , pour tout  $t \in [0,1]$  et  $k \in \mathbb{N}$ . La suite de valeurs propres est quant à elle donnée par:  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} = (e^{-k^2\pi^2})_{k \in \mathbb{N}}$ . Cette dernière décroît exponentiellement vite, le problème est sévèrement mal-posé.

L'utilisation de la décomposition en valeurs singulières présente de nombreux avantages. En effet, ce formalisme permet de représenter le problème inverse sous une forme claire et concise. Le modèle séquentiel permet de se rendre compte immédiatement des effets de l'opérateur sur le signal. Le fait de travailler avec des matrices diagonales simplifie donc énormément la compréhension et la représentation du modèle (1.2.2).

Cependant, cette décomposition présente quelques revers. En quelque sorte, la SVD est optimale pour l'opérateur  $A$  au sens où la matrice associée est diagonale. Il n'en va pas toujours de même pour la fonction étudiée. En effet, le choix des bases  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est complètement déterminé par  $A$ . Par exemple, si le même opérateur intervient dans deux domaines complètement différents, la SVD impose la même représentation alors que les deux sujets d'étude peuvent être radicalement éloignés. D'un point de vue pratique, on peut avoir affaire à des fonctions pour lesquelles la base  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ne conviendra pas, au sens où un grand nombre de coefficients est nécessaire pour approximer correctement  $f$ . La qualité d'estimation va donc logiquement pâtir de cette représentation.

Par ailleurs, obtenir la SVD de manière explicite peut s'avérer coûteux en terme de temps de calcul pour certains problèmes. Il est nécessaire de connaître de manière précise la totalité des valeurs propres et des vecteurs propres de  $A^*A$ . Ainsi, bien que ce formalisme soit un très bel outil théorique, il ne peut en aucun cas servir dans toutes les situations. La construction de représentations alternatives est donc parfois nécessaire.

### 1.3.2 Bases d'ondelettes et WVD

La SVD propose des bases qui ne sont pas toujours convenables pour la fonction étudiée. C'est une des principales critiques qui peuvent être formulées à l'encontre de cette représentation. Considérons l'exemple d'un problème de déconvolution. Les bases associées à la SVD d'un tel opérateur sont les bases de Fourier usuelles. Pour des fonctions continues et suffisamment régulières, ce type de représentation conviendra en général. La situation est radicalement différente pour des fonctions peu régulières voire discontinues. Dans cette situation, les bases de Fourier ne produiront pas une représentation convenable.

L'utilisation de bases d'ondelettes permet de répondre en partie à ce type de problème. Considérons le cas  $H = L^2(\mathbb{R})$ . La base d'ondelettes est obtenue par dilatation et translation d'une fonction "père"  $\phi$  et d'une fonction "mère"  $\psi$ . Pour tout couple  $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ , définissons:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k) \text{ et } \psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il est possible de montrer que sous certaines conditions, le système  $\{(\phi_{j_0,k})_{k \in \mathbb{N}}, (\psi_{j,k})_{j \in \mathbb{Z}^2}\}$  forme une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  pour  $j_0$  fixé. N'importe quelle fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  peut alors être écrite sous la forme:

$$(1.3.3) \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \vartheta_{j_0,k} \phi_{j_0,k} + \sum_{j > j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \psi_{j,k}, \text{ pour } \alpha_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \text{ et } \vartheta_{j_0,k} = \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle.$$

Une version homogène de (1.3.3) est également souvent présente dans la littérature. Toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  est alors exprimée sous la forme:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Les bases d'ondelettes offrent dans certaines situations une bien meilleure représentation que la base de Fourier usuelle par exemple. Ceci s'explique en partie par le double aspect de ces bases. Celles-ci localisent à la fois le signal en fréquence (comme le font les bases de Fourier) par l'intermédiaire de l'indice  $j$ , mais aussi en temps (par l'intermédiaire de  $k$ ). Ainsi, une discontinuité dans  $f$  va simplement affecter un petit nombre de coefficients dans la représentation (1.3.3). Pour une base de Fourier, cette discontinuité est retransmise dans toute la base, entraînant ainsi une mauvaise représentation. Les bases d'ondelettes possèdent donc une forte capacité de compression. Des signaux a priori complexes peuvent être exprimés à l'aide de peu de coefficients. Ce type de base est notamment très utilisé dans tous les domaines nécessitant un traitement d'images ou de signaux.

Ainsi, les bases d'ondelettes présentent de nombreux avantages en terme de représentation. Elles permettent dans un certain sens d'exprimer la fonction  $f$  de manière optimale. Ce n'est par contre pas toujours le cas en ce qui concerne l'opérateur. La matrice de représentation peut avoir une forme complètement inexploitable ce qui risque de fortement compliquer l'inversion. C'est un peu la situation antagoniste à la décomposition en valeurs singulières, dans la mesure où la fonction est bien représentée mais pas forcément l'opérateur.

L'idéal serait de pouvoir trouver une représentation qui conviendrait à la fois à l'opérateur et à la cible  $f$ . C'est l'idée mise en avant dans Donoho [24]. Considérons une base orthonormale d'ondelettes et deux ensembles orthogonaux de fonctions  $(u_\rho)_{\rho \in \mathbb{Z}^2}$  et  $(v_\rho)_{\rho \in \mathbb{Z}^2}$ . Concernant ces éléments, on impose, pour tout  $\rho = (j,k) \in \mathbb{Z}^2$ , les trois restrictions suivantes:

$$(1.3.4) \quad \begin{cases} A\psi_{jk} = \kappa_j v_{jk} \\ A^*u_{jk} = \kappa_j \psi_{jk} \end{cases}$$

$$(1.3.5) \quad \langle u_\rho, v_\rho \rangle = 0, \forall \rho \in \mathbb{Z}^2,$$

$$(1.3.6) \quad \left\| \sum_{\rho \in \mathbb{Z}^2} a_\rho u_\rho \right\| \simeq \|(a_\rho)_{\rho \in \mathbb{Z}^2}\| \simeq \left\| \sum_{\rho \in \mathbb{Z}^2} a_\rho v_\rho \right\|.$$

La relation (1.3.4) requiert que la représentation utilisée soit dans un certain sens proche de la décomposition en valeurs singulières. Si  $u_\rho = v_\rho$ , on retombe exactement sur (1.3.1). Les coefficients  $\kappa_j$  sont d'ailleurs appelés pseudo valeurs propres. Les deux hypothèses (1.3.5) et (1.3.6) viennent appuyer, à leur manière, cette restriction.

En supposant qu'une telle représentation existe, il est alors possible d'exprimer n'importe quelle fonction  $f$  sous la forme:

$$(1.3.7) \quad f = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \langle Af, u_{jk} \rangle \kappa_j^{-1} \psi_{jk}.$$

Cette représentation présente donc un bon compromis entre la SVD et l'utilisation exclusive de bases d'ondelettes. Elle est appelée **WVD** pour *Wavelet Vaguelette Decomposition*.

Estimer la suite  $(\langle Af, u_\rho \rangle)_{\rho \in \mathbb{Z}^2}$  par  $(\langle Y, u_\rho \rangle)_{\rho \in \mathbb{Z}^2}$  est très naturel. Comme pour la SVD, un filtrage est cependant nécessaire afin de pouvoir contrôler l'erreur induite par l'estimation de chaque coefficient. A l'aide de (1.3.7), on va donc construire des estimateurs du type:

$$\hat{f} = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \lambda_{jk} \kappa_j^{-1} \langle Y, u_{jk} \rangle \psi_{jk},$$

où  $(\lambda_{jk})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  est un filtre. La plupart du temps, ce dernier est seulement indexé sur le niveau de résolution  $j$ . Nous présenterons dans la section suivante quelques exemples possibles de filtres ainsi que les performances associées.

Donoho [24] présente une construction explicite de la WVD pour l'opérateur d'intégration, conciliant ainsi la simplicité de la SVD et les capacités de compression des ondelettes. C'est également le cas pour des opérateurs d'intégrations fractionnaires ou pour la transformée de Radon, très utilisée en tomographie et imagerie médicale. Ce type de représentation est très prisée lorsque l'on a affaire à des fonctions très peu régulières, voire discontinues.

La WVD présente donc de nombreux avantages mais souffre, comme la SVD, de certains défauts. En premier lieu, cette représentation est parfois coûteuse à obtenir d'un point de vue pratique. En effet, dans la plupart des cas, les suites  $(u_\rho)_{\rho \in \mathbb{Z}^2}$  et  $(v_\rho)_{\rho \in \mathbb{Z}^2}$  sont



calculées à partir de la base  $(\psi_\rho)_{\rho \in \mathbb{Z}^2}$  et de l'opérateur  $A$ . Ce type de construction est relativement délicat, en particulier pour des opérateurs dont l'expression est peu explicite. On retombe donc bien souvent sur le même problème rencontré pour la SVD. Il existe de plus de nombreux opérateurs pour lesquels la représentation WVD ne peut être construite. Typiquement, la construction est possible quand l'opérateur peut être convenablement représenté à l'aide des bases de Fourier usuelles.

### 1.3.3 Algorithmes complémentaires

Ainsi, bien que la WVD présente de nombreux avantages, la mise en place de cette méthode reste quelque peu délicate et cantonnée à un champ d'application plutôt réduit. Afin d'élargir l'utilisation des bases d'ondelettes dans les problèmes inverses, de nombreux algorithmes alternatifs ont donc été proposés.

#### Wave-D

L'algorithme Wave-D a été introduit dans Johnstone et al. [44] pour l'étude des problèmes de convolution. Comme pour la WVD, cet algorithme cherche à proposer le meilleur compromis possible entre la simplicité de la décomposition en valeurs singulières et les capacités de compression des bases d'ondelettes. Les vecteurs propres  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'un opérateurs de convolution correspondent à la base de Fourier usuelle, les valeurs propres associées étant les coefficients de Fourier du noyau de convolution. Etant donnée une base d'ondelettes  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , on cherche à estimer chacun des coefficients de  $f$  dans cette base. L'approche Wave-D consiste à remarquer que, pour tout  $\rho \in \mathbb{Z}^2$ :

$$\langle f, \psi_\rho \rangle = \sum_{l=1}^{+\infty} \theta_l \langle \psi_\rho, \phi_l \rangle, \text{ pour } \theta_l = \langle f, \phi_l \rangle.$$

La construction d'un estimateur pour cet algorithme s'appuie essentiellement sur la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur. Rappelons qu'il est possible d'exprimer le modèle sous la forme séquentielle:

$$(1.3.8) \quad y_k = b_k \theta_k + \epsilon \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

En utilisant (1.3.8), il est alors possible d'estimer chaque coefficient  $\langle f, \psi_\rho \rangle$  par:

$$\hat{\beta}_\rho = \sum_{l=1}^{+\infty} b_l^{-1} y_l \langle \psi_\rho, \phi_l \rangle.$$

Afin d'obtenir un estimateur convenable, il suffira de filtrer la suite  $(\hat{\beta}_\rho)_{\rho \in \mathbb{N}}$  afin de pouvoir contrôler l'erreur accumulée.

#### Need-VD

L'algorithme Wave-D ne peut servir que pour les problèmes impliquant un opérateur de convolution. Plus récemment, une approche similaire a été mise au point par Kerkycharian et al. [47] pour des classes d'opérateurs n'admettant pas la base de Fourier comme vecteurs propres. La première étape pour la mise en place de cette représentation, appelée **Need-VD**, consiste à construire un ensemble de "frame", appelé *needlet*:

$$\Psi = \{\psi_{j\eta} : \eta \in \mathbb{Z}_j, j \geq -1\}, \text{ pour } \mathbb{Z}_j = \{1, \dots, 2^j\},$$

tel que chaque fonction  $f \in H$  puisse être décomposée sous la forme:

$$f = \sum_j \sum_{\eta \in \mathbb{Z}_j} \langle f, \psi_{j,\eta} \rangle \psi_{j,\eta}.$$

L'ensemble  $\Psi$  est construit à partir de l'opérateur et des vecteurs propres associés. Il est à noter que  $\Psi$  ne définit pas forcément une base de  $H$ . Dans la littérature,  $\Psi$  est appelé *frame*. Les  $\psi_{j,\eta}$  ne sont pas orthogonaux entre eux.

Pour tout  $j \geq -1$  et  $\eta \in \mathbb{Z}_j$ , posons  $\beta_{j,\eta} = \langle f, \psi_{j,\eta} \rangle$ . Puisque le système de vecteurs propres  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définit une base orthonormée, il est possible d'écrire que:

$$\beta_{j,\eta} = \sum_k \theta_k \psi_{j,\eta}^k, \text{ pour } \psi_{j,\eta}^k = \langle \psi_{j,\eta}, \phi_k \rangle, \forall j \geq -1, \eta \in \mathbb{Z}_j.$$

En utilisant (1.3.8), on va alors estimer la fonction  $f$  par:

$$(1.3.9) \quad \hat{f} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}_j} \lambda_{j,\eta} \hat{\beta}_{j,\eta} \psi_{j,\eta}, \text{ pour } \hat{\beta}_{j,\eta} = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k^{-1} y_k \psi_{j,\eta}^k,$$

et  $\lambda$  est un filtre. Il est à noter que les *needlets* sont construites de telle sorte que chaque  $\hat{\beta}_{j,\eta}$  ait une variance finie.

La construction de cette méthode est largement détaillée dans Kerkycharian et al. [47] et est accompagnée de nombreuses simulations. La construction des *needlets* est effectuée de manière explicite pour une certaine classe d'opérateurs. Pour ces derniers, il n'est donc plus nécessaire que les vecteurs propres correspondent à la base de Fourier. Les conditions d'application sont donc moins restrictives. Ceci se fait cependant au détriment de l'ensemble  $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^2}$ . Ce dernier ne forme plus une base orthonormée de  $H$ , ce qui complique fortement les calculs.

L'amélioration numérique apportée par cette méthode, comparée à la traditionnelle décomposition en valeurs singulières, est significative pour des fonctions plutôt irrégulières, c'est-à-dire ne pouvant être représentées convenablement dans une base de Fourier. Ce type d'information n'est bien-sûr pas connu à l'avance. Il serait donc intéressant de pouvoir comparer ces deux représentations pour des signaux très réguliers, aussi bien sur le plan du temps de calcul requis que de la qualité d'estimation.

### Curvelet et BCD

La suprématie des bases d'ondelettes en terme de capacité de compression est indiscutable en dimension 1. En dimension 2, c'est-à-dire lorsque l'on a affaire à des images, il est par contre possible de construire des représentations bien plus performantes en termes de capacité de compression, en particulier pour des images présentant des discontinuités. Pour ces dernières, E. Candès et D. Donoho préconisent l'utilisation de *curvelets* (cf Candès and Donoho [11]). Ces objets permettent de représenter efficacement des images présentant des discontinuités le long de courbes  $C^2$ . C'est exactement le type de données que l'on peut rencontrer en imagerie médicale.

Comme pour les *needlets* de l'algorithme Need-VD, les *curvelet* ne forment pas une base mais simplement un "support" (*frame*). Encore une fois, il convient de s'assurer que l'utilisation de ce type de représentation est possible pour l'étude d'un problème inverse.

Dans Candès and Donoho [12], des propriétés analogues à celles de la WVD sont établies pour des ensembles de *curvelet* appliqués à la transformée de Radon.

L'utilisation de ces objets est, pour l'instant, restreinte à la transformée de Radon mais semble être généralisable à un large panel d'opérateurs dont les opérateurs de convolution.

### 1.3.4 Représentation matricielle

D'une certaine manière, la décomposition en valeurs singulières est "optimale" pour l'opérateur  $A$  au sens où la matrice de représentation associée est diagonale. Nous avons cependant pu constater que le choix des bases pour cette approche est plutôt figé. La même constatation est, dans une moindre mesure, la même pour les approches présentées dans le paragraphe précédent. Idéalement, on souhaiterait pouvoir choisir une base pour représenter la fonction  $f$  sans aucune contrainte autre que d'ordre pratique. Si dans un domaine donné, il est habituel, voire nécessaire d'utiliser une base précise, on aimerait ne pas avoir à remettre en cause cette représentation.

Il est alors possible d'utiliser l'approche suivante. On se donne deux bases orthonormées  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de respectivement  $H$  et  $K$ . Avec un minimum de contraintes sur ces dernières, on cherche à estimer la fonction  $f$ . Cette fois-ci, la matrice de représentation de l'opérateur  $A^*A$  n'est plus forcément diagonale. D'un point de vue théorique, on pourra toujours utiliser les méthodes de régularisation présentées dans la Section 1.2 en remplaçant simplement les opérateurs par leurs matrices. Une telle approche a cependant un coût que l'on retrouve en terme de temps de calcul. L'inversion d'une matrice quelconque peut être très compliquée, voire impossible en temps fini. Il faut donc réfléchir à des méthodes évitant au maximum ce type de calcul. En cela, les méthodes de Tikhonov présentent quelques lacunes. Au contraire, les méthodes itératives (Landweber,  $\nu$ -méthodes,...) nécessitent uniquement des produits vecteurs matrices et seront donc plutôt privilégiées.

Pour plus de détails sur ce type de représentation, nous citerons entre autres les travaux de Cohen et al. [23], Efromovich and Koltchinskii [29] ou Hoffmann and Reiß [40].

La question de la représentation est loin d'être résolue à ce jour. Il y a un réel compromis à trouver entre la compression du signal  $f$  et le comportement de l'opérateur  $A$ . Pour l'instant, étant données certaines caractéristiques associées à la fonction  $f$  (discontinuité, périodicité, régularité,...) et à l'opérateur  $A$  (déconvolution, transformée de Radon,...), il est possible de construire des représentations autorisant une qualité d'estimation "optimale". Une ambition classique en statistique est de s'affranchir de la connaissance d'informations sur le modèle étudié. Ceci peut être en particulier nécessaire quand l'opérateur lui-même est mal connu (nous reviendrons plus en détail sur cet aspect dans les Chapitre 2 et 3).

Ceci clôt la section consacrée à la représentation d'un problème inverse. Nous allons à présent nous intéresser à la construction de méthodes de régularisation.

## 1.4 Régularisation et qualité d'estimation

Nous présentons dans cette section deux critères complémentaires permettant de mesurer les performances d'un estimateur: les points de vue minimax et oracles. Nous évoquerons différentes approches possibles permettant d'atteindre ces objectifs: l'estimation

non-adaptative, la sélection de modèle et enfin l'estimation non-linéaire par *seuillage*, chacune d'entre elles pouvant être employée dans les différentes représentations décrites dans la Section 1.3. Suivant la situation, nous utiliserons donc l'une ou l'autre de ces dernières.

### 1.4.1 Estimation minimax et inégalités oracles

Pour pouvoir parler de qualité d'estimation, il est nécessaire de se doter d'un critère permettant de mesurer la "distance" entre un estimateur  $\hat{f}$  et la cible  $f$ . Le risque quadratique d'un estimateur  $\tilde{f}_t = \Phi_t(A^*A)A^*Y$  est défini par:

$$\mathbb{E}_f \|\tilde{f}_t - f\|^2 = \mathbb{E}_f \|\Phi_t(A^*A)A^*Y - f\|^2.$$

Il existe beaucoup d'autres possibilités pour mesurer la qualité d'estimation d'une méthode donnée. De manière générale, le risque d'un estimateur peut-être défini par:

$$\mathbb{E}_f \rho_H(\tilde{f}_t - f),$$

où  $\rho_H$  est une fonction de perte c'est-à-dire une fonction positive, croissante, symétrique et telle que  $\rho_H(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ . Dans la suite de cette thèse, nous nous intéresserons uniquement au risque quadratique, ce dernier possédant de nombreuses propriétés intéressantes.

En utilisant le modèle du bruit blanc (1.2.2), il est possible de voir que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_f \|\tilde{f}_t - f\|^2 &= \mathbb{E}_f \|\Phi_t(A^*A)A^*(Af + \epsilon\xi) - f\|^2 \\ (1.4.1) \quad &= \|(\Phi_t(A^*A)A^*A - I)f\|^2 + \epsilon^2 \mathbb{E}_f \|\Phi_t(A^*A)A^*\xi\|^2, \end{aligned}$$

où  $I$  représente l'opérateur identité. Ainsi, le risque quadratique d'un estimateur peut s'exprimer comme la somme d'un terme de biais et de l'espérance d'un terme stochastique. Puisque la fonction  $\Phi_t$  "converge" vers la fonction  $x \mapsto x^{-1}$  quand  $t$  tend vers l'infini, plus le paramètre  $t$  sera grand, plus le biais sera petit. Cependant, l'espérance du terme stochastique aura elle tendance à augmenter avec  $t$ . En effet,  $\|\Phi_t(A^*A)A^*\| \rightarrow \|A^{-1}\|$ , la norme de  $A^{-1}$  étant infinie. Le choix du paramètre  $t$  est donc crucial pour garantir une bonne qualité d'estimation. Intuitivement, si  $t$  est très grand,  $\tilde{f}_t$  a plus de chance d'être proche de la fonction  $f$  mais l'erreur accumulée est très importante. Au contraire, une petite valeur de  $t$  est associée à une mauvaise qualité d'approximation mais l'erreur commise est faible. Ainsi, de manière générale, le choix de  $t$  est un compromis à trouver entre la précision de reconstruction souhaitée et l'erreur induite.

La principale difficulté en statistique n'est pas tant d'estimer un paramètre ou un signal mais surtout d'arriver à contrôler, le plus précisément possible, la proximité entre un estimateur  $\tilde{f}_t$  et sa cible  $f$ . Le risque quadratique donne déjà une première indication. Ce dernier dépend cependant explicitement de la fonction  $f$ . Il est donc nécessaire de pouvoir disposer d'un critère permettant de contrôler la précision de  $\tilde{f}_t$  avec un minimum d'informations sur  $f$ . Il est également utile de pouvoir départager précisément deux méthodes d'estimation d'un point de vue global. Historiquement, la première notion d'optimalité introduite est le principe de risque minimax.

**Définition 1.4.1** Soit  $W$  un espace de fonctions. La vitesse *minimax* sur  $W$  est définie par:

$$(1.4.2) \quad \varphi(W) = \inf_f \sup_{f \in W} \mathbb{E}_f \|\tilde{f} - f\|^2,$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des estimateurs de  $f$ . Pour un estimateur  $\hat{f}$  donné, on dira que  $\hat{f}$  atteint la vitesse minimax sur  $W$  si il existe une constante  $C \geq 1$ , indépendante de  $\epsilon$  telle que:

$$\sup_{f \in W} \mathbb{E}_f \|\hat{f} - f\|^2 \leq C \inf_{\tilde{f}} \sup_{f \in W} \mathbb{E}_f \|\tilde{f} - f\|^2.$$

Le meilleur estimateur au sens minimax est donc celui dont le risque maximal sur  $W$  est le plus petit (d'où l'appellation minimax). Ce critère est plutôt pessimiste dans la mesure où chaque estimateur est défini par sa plus mauvaise performance sur  $W$ .

Il existe de nombreux espaces de fonctions différents. Pour  $H = L^2([0,1])$ , on pourra citer par exemple les espaces de Sobolev:

$$W(\alpha, Q) = \left\{ f \in H : \int_0^1 (f^{(\alpha)}(t))^2 dt \leq Q \right\}, \alpha \in \mathbb{N}, Q > 0,$$

où  $f^{(\alpha)}$  représente le  $\alpha$ -ème dérivée de la fonction  $f$ . D'une certaine manière, plus le paramètre  $\alpha$  est grand, plus la fonction est "lisse". Ce type d'espace est souvent associé à l'utilisation de bases de Fourier, la dérivée d'une fonction pouvant dans ce type de situation s'exprimer simplement. Cependant, comme nous avons pu le voir, il arrive que d'autres bases soient requises, ces dernières étant souvent choisies en fonction de l'opérateur. Un espace fonctionnel alternatif, fréquemment utilisé en analyse numérique est:

$$V(\mu, Q) = \{ f : \|(A^*A)^{-\mu} f\|^2 \leq Q \},$$

pour  $\mu, Q > 0$ . Dans cette situation, la régularité de la fonction est exprimée en fonction de l'opérateur  $(A^*A)^{-\mu}$ . Ce dernier peut être en quelque sorte vu comme un opérateur différentiel. Enfin, il existe nombre d'espaces de fonctions et de manières d'exprimer différemment la régularité d'une fonction. Nous citerons en particulier les espaces de Besov, très souvent associés aux bases d'ondelettes (cf Annexe A pour une définition précise).

Le critère minimax présente néanmoins quelques limites. Tout d'abord, c'est un point de vue relativement pessimiste. De plus, la précision d'une méthode dépend, avec ce type de critère, de certaines informations sur la fonction  $f$  comme la régularité ou la norme. Comme nous le verrons par la suite, il est possible de construire des méthodes adaptatives, c'est-à-dire ne nécessitant pas la connaissance a priori de ces informations. Il est donc inadéquat de mesurer uniquement l'efficacité de ces dernières en se ramenant à des espaces précis.

**Définition 1.4.2** *Etant données une méthode  $\hat{f}$  et une famille d'estimateurs  $\Lambda$ , une inégalité du type:*

$$(1.4.3) \quad \mathbb{E}_f \|\hat{f} - f\|^2 \leq (1 + \rho_\epsilon) \mathbb{E}_f \|\tilde{f}^0 - f\|^2 + T_\epsilon, \text{ pour } \tilde{f}^0 = \underset{\tilde{f} \in \Lambda}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}_f \|\tilde{f} - f\|^2, \forall f \in H,$$

et  $\rho_\epsilon \geq 0$  est appelée **inégalité oracle**. Le terme  $\tilde{f}^0$  est quant à lui qualifié d'oracle. Pour tout  $f \in H$ , il correspond au meilleur estimateur possible dans la famille  $\Lambda$  connaissant  $f$ .

Quand  $\rho_\epsilon \rightarrow 0$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ , on parlera d'inégalité oracle exacte. La quantité  $T_\epsilon$  est un terme résiduel. Souvent, ce dernier peut être majoré par un terme du type  $\bar{C}\epsilon^2$  pour

$\bar{C}$  constante positive indépendante de  $\epsilon$  et peut donc être considéré comme négligeable. Il est cependant utile de pouvoir contrôler la constante  $\bar{C}$ , cette dernière ayant une possible influence sur la qualité d'estimation.

Dans de nombreuses situations, une inégalité oracle est un très bon moyen d'obtenir des résultats minimax. Ce type de résultat est cependant beaucoup plus fort. En premier lieu, une inégalité oracle concerne l'ensemble des éléments de  $H$ . Elle est établie sans restriction aucune sur la fonction  $f$ . Ce point de vue est donc beaucoup moins restreint que pour l'approche minimax. Par ailleurs, une inégalité oracle présente un caractère non-asymptotique dans la mesure où elle permet de comparer les performances d'une méthode à un estimateur "idéal"  $f_0$ , et ce, quelle que soit la valeur du niveau de bruit.

Plus récemment, la notion de **maxiset** a été introduite par Kerkycharian and Picard [48]. Cette approche est complémentaire aux motivations énoncées dans ce paragraphe. Etant données une méthode d'estimation  $\hat{f}$  et une vitesse de convergence  $\varphi(\epsilon)$ , l'idée est de chercher l'espace fonctionnel le plus grand possible sur lequel  $\hat{f}$  atteint la vitesse  $\varphi(\epsilon)$ . Cette notion est beaucoup moins pessimiste que le risque minimax puisqu'une méthode est non plus définie par sa plus "mauvaise" performance sur un espace préalablement fixé, mais par l'ensemble des fonctions pouvant être estimées par  $\hat{f}$  à la vitesse  $\varphi(\epsilon)$ . Cette approche peut être utilisée pour une large gamme de modèles. Nous ne nous attarderons néanmoins pas sur cette dernière.

### 1.4.2 Régularisation non-adaptative

Une méthode d'estimation est dite non-adaptative si sa construction requiert la connaissance d'une ou plusieurs informations sur la fonction  $f$  comme sa régularité, sa norme, la présence de discontinuités, etc... Ces particularités sont inconnues dans la majeure partie des cas rencontrés. Au contraire, une méthode sera dite adaptative si elle n'est construite qu'à partir des observations  $Y$ . La méthode s'ajuste (ou s'adapte) d'elle-même aux particularités de la cible  $f$ .

Pour cette section, par soucis de simplicité, nous nous intéresserons uniquement aux méthodes de régularisation dans un cadre SVD (cf Section 1.1.3). Nous considérons des fonctions contenues dans l'espace:

$$V(\mu, Q) = \{f : \|(A^*A)^{-\mu} f\|^2 \leq Q\},$$

pour  $\mu > 0$ . La quantité  $\mu$  sera appelée régularité de la fonction  $f$ . Soit  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la base de vecteurs propres de l'opérateur  $A$ . Par l'intermédiaire de (1.3.1),

$$(1.4.4) \quad \|(A^*A)^{-\mu} f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle (A^*A)^{-\mu} f, \phi_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^{-4\mu} \theta_k^2, \text{ pour } \theta_k = \langle f, \phi_k \rangle, \forall k \in \mathbb{N}.$$

En utilisant (1.4.4), l'espace  $V(\mu, Q)$  peut être écrit sous la forme:

$$V(\mu, Q) = \left\{ \vartheta : \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^{-4\mu} \vartheta_k^2 \leq Q \right\}.$$

Il est donc possible d'exprimer la régularité de la fonction  $f$  en fonction de la vitesse à laquelle ses coefficients dans la base  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  décroissent.

Soit  $\Phi_t$  une méthode de régularisation et  $\tilde{f}_t$ ,  $(\lambda_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  respectivement l'estimateur et le filtre associé. En utilisant (1.4.1) et l'identité de Parseval, remarquons que:

$$\mathbb{E}_f \|\tilde{f}_t - f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2}.$$

Sachant que  $f \in V(\mu, Q)$  et connaissant le comportement de la suite  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , il est alors possible de majorer séparément les deux termes du risque quadratique. Reste ensuite à choisir  $t$  de telle sorte que ces derniers s'équilibrent. On peut alors espérer que l'estimateur obtenu atteigne la vitesse minimax sur  $V(\mu, Q)$ .

EXEMPLE 1.4.1 (Estimation par projection)

Intéressons-nous en tout premier lieu à une méthode de régularisation élémentaire: l'estimation par projection (appelée aussi *spectral cut-off*). Le principe est très intuitif: pour tout entier  $k$ , on observe  $y_k = b_k \theta_k + \epsilon \xi_k$ . Puisque  $b_k \rightarrow 0$ , on ne peut pas raisonnablement espérer estimer  $\theta_k$  pour de grandes valeurs de  $k$ . Il y a trop de bruit dans  $y_k$ . Le principe de l'estimation par projection est donc de n'estimer qu'un nombre restreint de coefficients. Considérons pour cela l'estimateur:

$$\hat{\theta}_k^t = \begin{cases} b_k^{-1} y_k & \text{si } k \leq t, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour  $t \in \mathbb{N}$ . Le risque quadratique associé est:

$$R(\theta, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\hat{\theta}_k^t - \theta_k)^2 = \sum_{k>t} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2}.$$

Le choix du paramètre  $t$  est donc un compromis à trouver entre le nombre de coefficients estimés et l'erreur accumulée. Supposons que la suite de valeurs propres possède un comportement polynomial, c'est-à-dire:  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (k^{-\beta})_{k \in \mathbb{N}}$ . Le risque quadratique peut alors être majoré de la manière suivante:

$$(1.4.5) \quad R(\theta, t) \leq C \left[ \sum_{k>t} k^{-4\beta\mu} k^{4\beta\mu} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t k^{2\beta} \right] \leq C t^{-4\beta\mu} + C \epsilon^2 t^{2\beta+1},$$

pour une constante  $C > 0$  indépendante de  $\epsilon$ . Le choix "optimal" pour  $t$  est donc celui qui équilibre les deux termes du membre de droite dans (1.4.5). Remarquons que:

$$t^{-4\beta\mu} \simeq \epsilon^2 t^{2\beta+1} \Leftrightarrow t \simeq \epsilon^{-\frac{2}{2\beta+4\beta\mu+1}}.$$

Avec ce choix de  $t$ :

$$R(\theta, t) \leq C \epsilon^{\frac{8\beta\mu}{2\beta+4\beta\mu+1}},$$

pour  $C > 0$  indépendante de  $\epsilon$ . Il est alors possible de montrer que la vitesse obtenue correspond exactement à la vitesse minimax de convergence sur  $V(\mu, Q)$ . Calibrer un estimateur par projection pour obtenir une vitesse optimale est donc possible à condition de connaître la régularité  $\mu$  de la fonction et dans une moindre mesure sa norme.

EXEMPLE 1.4.2 (Méthode itérative de Landweber)

Nous avons pu voir dans les exemples de la Section 1.2.2, que chaque itération  $\hat{f}_t$  de Landweber était exprimée sous la forme:

$$\hat{f}_t = \hat{f}_{t-1} + A^*(Y - A\hat{f}_{t-1}).$$

En utilisant la décomposition en valeurs singulières (1.3.1) de  $A$ , il est possible de remarquer que, pour tout entier  $k$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}_t^k &\triangleq \langle \hat{f}_t, \phi_k \rangle = \hat{f}_{t-1}^k + \langle A^*(Y - A\hat{f}_{t-1}), \phi_k \rangle, \\ &= \hat{f}_{t-1}^k + b_k \langle Y - A\hat{f}_{t-1}, \psi_k \rangle, \\ &= \hat{f}_{t-1}^k + b_k y_k - b_k^2 \hat{f}_{t-1}^k, \\ &= (1 - b_k^2) \hat{f}_{t-1}^k + b_k y_k. \end{aligned}$$

Par induction, on arrive donc à l'expression:

$$\hat{f}_t^k = \sum_{l=0}^{t-1} (1 - b_k^2)^l b_k y_k = \sum_{l=0}^{t-1} (1 - b_k^2)^l b_k^{-1} y_k = (1 - (1 - b_k^2)^t) b_k^{-1} y_k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

à condition que  $\max_k |b_k| < 1$ . Si cette condition n'est pas vérifiée, il est possible de modifier légèrement la méthode, comme indiqué dans la Section 1.2.2.

Nous allons à présent nous intéresser au nombre d'itérations nécessaires pour que cet estimateur atteigne la vitesse optimale de convergence sur l'espace  $W = V(\mu, Q)$ . Pour tout entier  $t$ , le risque quadratique de  $\hat{f}_t$  prend la forme:

$$R(\theta, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2}, \quad \text{pour } \lambda_k(t) = (1 - (1 - b_k^2)^t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Il est dans un premier temps possible de remarquer que:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - b_k^2)^{2t} b_k^{2\mu} b_k^{-2\mu} \theta_k^2 \leq Q \max_{k \in \mathbb{N}} (1 - b_k^2)^{2t} b_k^{2\mu} \leq Ct^{-\mu},$$

en supposant que la suite de valeurs propres  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  suit un comportement polynomial de degré  $\beta$ . La majoration du second terme présent dans le risque quadratique s'effectue en deux étapes. Soit  $n_t$  un entier à choisir ultérieurement:

$$\epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} = \epsilon^2 \sum_{k=1}^{n_t} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} + \epsilon^2 \sum_{k=n_t}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} \leq C \epsilon^2 n_t^{2\beta+1} + C \epsilon^2 n_t t.$$

En choisissant:

$$n_t \simeq \epsilon^{-\frac{2}{2\beta+4\beta\mu+1}}, \quad \text{et } t \simeq \epsilon^{-\frac{4\beta}{2\beta+4\beta\mu+1}},$$

l'estimateur associé atteint la vitesse minimax de convergence sur  $V(\mu, Q)$ .



Il est possible de mettre en place un traitement du risque quadratique analogue pour l'ensemble des méthodes présentées dans la section précédente en utilisant la décomposition en valeurs singulières. Remarquons que des majorations similaires peuvent être obtenues sans passer par ce type de représentation (cf Engl et al. [31]). Nous reviendrons de manière détaillée sur l'estimation par la méthode de Tikhonov dans le Chapitre 4.

D'un point de vue minimax, une partie des méthodes présentées dans la Section 1.2.2 ne permettent pas d'estimer, de manière optimale, des fonctions très régulières. On dit qu'il y a un phénomène de saturation.

**Définition 1.4.3** *La qualification d'une méthode d'estimation  $\hat{f}$  correspond à la régularité maximum  $\mu$  pour laquelle  $\hat{f}$  atteint la vitesse minimax de convergence sur  $V(\mu, Q)$ .*

La qualification des méthodes d'estimation par projection ou par itération de Landweber est *infinie*, au sens où elle est supérieure à n'importe quel entier. D'autres approches, comme les procédures de Tikhonov ou les  $\nu$ -méthodes sont un peu plus limitées. Les qualifications des différents estimateurs présentés dans ce chapitre sont rassemblées dans le tableau récapitulatif suivant:

Estimateur	Qualification
Projection	$\infty$
Tikhonov	1
Tikhonov avec a priori $a$	$1 + 2a$
Tikhonov itéré	Nombre d'itérations
Landweber	$\infty$
$\nu$ -méthode	$\nu$

Connaissant la régularité de la fonction  $f$ , il est plutôt aisé de choisir une méthode ne saturant pas et de la calibrer pour obtenir la vitesse minimax de convergence. Cependant, comme nous l'avons déjà dit, cette approche est très limitée dans la mesure où la fonction et ses caractéristiques sont inconnues a priori. Il est donc nécessaire de se tourner vers des méthodes dites adaptatives.

### 1.4.3 Sélection de modèle

Nous avons vu qu'il était nécessaire de recourir à des méthodes plus élaborées permettant de régulariser le problème sans la connaissance préalable d'informations sur  $f$  (norme, régularité, présence de discontinuités,...). Une première manière d'atteindre cet objectif est d'utiliser des méthodes existantes (comme celles décrites dans la Section 1.2) et de construire un algorithme permettant de choisir le paramètre de régularisation à partir des observations. Cette approche est détaillée dans la présente section. Nous verrons dans la suivante qu'il est également possible de construire des méthodes dites de *seuillage*, ne s'appuyant pas sur des procédures existantes.

Considérons le problème suivant: étant donnée une collection d'estimateurs  $\Lambda$  (ou de paramètres), on cherche à déterminer celui correspondant le mieux pour l'estimation de  $f$ , i.e. celui dont le risque quadratique est le plus petit possible. La famille  $\Lambda$  sera identifiée

à un opérateur de régularisation  $\Phi_t$  ainsi qu'à une collection  $T$  de paramètres. Pour une fonction  $f$  donnée, on notera  $t_0$  l'oracle associé à cette famille.

La méthode d'estimation du risque sans biais, appelée aussi critère d'Akaike, fait partie des méthodes les plus couramment utilisées pour le choix du paramètre  $t$ . Cette dernière sera désignée par la suite sous l'appellation de méthode URE (pour *unbiased risk estimation*). Idéalement, le meilleur choix possible pour  $t$  est l'oracle  $t_0$ . Ce dernier n'est cependant pas accessible puisqu'il dépend explicitement de la fonction inconnue  $f$ . Pour s'en approcher, cette méthode propose de construire un estimateur  $U(t,y)$  du risque quadratique et de trouver le paramètre  $t$  qui minimise ce dernier. On espère ainsi pouvoir se rapprocher le plus possible de l'oracle, à condition que  $U(t,y)$  soit un "bon" estimateur. Soit  $\lambda(t)$  le filtre associé à la méthode  $\Phi_t$ . Un estimateur naturel pour le risque quadratique est:

$$U(t,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \{\lambda_k^2(t) - 2\lambda_k(t)\} (b_k^{-2}y_k^2 - \epsilon^2 b_k^{-2}) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2}.$$

Définissons alors:

$$(1.4.6) \quad \hat{t} = \operatorname{argmin}_{t \in T} U(t,y),$$

et désignons par  $\hat{\theta}$  l'estimateur associé à ce paramètre. Toute la difficulté réside dans le choix de la collection  $T$  ou plus généralement de la famille  $\Lambda$ .

Le premier résultat présenté ici à été établi par Cavalier et al. [16]. Introduisons la fonction:

$$(1.4.7) \quad \omega(x) = \sup_{t \in T} \sup_k \lambda_k^2(t) b_k^{-2} \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2(t) b_i^{-2} \leq x \sup_l \lambda_l^2(t) b_l^{-2}\}}.$$

Cette dernière est calculée de manière explicite dans Cavalier et al. [16] pour une large gamme d'estimateurs.

**Théorème 1.4.1** *Supposons qu'il existe une constante  $C_\Lambda$  telle que, uniformément en  $\lambda$ :*

$$(1.4.8) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-4} \leq C_\Lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^4 b_k^{-4}.$$

*Soit  $\hat{\theta}$  l'estimateur associé au choix de paramètre (1.4.6). Il existe  $B_1, B_2 > 0$  et  $\gamma_0 > 0$  tels que, pour tout  $\gamma < \gamma_0$ :*

$$(1.4.9) \quad \mathbb{E}_\theta \|\hat{\theta} - \theta\|^2 \leq (1 + B_1 \gamma) \min_{\lambda \in \Lambda} R(\theta, \lambda) + \epsilon^2 B_2 \gamma^{-1} \omega(\gamma^{-2} L_\Lambda).$$

Le terme  $L_\Lambda$  désigne la complexité de la famille. Cette quantité donne une indication sur la taille et l'homogénéité de cette dernière. La définition exacte est donnée dans Cavalier et al. [16].

D'après le Théorème 1.4.1, le risque de l'estimateur obtenu par la méthode URE est donc relativement proche de celui de l'oracle, à partir du moment où la famille considérée est finie. Il est important de noter que (1.4.9) diffère légèrement de (1.4.3) par l'apparition du terme résiduel  $\epsilon^2 B_2 \gamma^{-1} \omega(\gamma^{-2} L_\Lambda)$ . Ce terme dépend de la complexité de la famille. Plus

la famille est grande, plus il sera difficile de se rapprocher de l'oracle, tout du moins pour un niveau de bruit conséquent. Typiquement, plus le niveau de bruit sera faible, plus on pourra considérer de grandes familles.

L'hypothèse (1.4.8) permet de contrôler la variance de l'estimateur  $U(y,t)$ . En effet, si cette dernière est de l'ordre du risque quadratique, on peut s'attendre à un choix de paramètre relativement instable. Ce type de contrainte est tout à fait classique et est satisfaite par un grand nombre d'estimateurs. C'est par exemple le cas pour les estimateurs par projection, de Tikhonov (et ses variantes) ou encore pour la méthode itérative de Landweber.

D'un point de vue théorique, la méthode URE donne donc de très bonnes performances. D'un point de vue numérique, les résultats sont toutefois un peu moins bons. Cette procédure s'avère souvent très instable dans le choix du paramètre de régularisation  $t$ . Cette instabilité peut être en partie expliquée par le phénomène suivant: pour l'estimation par projection, l'estimateur  $U(y,t)$  prend la forme:

$$U(y,t) = - \sum_{k=1}^t b_k^{-2} y_k^2 + 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2}.$$

Pour chaque entier  $k$ ,  $b_k^{-1} y_k \sim \mathcal{N}(\theta_k, \epsilon^2 b_k^{-2})$ . Le critère  $U(y,t)$  est donc la somme d'un terme déterministe positif et d'un terme stochastique strictement négatif dont la variance explose avec  $t$ . Ceci explique, au moins en partie, le choix de grandes valeurs de  $t$  par la méthode URE. Cette procédure est donc très instable.

Il est possible d'illustrer numériquement cette instabilité. Considérons le cas  $f \equiv 0$ , i.e.  $\theta_k = 0$  pour tout entier  $k$ . Dans la Figure 1.1, nous comparons le risque oracle  $R(\theta, \lambda^0)$  (courbe en pointillés) d'un estimateur par projection à quelques réalisations de l'estimateur  $U(y, \lambda(t))$  pour  $\beta = 0$  et  $\beta = 1$ . En l'occurrence, nous générons ici trois vecteurs gaussiens de taille 50 pour chaque valeur de  $\beta$ , et nous traçons la courbe correspondant aux valeurs prises par  $U(y,t)$  en fonction de  $t \in \{1, \dots, 50\}$ .

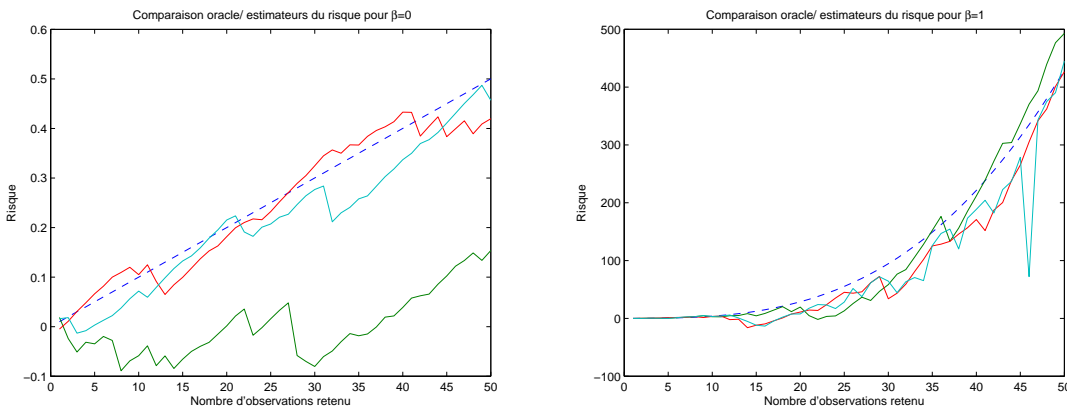


FIG. 1.1 – Méthode URE pour  $f=0$ .

Clairement, la variabilité du processus  $U(y,t)$ ,  $t \in \mathbb{N}$  est très importante et le minimum

de  $t \mapsto U(y,t)$  est souvent atteint pour de grandes valeurs de  $t$ . Dans le cas particulier  $f = 0$ ,

$$U(y,t) = -\epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} \xi_k^2 + 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} = -\eta(t) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2},$$

pour,

$$(1.4.10) \quad \eta(t) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1), \quad t \geq 0.$$

Remarquons que, pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Var } \eta(t) = \epsilon^4 \sum_{k=1}^t b_k^{-4}$ , à une constante près. Par ailleurs,  $R(\theta, \lambda^0) = \epsilon^2$ . L'estimateur  $U(y,t)$  peut donc prendre des valeurs négatives pour de grandes valeurs de  $t$ , faussant ainsi complètement l'estimation. Dans Cavalier and Golubev [17], une étude beaucoup plus complète est menée sur ce phénomène et il est démontré que les performances de la méthode URE sont très en deçà de ce que l'on pourrait attendre au vu du Théorème 1.4.1.

Le comportement numérique de la méthode URE est donc discutable pour l'estimation par projection. Nous verrons au Chapitre 4 que la même constatation est possible pour, par exemple, des estimateurs de Tikhonov. Afin de compenser cette instabilité, une des possibilités est d'introduire une pénalité dans l'estimateur du risque. On rajoute dans  $U(y,t)$  un terme  $pen(t)$  tel que  $pen(t) \rightarrow +\infty$  quand  $t$  tend vers l'infini, permettant ainsi de compenser le terme stochastique  $\eta(t)$ . On considère donc le critère pénalisé:

$$U(y,t) + pen(t) = -2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} y_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} + pen(t).$$

Si la pénalité est correctement choisie, elle ne devrait pas affecter la valeur de  $U(y,t)$  pour de "petites" valeurs de  $t$  autorisant ainsi la méthode à se rapprocher de l'oracle. Par contre, passé un "certain seuil", la pénalité devra être suffisamment importante pour pouvoir réhausser la valeur de  $U(y,t)$ , permettant ainsi de se mettre à l'abri d'un choix de paramètre inapproprié. Tout le travail consiste donc à trouver et construire une pénalité offrant la meilleure stabilité possible.

De nombreuses pénalités ont été proposées, en particulier concernant le cas direct c'est-à-dire  $A = I$ . Pour plus de détails concernant cette approche, nous citerons entre autres les travaux de Barron et al. [3], Birgé and Massart [7], Golubev [36] ou encore Loubes and Ludena [52].

Dans le cadre de l'estimation par projection, et pour des problèmes moyennement mal-posés, Cavalier and Golubev [17] ont introduit la notion d'enveloppe du risque. L'idée est de non plus s'intéresser au risque quadratique d'un estimateur par projection mais plutôt à sa perte, c'est-à-dire à la quantité:

$$l(\theta, t) = \|\hat{\theta}_t - \theta\|^2 = \sum_{k>t} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} \xi_k^2.$$

Le principe de la méthode de l'enveloppe du risque, appelée aussi **RHM** (pour *Risk Hull Minimization*), est de construire une enveloppe déterministe  $V(\theta, t)$  vérifiant:

$$\mathbb{E}_\theta \sup_{t \in \mathbb{N}} \{l(\theta, t) - V(\theta, t)\} \leq 0.$$

Il s'agit ensuite d'estimer non plus le risque mais cette enveloppe. Ainsi, la fonctionnelle de référence n'est plus  $R(\theta, t)$  mais  $V(\theta, t)$ . On prend en compte à la source la variabilité potentielle d'un estimateur  $\hat{\theta}_t$ . L'enveloppe proposée par Cavalier and Golubev [17] est de la forme:

$$V(\theta, t) = \sum_{k>t} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} + pen(t),$$

où  $pen(t)$  doit vérifier:

$$\mathbb{E}_\theta \sup_{t \in \mathbb{N}} \{l(\theta, t) - V(\theta, t)\} = \mathbb{E}_\theta \sup_{t \in \mathbb{N}} \{\eta(t) - pen(t)\} \leq 0,$$

le processus  $\eta(t)$ ,  $t \geq 0$  étant défini en (1.4.10). En estimant la fonctionnelle  $V(\theta, t)$ , on retrouve immédiatement la méthode URE pénalisée. Considérons l'exemple traité précédemment:  $f \equiv 0$ . Dans cette situation, un estimateur naturel pour l'enveloppe est:

$$V(y, t) = - \sum_{k=1}^t b_k^{-2} y_k^2 + 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} + pen(t) = -\eta(t) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} + pen(t).$$

Ainsi, la perte et l'estimateur de l'enveloppe étant de même variance, la pénalité va donc parfaitement compenser la variabilité de  $V(y, t)$ . La méthode RHM devrait donc logiquement mener à des choix de paramètres beaucoup plus stables.

Introduisons:

$$U_0(t) = \inf \{u > 0 : \mathbb{E} \eta(t) \mathbf{1}_{\{\eta(t) \geq u\}} \leq \epsilon^2\},$$

et

$$R_\alpha(\theta, t) = \sum_{k>t} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} + (1 + \alpha)U_0(t), \forall \alpha > 0.$$

Cavalier and Golubev [17] obtiennent une inégalité oracle pour la méthode RHM résumée dans le théorème suivant.

**Théorème 1.4.2** *Il existe une constante  $C^* > 0$  telle que, pour tout  $\alpha > 0$ ,*

$$V(\theta, t) = \sum_{k>t} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} + (1 + \alpha)U_0(t) + C^* \epsilon^2,$$

*soit une enveloppe du risque. Soient  $V(y, t)$  l'estimateur de cette enveloppe et  $t^*$  défini par  $t^* = \operatorname{argmin}_{t \in \mathbb{N}} V(y, t)$ . Il existe alors  $\bar{C} > 0$  et  $\gamma_1 > 0$  indépendants de  $\epsilon$  tels que, pour tout  $0 < \gamma < \gamma_1$  et  $\alpha > 1$ :*

$$(1.4.11) \quad \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \leq (1 + \gamma) \inf_{t \in \mathbb{N}} R_\alpha(\theta, t) + \bar{C} \epsilon^2 \left( \frac{1}{\gamma^{2\beta+1}} + \frac{1}{\alpha - 1} \right).$$

Ainsi, la méthode RHM donne d'excellents résultats théoriques pour l'estimation par projection. Ces derniers sont confirmés par des simulations numériques (voir Cavalier and Golubev [17]), pour lesquelles l'amélioration par rapport à la méthode URE est significative.

**Remarque:** L'inégalité (1.4.11) n'impose aucune restriction de taille sur la famille  $\Lambda$  contrairement au Théorème 1.4.1. Le résultat obtenu est donc beaucoup plus fort puisque  $t^*$  est proche du meilleur paramètre possible et ce, sur l'ensemble des entiers. Cette propriété n'est pas spécifique à l'utilisation de la méthode de l'enveloppe du risque mais au caractère particulier des estimateurs par projection. En effet, le processus  $\eta(t)$ ,  $t \geq 0$  défini en (1.4.10) est dans cette situation un processus de Wiener. Un résultat analogue (c'est-à-dire sans contrainte d'aucune sorte sur la taille de la famille) est d'ailleurs obtenu par Cavalier and Golubev [17] pour la méthode d'estimation du risque sans biais.

L'approche de minimisation de l'enveloppe du risque est très prometteuse en terme de qualité d'estimation. Elle ne concerne cependant que l'estimation par projection. Nous verrons dans le Chapitre 4 comment étendre la méthode RHM à une large gamme d'estimateurs, dont ceux proposés dans la Section 1.2.

#### 1.4.4 Estimation par seuillage

Les approches présentées dans la section précédente sont construites à partir de méthodes déjà existantes. Le principe est d'essayer de construire des algorithmes permettant de calibrer (ou d'ajuster) ces dernières aux données. Cependant, une partie des inconvénients de ces procédures est conservée. On peut par exemple penser aux phénomènes de saturation.

Une autre approche consiste donc à construire directement des méthodes adaptatives sans se baser sur des méthodes déjà existantes. La plupart de ces méthodes sont bien sûr non-linéaires puisqu'elles s'ajustent aux observations, et s'appuient sur le principe du **seuillage**. L'idée est de ne garder (et éventuellement de pondérer) que les observations ayant une norme suffisamment grande par rapport à un seuil déterminé. On s'assure ainsi de ne conserver que les données potentiellement significatives et les moins bruitées.

Un des estimateurs de ce type le plus connu est l'estimateur de James-Stein (cf Stein [64]). Ce dernier est développé dans le cas paramétrique. Supposons que l'on observe le vecteur gaussien:

$$Y \sim \mathcal{N}_d(\theta, \epsilon I_d), \theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)^t, d \in \mathbb{N}^*,$$

où  $I_d$  est la matrice identité de dimension  $d$  et  $\epsilon > 0$  est un niveau de bruit. L'estimateur du maximum de vraisemblance dans cette situation est le vecteur  $Y$  lui-même. Il est cependant possible d'améliorer les performances de ce dernier pour  $d \geq 3$  en utilisant:

$$\hat{\theta}_{JS} = \left(1 - \frac{\epsilon^2(d-2)}{\|Y\|^2}\right)_+ Y.$$

C'est l'estimateur de James-Stein. Il est en particulier possible de montrer que:

$$\mathbb{E}_\theta \|\hat{\theta}_{JS} - \theta\|^2 = \mathbb{E}_\theta \|Y - \theta\|^2 - \epsilon^4(d-2)^2 \mathbb{E}_\theta \left[ \frac{1}{\|Y\|^2} \right].$$

Pour  $d \geq 3$ , l'estimateur de James-Stein est donc meilleur que le maximum de vraisemblance. Plus ou moins d'importance va être accordée aux données  $Y$  en fonction de leur variance. En effet, si la norme et la variance de  $Y$  sont du même ordre, il est inutile d'espérer pouvoir estimer correctement  $\theta$  d'après  $Y$ . Dans ce cas, l'estimateur de James-Stein est proche de 0. Dans la situation contraire, le bruit jouera un faible rôle dans le signal et  $\hat{\theta}_{JS}$  sera proche du maximum de vraisemblance.

L'utilisation de l'estimateur de Stein est restreinte à l'estimation paramétrique. Il est cependant possible de généraliser son utilisation aux problèmes inverses statistiques. Des inégalités oracles ont été obtenues par Cavalier and Tsybakov [21] dans le cadre SVD. L'idée est de découper l'ensemble des entiers  $\mathbb{N}$  en blocs et d'appliquer ensuite l'estimateur de James-Stein sur chacun d'entre eux. Plus formellement, soient  $(T_j)_{j=1\dots J}$  une famille de blocs et  $N$  un entier. On définit alors:

$$\tilde{\lambda}_k = \begin{cases} \left(1 - \frac{\tilde{\sigma}_j^2(1+\varphi_j)}{\|\tilde{y}\|_{(j)}^2}\right)_+ & , \quad k \in I_j, j = 1 \dots J, \\ 0 & , \quad k > n = N, \end{cases}$$

pour  $\tilde{\sigma}_j^2 = \epsilon^2 \sum_{k \in I_j} b_k^{-2}$  et  $\|\tilde{y}\|_{(j)}^2 = \sum_{k \in I_j} \tilde{y}_k^2$ . Le terme  $\varphi_j$  est une pénalité nécessaire pour pouvoir obtenir une inégalité oracle précise. Il est intéressant de remarquer que cet estimateur est en fait obtenu à partir de la méthode d'estimation du risque sans biais pénalisée, appliquée à l'ensemble des filtres constants par blocs. Cavalier and Tsybakov [21] obtiennent une inégalité oracle exacte sous certaines conditions concernant la suite de valeurs propres et le choix de la famille de blocs. Nous verrons dans le Chapitre 2 qu'il est possible de généraliser cette méthode à des représentations matricielles.

Le principe de seuillage est utilisé pour d'autres types d'approches. Il est notamment très populaire pour des estimateurs utilisant des bases d'ondelettes (ou encore des supports de type *needlet*, *curvelets*, etc...). Considérons par exemple le cas de la WVD. Rappelons qu'avec un telle représentation, chaque fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  peut être exprimée sous la forme:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}^2} \kappa_j^{-1} \langle Af, u_{jk} \rangle \psi_{jk}.$$

La suite  $(\langle Af, u_{jk} \rangle)_{jk}$  inconnue peut être estimée par  $(\langle Y, u_{jk} \rangle)_{jk}$ . Il est cependant nécessaire de filtrer cette dernière afin de contrôler l'erreur induite. Donoho [24] propose alors d'estimer la fonction  $f$  par:

$$(1.4.12) \quad \hat{f} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}^2} \delta_{t_j}(\kappa_j^{-1} \langle Y, u_{jk} \rangle) \psi_{jk}, \text{ pour } \delta_{t_j}(x) = \text{sgn}(x)(|x| - t)_+,$$

où  $t_j$  est un paramètre à choisir, dépendant uniquement de  $\epsilon$  et du niveau de résolution  $j$ . Cette méthode ne conserve donc que les observations  $\kappa_j^{-1} \langle Y, u_{jk} \rangle$  plus grandes que  $t_j$ . Le choix du paramètre  $t_j$  est de moindre importance que pour une méthode de régularisation classique (Tikhonov, Landweber, etc) mais doit être fait prudemment. Donoho [24] propose un choix adaptatif pour ce dernier basé sur la méthode URE. Une autre approche souvent utilisée dans la littérature ondelette utilise un *seuillage dur*. On considère dans ce cas des estimateurs du type:

$$(1.4.13) \quad \hat{f} = \sum_{|j| \leq J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \kappa_j^{-1} \langle Y, u_{jk} \rangle \mathbf{1}_{\{|\kappa_j^{-1} \langle Y, u_{jk} \rangle| \geq s_j\}} \psi_{jk}.$$

Les deux paramètres  $J$  et  $(s_j)_{j=1\dots J}$  dépendent de la suite  $(\kappa_j)_{j \in \mathbb{N}}$  et du niveau de bruit  $\epsilon$ . Ils peuvent être choisis explicitement.

Le lien entre les estimateurs de type seuillage et les inégalités oracles est très étroit, et ce pour une large gamme de modèles. Pour plus de détails, nous citerons entre autres les travaux de Donoho and Johnstone [27], Johnstone [43], Johnstone and Silverman [45] ou encore Candès [10] pour une vue d'ensemble.

## 1.5 Contenu de la Thèse

### 1.5.1 Régularisation et opérateur bruité

La totalité des méthodes et des représentations présentées dans ce premier chapitre nécessite une connaissance complète de l'opérateur  $A$ . Il est raisonnable d'imaginer que ce dernier puisse être en partie, voire totalement inconnu. Développer des approches permettant de prendre en compte cet aspect autoriserait, par exemple, la régularisation d'un problème de convolution même avec une connaissance imprécise du noyau. Il est tout naturel de s'assurer dans un premier temps que les méthodes couramment utilisées peuvent continuer à fonctionner en utilisant seulement une approximation de  $A$ , et si ce n'est pas le cas, de proposer une approche alternative. Ce type de problématique peut déboucher sur une connaissance beaucoup plus précise de l'influence réelle de l'opérateur sur un problème inverse.

De nombreux auteurs se sont déjà intéressés à cette thématique. Par exemple, Cavalier and Hengartner [19] travaillent avec les observations:

$$(1.5.1) \quad \begin{cases} y_k = b_k \theta_k + \epsilon \xi_k, \\ x_k = b_k + \sigma \zeta_k, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

où  $\sigma > 0$  est un niveau de bruit et  $(\zeta_k)_k$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0,1)$  et indépendante de  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Le modèle utilisé repose sur la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur mais les valeurs propres sont supposées bruitées. Les auteurs arrivent à étendre les résultats de Cavalier et al. [16] à ce type d'observations.

Efromovich and Koltchinskii [29] abordent un modèle un peu plus général. Les auteurs utilisent un jeu de bases quelconques: l'opérateur  $A$  peut alors être représenté par une matrice  $[A]$ . Par ailleurs, chaque coefficient de cette matrice est supposé inconnu mais observable par l'intermédiaire de:

$$[X] = [A] + \sigma[\eta],$$

où  $\sigma > 0$  est un niveau de bruit et  $[\eta]$  une matrice aléatoire dont les entrées sont des variables i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0,1)$ . Une version bruitée de la matrice de représentation est donc utilisée. Un estimateur par projection adaptatif est construit. Ce dernier atteint la vitesse minimax de convergence sur une large gamme d'espaces fonctionnels.

Dans Hoffmann and Reiß [40], un modèle similaire est utilisé, mais cette fois-ci avec des bases d'ondelettes. A l'aide d'un estimateur tronqué type *seuillage*, les auteurs construisent un estimateur adaptatif atteignant la vitesse minimax de convergence sur des espaces de



Besov. A la vue de ces travaux, il apparaît clairement que la régularisation d'un problème inverse est tout à fait réalisable avec une connaissance imprécise de l'opérateur.

A travers la recherche d'inégalités oracles, nous poursuivons dans cette thèse deux objectifs: une meilleure compréhension des problèmes inverses lorsque l'opérateur est mal connu et l'extension de la méthode RHM à un domaine d'application plus large.

Dans un premier temps, nous étudions le comportement de l'estimateur de Stein par blocs pénalisé ainsi que de la méthode RHM dans le cas où l'opérateur est mal connu. Ce travail, contenu dans les Chapitres 2 et 3 permet de dégager quelques propriétés inhérentes à l'utilisation d'un opérateur bruité.

La méthode RHM présente un comportement théorique et numérique intéressant mais ne concerne cependant que l'estimation par projection. Nous nous intéressons donc dans la dernière partie à une généralisation de cette procédure à une plus large gamme d'estimateurs.

Ci-dessous, nous présentons brièvement le contenu de chaque chapitre.

### 1.5.2 Généralisation de l'estimateur de Stein par blocs pénalisé

Au vu des performances de la méthode de Stein par blocs pénalisée, il était légitime de chercher à dépasser le cadre SVD usuel. Nous utilisons dans le Chapitre 2 un modèle similaire à celui de Efromovich and Koltchinskii [29] et Hoffmann and Reiß [40]. La question est de savoir s'il est possible d'utiliser l'estimateur de Stein par blocs pénalisé à la fois pour une représentation matricielle et avec du bruit dans l'opérateur. Nous obtenons dans le Chapitre 2 une inégalité oracle plutôt générale. Par la suite, nous nous intéressons aux performances minimax de notre estimateur dans diverses situations:

- Le cadre SVD où les valeurs propres sont bruitées. Le modèle utilisé est le même que dans Cavalier and Hengartner [19].
- Le cadre matriciel sans bruit dans l'opérateur, c.à.d  $\sigma = 0$ .
- Le cadre matriciel avec du bruit dans l'opérateur.

Une particularité intéressante de cette étude concerne le choix de la pénalité dans l'estimateur de Stein par blocs. Lorsque l'on introduit du bruit dans l'opérateur, un "conflit" se produit: la pénalité doit être suffisamment grande pour pouvoir contrôler l'erreur dans l'opérateur, mais aussi assez petite pour pouvoir autoriser une qualité d'estimation "optimale". Ce compromis est particulièrement difficile à trouver lorsque la quantité  $\sigma^2 \epsilon^{-2} \|\theta\|^2$  est grande. L'importance de ce terme est confirmée et en partie expliquée dans le troisième chapitre.

Lorsque le cadre SVD avec valeurs propres bruitées est utilisé, ce phénomène a peu d'incidence sur la qualité d'estimation. En revanche, l'utilisation d'une représentation matricielle non-diagonale complique quelque peu la situation. L'estimation de la fonction  $f$  est en quelque sorte "perturbée" par le bruit dans l'opérateur. Dans ce cas, il n'est plus possible de choisir une pénalité tendant vers 0 quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . L'inégalité oracle obtenue n'est plus exacte.

Le Chapitre 2 correspond à une version légèrement différente d'un article publié dans le numéro 15 de la revue *Mathematical Methods of Statistics*.

### 1.5.3 Méthode RHM et bruit dans l'opérateur

La méthode RHM (minimisation d'une enveloppe du risque) initiée par Cavalier and Golubev [17] améliore significativement les performances de la procédure d'estimation du risque sans biais. La pénalité proposée peut être calculée explicitement mais requiert la connaissance préalable des valeurs propres de l'opérateur. Comme indiqué précédemment, il est tout à fait raisonnable d'imaginer que ce dernier puisse être mal connu. Dans ce cas, la pénalité proposée par Cavalier and Golubev [17] peut-elle être modifiée sans altérer les performances de la méthode RHM?

Nous répondons par l'affirmative à cette question dans le Chapitre 3. Le modèle utilisé est le même que dans Cavalier and Hengartner [19]. La principale difficulté vient de l'estimation de la suite  $(b_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ . Cette fois-ci, la pénalité est aléatoire et doit donc être étudiée avec attention. Il est en effet fondamental de s'assurer que les processus impliqués dans cette méthode sont correctement pris en compte. Cette étape repose essentiellement sur le fait que  $x_k^{-1}$  et  $b_k^{-1}$  ont un comportement similaire pour  $k \leq M$  où

$$M = \inf \left\{ k : |x_k| \leq \sigma^2 \log^2 \frac{1}{\sigma} \right\}.$$

Ce seuil, proposé par Cavalier and Hengartner [19], est asymptotiquement suffisamment grand pour ne pas venir perturber l'estimation de la fonction  $f$ . Estimer  $(b_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$  est en quelque sorte plus facile que  $\theta = (\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Une inégalité oracle, similaire à celle de Cavalier and Golubev [17] à quelques termes résiduels près, est obtenue pour l'estimateur construit. Les performances de ce dernier sont globalement proche du cas  $\sigma = 0$ . Ceci est en partie confirmé par des simulations réalisées sous Matlab.

Quelques limitations numériques apparaissent cependant. En premier lieu, la qualité d'estimation décroît significativement lorsque la norme  $\|\theta\|$  de la fonction étudiée augmente. Ceci s'explique par l'apparition dans les calculs d'un terme résiduel dépendant de la constante  $\sigma^2 \epsilon^{-2} \|\theta\|^2$ . La quantité  $x_k^{-1} y_k$  est utilisée pour l'estimation de chaque coefficient  $\theta_k$ . A l'aide de calculs élémentaires, il est possible de montrer que, pour tout  $k \leq M$ ,  $x_k^{-1} y_k$  se comporte comme:

$$\theta_k + \epsilon b_k^{-1} \xi_k + \sigma \theta_k b_k^{-1} \eta_k \neq b_k^{-1} y_k.$$

Si  $\sigma^2 \epsilon^{-2} \|\theta\|^2$  est plutôt petit, utiliser des valeurs propres bruitées aura peu d'incidence sur la qualité d'estimation. Au contraire, la perturbation générée jouera un plus grand rôle pour de "grandes" valeurs de  $\sigma^2 \epsilon^{-2} \|\theta\|^2$ .

Par ailleurs, le seuil  $M$  utilisé convient asymptotiquement mais s'avère parfois trop petit pour de grandes valeurs de  $\sigma$ . Ces constatations sont valables pour les travaux présentés dans le Chapitre 2. Le Chapitre 3 peut donc également être vu comme un complément numérique de ce dernier.

Cette partie de la thèse correspond à une version légèrement modifiée d'un article soumis à la revue *Journal of Statistical Planning and Inference*.

### 1.5.4 Généralisation de la méthode RHM

Lors de l'étude de la méthode de l'enveloppe du risque pour des estimateurs par projection avec un opérateur bruité, il est clairement apparu que cette procédure présentait de nombreux avantages: elle peut être construite de manière explicite et produit une qualité d'estimation supérieure à la méthode d'estimation du risque sans biais. Cependant, l'estimation par projection est parfois trop "grossière". Il existe en effet des méthodes bien plus fines pour l'estimation du signal  $f$  comme les estimateurs de Tikhonov ou la procédure itérative de Landweber. Ces dernières permettent d'estimer la fonction inconnue  $f$  avec une précision accrue. Dans le Chapitre 4, nous nous intéressons donc à la généralisation de la méthode RHM à une large gamme d'estimateurs. La mise en place de cette procédure dans cette situation est toujours fondée sur la nécessité de pouvoir contrôler le processus:

$$\eta(t) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1), \quad t \geq 0,$$

où  $(\lambda_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  est un filtre. Lorsque l'on considère des estimateurs par projection:  $\lambda_k(t) = \mathbf{1}_{\{k \leq t\}}$  pour  $t \in \mathbb{N}$ . Le processus  $\eta(t)$ ,  $t \geq 0$  correspond alors à un processus de Wiener. De nombreux résultats permettant de contrôler de manière très précise les performances de la méthode RHM sont donc disponibles. Dans la mesure où nous cherchons à généraliser cette procédure à une famille d'estimateurs aussi large que possible, nous perdons cette propriété. Nous verrons cependant qu'à l'aide d'hypothèses simples et tout-à-fait raisonnables sur les filtres utilisés, il est possible d'identifier le processus  $\eta(t)$ ,  $t \geq 0$  à un processus ordonné.

De nombreux résultats généraux concernant ce type de processus ont été établis dans Cao and Golubev [13]. Ces derniers considèrent le problème de régression à l'aide de splines et obtiennent des inégalités oracles en s'appuyant notamment sur la théorie des processus ordonnés. Nous verrons que ces propriétés peuvent être en partie utilisées pour élargir le domaine d'application de la méthode RHM. L'estimateur construit dans ce chapitre présente des propriétés analogues, bien qu'un peu moins précises, à celui proposé par Cavalier and Golubev [17].

Le Chapitre 4 contient donc une étude théorique et numérique (réalisée sous Matlab) de cette méthode. Une section est également consacrée à la théorie des processus ordonnés. Cette partie de la thèse fera prochainement l'objet d'une soumission à une revue.

### 1.5.5 Perspectives et annexes

Nous concluons cette thèse en présentant quelques perspectives de recherche possibles. Les différentes pistes proposées reprennent essentiellement les thèmes abordés jusqu'ici: recherche d'inégalités oracles, régularisation avec des opérateurs bruités ou encore exploitation du concept d'enveloppe.

L'annexe est quand à elle divisée en deux parties. Dans la partie A, nous montrons que l'estimateur de Stein par blocs pénalisé peut-être utilisé conjointement à la WVD. En particulier, l'estimateur construit atteint la vitesse minimax de convergence (à un terme logarithmique près) sur des espaces de Besov, ce qui le place au même niveau de performances que les méthodes non-linéaires couramment utilisées avec cette représentation.

La partie B présente une courte étude de l'opérateur d'intégration fractionnaire. Ce dernier est un exemple potentiel d'opérateur satisfaisant les hypothèses du Chapitre 2. Il est en particulier démontré que la matrice de représentation de l'opérateur inverse, associé à un certain choix de base, présente un caractère de "quasi-diagonalité".

## Chapitre 2

# Regularization of inverse problems with unknown operator

### Abstract

In this chapter, we are interested in the case where the operator is not exactly known. Using the penalized blockwise Stein's rule, we construct an estimator that produces sharp asymptotic oracle inequalities in different settings. In particular, we consider the case where the set of bases is not associated to the singular value decomposition. The representation matrix of the operator is not diagonal and the regularization problem becomes more difficult.

### 2.1 Introduction

Inverse problems consist in recovering an unknown signal  $f$  using indirect observation  $Y$ . We consider in this chapter the statistical linear inverse problem framework. Let  $H, K$  be separable Hilbert spaces and  $A : H \rightarrow K$  a compact operator. Assume that we observe:

$$(2.1.1) \quad Y = Af + \epsilon\xi,$$

where  $f \in H$  and  $\epsilon$  is the noise level. The quantity  $\xi$  is assumed to be a Gaussian white noise (see Hida [39] for more details). Notation (2.1.1) means in this case that, for any function  $g \in K$ , we can observe:

$$(2.1.2) \quad \langle Y, g \rangle = \langle Af, g \rangle + \epsilon \langle \xi, g \rangle,$$

where  $\langle \xi, g \rangle \sim \mathcal{N}(0, \|g\|^2)$ . Given  $g_1, g_2 \in K$ , the associated covariance between  $\langle \xi, g_1 \rangle$  and  $\langle \xi, g_2 \rangle$  is the scalar product  $\langle g_1, g_2 \rangle$ . Using (2.1.1), our aim is to estimate the function  $f$ .

Since  $A$  is a compact operator, the solution of (2.1.1) does not continuously depend on the data. The problem is ill-posed. Only approximations of  $f$ , obtained via regularization methods are available. A classical way of regularization is associated to the singular value decomposition (SVD) of  $A$  (see for instance Baumeister [4], Kress [51] or Engl et al. [31]). The operator  $A^*A$  is compact and selfadjoint. Call  $(b_k^2)_{k \geq 1}$  the sequence of eigenvalues and

assume that  $A^*A$  admits an orthonormal system of eigenfunctions  $(\phi_k)_{k \geq 1}$ . Then construct an image basis  $(\psi_k)_{k \geq 1}$  verifying, for all  $k \in \mathbb{N}$ :

$$(2.1.3) \quad \begin{cases} A\phi_k = b_k\psi_k, \\ A^*\psi_k = b_k\phi_k. \end{cases}$$

The system  $(\psi_k)_{k \geq 1}$  is orthonormal. For all integer  $k$ , replace  $g$  by  $\psi_k$  in (2.1.2) and set  $\theta_k = \langle f, \phi_k \rangle$ . The model (2.1.1) can be written under the sequence space form:

$$(2.1.4) \quad y_k = b_k\theta_k + \epsilon\xi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

where the  $\xi_k$  are independent standard Gaussian random variables. In the  $L_2$  sense, recovering  $f$  is equivalent to recover the sequence  $\theta = (\theta_k)_{k \geq 1}$ .

Since  $A^*A$  is compact, the sequence  $(b_k)_{k \geq 1}$  vanishes as  $k$  tends to infinity. For large values of  $k$ , the signal  $b_k\theta_k$  is thus attenuated compared to the noise  $\epsilon\xi_k$ . The difficulty of the problem in such a situation is related to the behavior of the eigenvalues. The faster the sequence  $(b_k)_{k \geq 1}$  decreases, the more difficult the problem is. In this chapter, only mildly ill-posed problems are considered: the sequence  $(b_k)_{k \geq 1}$  is polynomially decreasing. If the sequence  $(b_k)_{k \geq 1}$  is exponentially decreasing, the problem is said to be severely ill-posed. This particular case will not be studied here.

In this framework, very interesting results were obtained in the last two decades. We mention for instance Ermakov [32], Johnstone and Silverman [45], Fan [33], Mair and Ruymgaart [53], Efromovich [28], Nemirovski [60], Golubev and Khasminskii [35], Tsybakov [66] or Cavalier et al. [16].

In all the papers mentioned above, the operator  $A$  is assumed to be exactly known. This assumption is of major importance and may not be satisfied in many situations. Consider the example of convolution operator defined on  $L^2(0,1)$  by:

$$\begin{aligned} Af &: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto Af(t) &= \int_0^1 K(x-t)f(x)dx, \end{aligned}$$

where the kernel  $K$  belongs in  $L^2(0,1)$ . The Fourier basis is associated to the singular value decomposition. In this situation, the eigenvalues correspond to the Fourier coefficients of  $K$ . If the kernel is unknown even up to a parameter, no estimator can be constructed. Nevertheless, the sequence of eigenvalues may be approximated via independent observations on the kernel  $K$ . Recently, some authors were interested by the quality of estimation in such a situation. In the model selection context, Cavalier and Hengartner [19] dealt for instance with two sets of data:

$$(2.1.5) \quad \begin{cases} y_k = b_k\theta_k + \epsilon\xi_k, \\ x_k = b_k + \sigma\eta_k, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

For all  $k \in \mathbb{N}$ , the  $\eta_k$  denote i.i.d standard Gaussian random variables independent of the  $\xi_k$  and  $\sigma > 0$  a noise level. The sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$  corresponds to observations on the eigenvalues  $(b_k)_{k \geq 1}$ . Since  $b_k \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow +\infty$ , the main difficulty is to control the error in  $(x_k)_{k \geq 1}$ . When  $k$  is large, there is mainly noise in  $x_k$ . In this case  $x_k^{-1}$  is not a good estimator for  $b_k^{-1}$ .

There exist also some restrictions to the use of the SVD. If an operator appears in two different fields, the same bases will be used without care on the object of interest. The bases  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  and  $(\psi_k)_{k \geq 1}$  are indeed optimally convenient for  $A$ : the representation matrix is diagonal. Nevertheless, the basis  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  may not be appropriate for representing  $f$ . Moreover, the SVD is not always available following the structure of  $A$  or may be difficult to compute. The wavelet-vaguelette decomposition (WVD) introduced in Donoho [24] is an interesting alternative to this problem. It combines the simplicity of the SVD framework and the representation efficiency of wavelet bases. However, except for some particular classes of operator, the vaguelettes may be difficult to obtain.

In this chapter, we study a more general approach. We would like to make different choices for the bases  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  and  $(\psi_k)_{k \geq 1}$ . In this general framework, the operator will be represented by a non-diagonal matrix. This approach has already been studied for instance in Mathé and Pereverzev [58], Mair and Ruymgaart [53] or Cohen et al. [23]. We also assume the operator to be noisy and consider the following observation:

$$X = A + \sigma\eta,$$

where  $\eta$  is a perturbation operator and  $\sigma$  a noise level. In this setting, Efromovich and Koltchinskii [29] developed an adaptive projection method.

The paper Hoffmann and Reiß [40] is closely related. Using a Galerkin projection approach, they constructed a threshold estimator that attains the minimax rate of convergence on Besov spaces. In particular, they were interested by the case  $\sigma > \epsilon$  and proved that the minimax rate of convergence is related to  $\max(\sigma, \epsilon)$ .

Following the principle of unbiased risk estimation, we would like to obtain sharp results in this setting. Given a family of estimators  $\Lambda$ , we want to construct an adaptive estimator that mimics the linear oracle on  $\Lambda$  for any  $f \in H$  i.e:

$$(2.1.6) \quad \mathbb{E}_f \|f^* - f\|^2 \leq (1 + o(1)) \inf_{\tilde{f} \in \Lambda} \mathbb{E}_f \|\tilde{f} - f\|^2, \text{ as } \epsilon \rightarrow 0.$$

Inequality (2.1.6) means that  $f^*$  is asymptotically the best one in this family.

Our aim is to understand the influence of the structure of the matrix  $A$  and the noise  $\sigma\eta$  on the results. More specifically, we would like to know which kind of assumptions may lead to results similar to (2.1.6).

This chapter is organized as follow. In Section 2.2, we construct an estimator based on the well-known unbiased risk estimation method. Section 2.3 contains the main assumptions and main results. Section 2.4 is devoted to sharp minimax inequalities. In Section 2.5, we introduce an example of operator satisfying the assumptions of Section 2.3. Sections 2.6 and 2.7 are devoted to the proofs and to technical lemmas.

## 2.2 Construction of the estimator

### 2.2.1 Linear estimation

When the SVD is chosen to solve (2.1.1), the selected representation is optimally convenient to  $A$  but not always to  $f$ . Here, we want more flexibility. Consider  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  and  $(\psi_k)_{k \geq 1}$

a set of orthonormal bases of respectively  $H$  and  $K$ , not necessarily associated to the SVD. This set has to be appropriate for  $f$  and  $A$ . The sequence  $\theta$  should belong for instance in an ellipsoid in  $L_2$  (see Section 4). In Section 3, we introduce some specific assumptions concerning the associated structure of the representation matrix. In Section 2.5, we present an example where the chosen bases may be both convenient for  $f$  and  $A$ .

From now on, the operator  $A$  is represented by an infinite matrix which will be denoted by  $A = (a_{kl})_{k,l \in \mathbb{N}}$ . We use the same notation for both the operator and the matrix but the meaning will be clear following the context.

For all  $k \in \mathbb{N}$ , replace  $g$  by  $\psi_k$  in (2.1.2) to obtain the observations:

$$(2.2.1) \quad \langle Y, \psi_k \rangle \triangleq y_k = \langle Af, \psi_k \rangle + \epsilon \langle \xi, \psi_k \rangle = \sum_{l=1}^{+\infty} a_{kl} \theta_l + \epsilon \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

The  $\xi_k$  are independent standard Gaussian random variables. In the SVD setting (2.1.4) or (2.1.5), each  $y_k$  is sufficient to estimate  $\theta_k$ . In our framework, the approach is rather different. Each  $y_k$  gives some informations on all the coefficients of the function  $f$ .

Following Cohen et al. [23] or Hoffmann and Reiß [40] we construct our estimator in two steps: an inversion and then a smoothing step.

The inversion step is based on the well-known projection scheme. Projection estimation has been intensively studied in the numerical and statistical analysis. We mention for instance Kress [51], Hackbusch [37] or Mathé and Pereverzev [58]. Since  $A$  is a compact operator, it is not continuously invertible. Therefore, we approximate the infinite matrix  $A$  by a sequence  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $n \times n$  matrices: see Böttcher [6] or Efromovich and Koltchinskii [29] for more details.

For all  $n \in \mathbb{N}$ , denote by  $Y_{(n)}$  the vector  ${}^t(y_1, \dots, y_n)$ . Set

$$(2.2.2) \quad A_n = \Pi_n A P_n,$$

where  $P_n$  and  $\Pi_n$  denote respectively the orthogonal projections from  $H$  on  $H_n = \text{span}(\phi_1, \dots, \phi_n)$ , the subspace of  $H$  spanned by  $\{\phi_j : j = 1 \dots n\}$ , and from  $K$  to  $K_n = \text{span}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ . The corresponding representation matrix is the upper  $n \times n$  sub-matrix of  $A$ . From now on, we assume that for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  is non-singular. The matrix  $A_n^{-1}$  always exists. Define:

$$(2.2.3) \quad \hat{\theta}_n = A_n^{-1} Y_{(n)}.$$

This is the classical linear projection estimator. There exist simple choices for  $n$  that lead to good minimax efficiency. However, these choices are often related to some a priori information on  $f$  as regularity or  $l^2$ -norms. Adaptive choice was proposed for instance by Efromovich and Koltchinskii [29].

Since our aim is to obtain sharp results, we complete the previous step by smoothing  $\hat{\theta}_n$ . Let  $\lambda = (\lambda_k)_{k \geq 1}$  be a filter, i.e. a real sequence taking its values between 0 and 1. Define by  $F_\lambda$  the matrix with entries  $f_{jk} = 0$  if  $j \neq k$  and  $f_{jj} = \lambda_j$ , for  $1 \leq j, k \leq n$ . The corresponding linear estimator will be defined by:

$$(2.2.4) \quad \hat{\theta}_{\lambda, n} = F_\lambda A_n^{-1} Y_{(n)} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle A_n^{-1} Y_{(n)}, \phi_k \rangle \phi_k.$$



This approach is close to the one of Cohen et al. [23] or Hoffmann and Reiß [40].

Now, the operator is supposed to be noisy. Consider the following observation matrix:

$$X = A + \sigma\eta,$$

where  $\eta$  is a random matrix with entries  $(\eta_{kl})_{k,l \in \mathbb{N}}$ . The  $\eta_{kl}$  are supposed to be i.i.d. standard Gaussian random variables independent of the  $\xi_k$  and  $\sigma > 0$  a noise level. The case  $A$  and  $\eta$  diagonal exactly corresponds to the setting of Cavalier and Hengartner [19]. For all  $n \in \mathbb{N}$ , set

$$(2.2.5) \quad X_n = \Pi_n X P_n.$$

Here, we naturally use  $X_n^{-1}$  instead of  $A_n^{-1}$ . In this situation, the choice of  $n$  is also related to the control of the noise in  $X_n$ . Indeed,  $A$  is compact and not continuously invertible. In this case,  $X_n^{-1}$  may not be a good estimator for  $A_n^{-1}$  for large values of  $n$ .

Given an operator (matrix)  $T$ , let  $\|T\|$  denotes its operator norm. We consider the following stopping rule:

$$(2.2.6) \quad M = \min \left\{ l \leq N_\sigma : \|X_l^{-1}\|^2 \geq \frac{1}{\sigma^2 l^2 \times \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma}} \right\} - 1,$$

where  $\tau > 0$ . The quantity  $N_\sigma$  ensures that  $M$  is not too large. Typically, choose  $N_\sigma = \sigma^{-2}$ . Define also:

$$(2.2.7) \quad M_0 = \min \left\{ l : \|A_l^{-1}\|^2 \geq \frac{1}{\sigma^2 l^2 \times \log^{1+2\tau} \frac{1}{\sigma}} \right\} - 1,$$

and

$$(2.2.8) \quad M_1 = \min \left\{ l : \|A_l^{-1}\|^2 \geq \frac{1}{\sigma^2 l^2 \times \log^{1+\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\sigma}} \right\}.$$

The bandwidth  $M$  is stochastic but Lemma 2.6.1 provides that,

$$M_0 < M < M_1,$$

with a large probability. In order to control the noise in  $X_n$ , we choose  $n \leq M$ . If  $\sigma = 0$ , we formally set  $M = +\infty$ .

In this chapter, we consider  $\sigma$  as a  $o(\epsilon)$  or  $O(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ . The noise in the operator is smaller or of the same order than in the observations. Interesting results were obtained by Hoffmann and Reiß [40] in the case where  $\sigma > \epsilon$ . In particular, they proved that the rate of convergence is related to  $\max(\epsilon, \sigma)$ . Our work could certainly be extended to this situation, but the proofs may be rather technical. For the sake of convenience, we assume throughout the chapter that  $\sigma \leq c\epsilon$  for some  $c > 0$ .

### 2.2.2 Adaptive estimation

Let  $\lambda$  be a filter,  $n \in \mathbb{N}$  and  $\hat{\theta}_{\lambda,n}$  the corresponding linear estimator defined in (2.2.4). The associated quadratic risk is given by:

$$(2.2.9) \quad \begin{aligned} R_\epsilon^n(\lambda, \theta) &= \mathbb{E}_\theta \|F\lambda A_n^{-1}Y_{(n)} - f\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ (\lambda_k \langle A_n^{-1}\Pi_n A f, \phi_k \rangle - \theta_k)^2 + \epsilon^2 \lambda_k^2 \sum_{l=1}^n \langle A_n^{-1}\psi_l, \phi_k \rangle^2 \right] + \sum_{k>n} \theta_k^2. \end{aligned}$$

Use the following decomposition:

$$(2.2.10) \quad A_n^{-1}\Pi_n A = A_n^{-1}\Pi_n A P_n + A_n^{-1}\Pi_n A P_n^\perp = P_n + G_n,$$

where  $G_n = A_n^{-1}\Pi_n A P_n^\perp$  and  $P_n^\perp$  denotes the orthogonal complement projection of  $P_n$ . Following Efromovich and Koltchinskii [29], call  $G_n$  the projection error operator. If the set of bases corresponds to the SVD one,  $\Pi_n A P_n^\perp$  is equal to 0. The representation matrix  $A$  is indeed diagonal. The operator  $G_n$  vanishes and we obtain the classical quadratic risk of a linear estimator.

We want to select a pair  $(\lambda, n)$  in an adaptive way. A sufficiently large  $n$  will not have a great influence on the quality of estimation since the preliminary estimator  $\hat{\theta}_n$  defined in (2.2.3) will be smoothed (see Section 2.4 for more details). The quantity  $n$  will be fixed later, in Section 2.3. The choice of  $\lambda$  is however a critical step.

Our goal is to construct a filter which will be the best one among a given family  $\Lambda$ , i.e. which will have the smallest risk. If  $\theta$  is known, the best filter for a fixed  $n$  is:

$$(2.2.11) \quad \lambda_0 = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \Lambda} R_\epsilon^n(\lambda, \theta),$$

It is called the oracle filter corresponding to the family  $\Lambda$ . In order to approximate the optimal filter, we minimize an estimation of the quadratic risk. This well-known idea was developed in Stein [64]. It was also intensively studied by Cavalier et al. [16] in the model selection framework. This subsection is devoted to the construction of an estimator of  $R_\epsilon^n(\lambda, \theta)$ .

In order to simplify the notations, call  $(b_{kl})_{k,l \in \mathbb{N}}$  the entries of the matrix  $A_n^{-1}$ . This sequence depend on  $n$  but we do not take this into account. First remark that:

$$(2.2.12) \quad \mathbb{E}_\theta \left[ \langle A_n^{-1}Y_{(n)}, \phi_k \rangle^2 - \epsilon^2 \sum_{l=1}^n b_{kl}^2 \right] = \langle (P_n + G_n)f, \phi_k \rangle^2.$$

Using (2.2.12), we propose the following estimator for  $R_\epsilon^n(\lambda, \theta)$ :

$$U(\lambda, Y) = \sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^2 \langle A_n^{-1}Y_{(n)}, \phi_k \rangle^2 - \epsilon^2 \sum_{l=1}^n b_{kl}^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sum_{l=1}^n b_{kl}^2.$$

Remark that this estimator is biased since for all integer  $k$ ,  $\theta_k$  is approximated by  $\langle (P_n + G_n)f, \phi_k \rangle$ . These quantities can indeed be estimated by  $\langle A_n^{-1}Y_{(n)}, \phi_k \rangle$ . The bias term is

of order  $\|G_n f\|^2$ . It can easily be controlled via standard assumption (see Section 2.4). See also Kress [51] or Efromovich and Koltchinskii [29] for a complete discussion on the operator  $G_n$ .

Now, the operator  $A$  is supposed to be unknown. Thus estimate  $A_n^{-1}$  by  $X_n^{-1}$  (defined in 2.2.5). It produces the following estimator of the risk:

$$(2.2.13) \quad \begin{aligned} U(\lambda, X, Y) &= \sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^2 (\langle X_n^{-1} Y_{(n)}, \phi_k \rangle)^2 - \epsilon^2 \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 \\ &+ \epsilon^2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \sum_{l=1}^n x_{kl}^2, \end{aligned}$$

where the  $x_{kl} = x_{kl}^n$  are the entries of the inverse matrix  $X_n^{-1}$ . Since we use squared estimators, some  $\sigma^2$ -correction would be expected. However, introducing such an additional term only increases the difficulty of the proofs. Theoretical results are not improved.

In order to simplify the notations, set for all  $k$  in  $\{1, \dots, n\}$ :

$$(2.2.14) \quad \tilde{y}_k = \langle X_n^{-1} Y_{(n)}, \phi_k \rangle = \langle X_n^{-1} A_n (P_n + G_n) f, \phi_k \rangle + \epsilon \sum_{l=1}^n x_{kl} \xi_l.$$

The random variables  $\tilde{y}_k$ ,  $k = 1 \dots n$  are correlated if the matrix  $X_n^{-1}$  is not diagonal. This is different from the singular value decomposition framework (2.1.5). The degree of correlation is essentially related to the structure of the matrix  $A_n^{-1}$ .

### 2.2.3 Blockwise Stein's rule estimator

Our aim is to obtain an oracle inequality similar to (2.1.6) on the class of the monotone filters:

$$\Lambda_{mon} = \{\lambda \in \ell_2 : 1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq \dots \geq 0\}.$$

By analogy with Cavalier and Tsybakov [21], we will proceed step by step. Define the set of the blockwise constant filters by:

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= \{\lambda \in \ell^2 : 0 \leq \lambda_k \leq 1, \lambda_k = \lambda_{K_j}, k \in [K_j, K_{j+1} - 1], \\ & j = 0 \dots J - 1 \text{ and } \lambda_k = 0 \text{ for } k > N\}, \end{aligned}$$

where  $J, N, (K_j)_{j=0 \dots J-1}$  are integers such that  $K_0 = 1$  and  $K_J = N + 1$ . For all  $j \in \{1 \dots J\}$ , set  $I_j = \{k \in [K_{j-1}, K_j - 1]\}$  and  $T_j = K_j - K_{j-1}$  the length of the block  $I_j$ . The set  $\Lambda^*$  is entirely determined by  $(T_j)_{j=1 \dots J}$  and  $N$ . We propose in the next section different possible choices of blocks.

Set  $n = N \wedge M \stackrel{\Delta}{=} \inf(N, M)$  in  $U(\lambda, X, Y)$  (where  $M$  is defined in (2.2.6)). First minimize this functional on  $\Lambda^*$ . The filter  $\tilde{\lambda} = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \Lambda^*} U(\lambda, X, Y)$  is given by

$$\tilde{\lambda}_k = \begin{cases} \left(1 - \frac{\tilde{\sigma}_j^2}{\|\tilde{y}\|_{(j)}^2}\right)_+, & k \in I_j, j = 1 \dots J, \\ 0, & k > n = N \wedge M, \end{cases}$$

where  $\tilde{\sigma}_j^2 = \epsilon^2 \sum_{k \in I_j} \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 \mathbf{1}_{\{k \leq n\}}$  and  $\|\tilde{y}\|_{(j)}^2 = \sum_{k \in I_j} \tilde{y}_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq n\}}$ . This filter has the following rule:

1. If  $\tilde{\sigma}_j^2$  is of order  $\|\tilde{y}\|_{(j)}^2$ , the quality of estimation may not be very good. In this case, the filter  $\tilde{\lambda}$  is close to 0 on the block  $I_j$ .
2. Now, if  $\tilde{\sigma}_j^2$  is negligible compared to  $\|\tilde{y}\|_{(j)}^2$ , the estimation has a chance to be good. In this case,  $\tilde{\lambda}$  is close to 1.

Only the blocks where estimation has a chance to be good are taken into account. To increase this effect, introduce a penalty in  $\tilde{\lambda}$ . It produces the penalized blockwise Stein's rule filter:

$$(2.2.15) \quad \lambda_k^* = \begin{cases} \left(1 - \frac{\tilde{\sigma}_j^2(1+\varphi_j)}{\|\tilde{y}\|_{(j)}^2}\right)_+, & k \in I_j, j = 1 \dots J, \\ 0, & k > N \wedge M, \end{cases}$$

where  $\varphi_j > 0$  for all  $j = 1 \dots J$ . The associated estimator is:

$$(2.2.16) \quad \theta^* = F_{\lambda^*} X_n^{-1} Y_{(n)},$$

with  $n = N \wedge M$ . If  $\sigma = 0$ ,  $M = +\infty$  and  $n = N$ . Under some assumptions of regularity on  $f$  and  $A$ ,  $\theta^*$  is asymptotically the best one among  $\Lambda_{mon}$ , see Section 2.4. We exactly obtain the estimator constructed by Cavalier and Tsybakov [21] if the matrix  $A$  is diagonal and  $\sigma = 0$ .

Remark that  $\theta^*$  has been constructed via a general formulation. The presented result in next section covers both the SVD setting with noisy eigenvalues of Cavalier and Hengartner [19] and the general framework of Efromovich and Koltchinskii [29] and Hoffmann and Reiß [40].

## 2.3 Main results

### 2.3.1 Notations and hypotheses

To obtain a first oracle inequality, some notations and hypotheses are required. Let  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{M}$  the events defined in Lemma 2.6.2 (see Section 6). For all  $j \in \{1 \dots J\}$ , define:

$$(2.3.1) \quad C_j = \left\{ \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2 < \varphi_j \frac{\tilde{\sigma}_j^2}{8} \right\} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{M}.$$

The two following hypotheses concern the structure of the representation matrix  $A_n^{-1}$  defined in (2.2.2).

**Assumption A1:** There exists  $b_*$  positive constant such that,

$$\sum_{l=1}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2 = b_* k^{2\beta} (1 + o(1)), \text{ as } k, m \rightarrow +\infty.$$

for some  $\beta \geq 0$ . In particular  $\|A_m^{-1}\| = O(m^{2\beta})$  as  $m \rightarrow +\infty$ .

**Assumption A2:** There exists a constant  $c_1 \geq 1$  independent of  $\epsilon$ , such that, for all  $j \in \{2 \dots J\}$  and for all  $m \in \{N \wedge M_0 \dots N \wedge M_1\}$ ,

$$T_j \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2 \leq c_1 \sum_{l=1}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2, \forall k \in I_j, k \leq m.$$

Assumption A1 allows a better understanding of the problem. In the special case of the SVD setting (2.1.4), this assumption is very standard and corresponds to mildly ill-posed problems (see Engl et al. [31]). The parameter  $\beta$  quantifies the degree of ill-posedness of the problem.

In the SVD setting (see (2.1.4) or (2.1.5)), Assumption A2 is directly verified. Indeed, the non-diagonal terms of the representation matrix  $A_m^{-1}$  are null. This assumption means that the matrix  $A_m^{-1}$  has to be close to a diagonal one. We want the main terms concentrated in the diagonal. Assumption A2 is in fact related to the degree of correlation of the variables  $\tilde{y}_k$  in each block  $I_j$  (see (2.2.14)). If the correlation is too large, it will be difficult to detect the signal  $\theta$ . Remark that Assumption 3.4 of Hoffmann and Reiß [40] is closely related. They indeed require some sparsity concerning the structure of the representation matrix  $A$ .

**Assumption A3:** If the matrices  $A$  and  $\eta$  are not diagonal, the penalty is chosen so that

$$\varphi_j > c_3 \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|(P_n + G_n)f\|^2, \forall j \in \{1 \dots J\}.$$

Here  $c_3$  denotes a positive constant independent of  $\epsilon$ . It can be explicitly computed (see proof of Lemma 2.6.3 in Section 2.6 for more details).

Assumption A3 enables us to control the quantity  $P(\{\lambda_{K_j-1}^* > 0\} \cap C_j)$ . On  $C_j$  the signal is negligible compared to  $\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j$ . We cannot expect a good estimation. The probability that  $\lambda_{K_j-1}^* > 0$  on  $C_j$  has to be very small. Lemma 2.6.3 in Section 2.6 provides an upper bound for this quantity. It is larger than in Cavalier and Tsybakov [21]. Indeed, it is more difficult for  $\theta^*$  to detect that the signal is too small if the operator is noisy and non-diagonal. Remark that the penalty will not be the same following the considered case: SVD or non-diagonal setting. In Section 2.4, we discuss the different possible values of the penalty considering the structure of the operator and the noise levels  $\sigma$  and  $\epsilon$ .

The construction of  $\theta^*$  should be modified in the particular case where  $\sigma \geq \epsilon$ . Indeed, it is clear that a penalty satisfying A3 in this situation may lead to a poor efficiency.

### 2.3.2 Main result

For the sake of convenience, we will present our result for a specific class of blocks. Following Nemirovski [60] or Cavalier and Tsybakov [21], we use weakly geometrically increasing blocks. Set  $\nu_\epsilon = \log 1/\epsilon$  and  $\rho_\epsilon = \log^{-1} \nu_\epsilon$ . The size of blocks is defined by

$$(2.3.2) \quad \begin{cases} T_1 = \lceil \nu_\epsilon \rceil \\ T_j = \lceil \nu_\epsilon (1 + \rho_\epsilon)^{j-1} \rceil, j > 1, \end{cases}$$

and we set  $N = \epsilon^{-2}$ . The penalty should be chosen so that  $\varphi_j \geq (\nu_\epsilon \rho_\epsilon)^{-\gamma}$ , where  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ . In Section 3.3, we present some other possible choice of blocks and related penalties.

The following proposition is the main result of this chapter. We will use it in Section 2.7.2 to obtain sharp minimax results subject to some regularity assumptions on  $\theta$ .

**Proposition 2.3.1** *Assume that A1-A3 hold and  $\|\theta\| \leq r$ , for some  $r > 0$ . Let  $\theta^*$  the estimator defined in (2.2.15), (2.2.16), and  $B > 0$ . For all  $j = 1 \dots J$ , there exists  $g_j = g_j(\|\theta\|, \varphi_j, B)$  such that*

$$(2.3.3) \quad \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \leq \max_{j=1 \dots J} (1 + g_j) \times \inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} R_\epsilon^N(\lambda, \theta) + c \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma} \right) \epsilon^2 \nu_\epsilon^{2\beta+1} \\ + c \frac{1 + B^{-1}}{1 - B} \mathbb{E}_\theta \|G_n f\|^2 + \Gamma(\theta) + c\Omega,$$

where  $G_n$  is defined in (2.2.10),  $c > 0$ ,  $\Omega = M_1 e^{-\log^{1+\tau} 1/\sigma}$  and

$$(2.3.4) \quad \Gamma(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left| \sum_{k=1}^n \epsilon^2 (\lambda_k^0)^2 \sum_{l=1}^n (\langle A_n^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2 - \langle A_M^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2) + \sum_{k=M_0}^{\infty} \theta_k^2 \right|$$

with  $\lambda^0 = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \Lambda_{mon}} R_\epsilon^N(\lambda, \theta)$ .

A proof of this proposition is given in Section 2.7. The functionals  $g_j$  are defined in (2.7.15) and (2.7.19). We will show that for some particular cases,  $g_j \rightarrow 0$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ , uniformly in  $j = 1 \dots J$ . Moreover, many residual terms appear in Inequality (2.3.3). The goal is to show that they are negligible compared to  $R_\epsilon^N(\lambda^0, \theta)$ . This will be done later, in Section 2.4, by considering specific classes of function.

The term  $\Gamma(\theta)$  corresponds to the rest of the risk  $R_\epsilon^N(\lambda^0, \theta)$  truncated at the order  $M$ . If  $M$  is large enough,  $\Gamma(\theta)$  will be negligible compared to  $R_\epsilon^N(\lambda^0, \theta)$ . The two terms  $\Omega$  and  $\Gamma(\theta)$  appear with the noise in the operator. These quantities were introduced for the first time in Cavalier and Hengartner [19].

Remark that oracle inequality (2.3.3) is obtained for a fixed  $N$ . Since  $N$  is large enough, it has not a great influence on the quality of estimation. This is proved in Section 2.4 using Assumption A1.

### 2.3.3 Choice of blocks and penalties

In Cavalier and Tsybakov [22], some other available choices of blocks are presented in the SVD setting with  $\beta = 0$ . Such blocks can be used in this framework. We only recall here the available choices.

- **Constant size blocks depending on  $\epsilon$ .** The size is defined by

$$T_j = \lceil C_* S \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \log^{1+\tau} \frac{1}{\epsilon} \rceil,$$

where  $S(\frac{1}{\epsilon}) = \log \log \frac{1}{\epsilon}$ ,  $C_* > 0$  and the penalty verifies  $\varphi_j \geq S^{-1/2}(\frac{1}{\epsilon})$ .

- **Increasing blocks that do not depend on  $\epsilon$ .** The size is defined by one of the three following expressions

$$\begin{aligned} T_j &= \lceil C_1 j^\rho \rceil, \\ T_j &= \lceil C_1 \exp(j^\rho) \rceil, \\ T_j &= \lceil C_1 j \mu(j) \log j \rceil, \end{aligned}$$

and the penalty should be chosen so that  $\varphi_j \geq \mu(j)^{-1/2}$  where  $\mu(j) = \log \log(j+20)$ .

In these particular cases, Assumption A2 should be verified only for  $j \in \{n_\epsilon \dots J\}$  where  $n_\epsilon \rightarrow +\infty$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ . The term  $n_\epsilon$  is the same as in Cavalier and Tsybakov [22].

## 2.4 Minimax adaptation

In this section, we apply the results of Section 2.3 to show that our estimator has good minimax properties. Assume that the sequence  $\theta$  belongs in an ellipsoid:

$$\Theta = \Theta(v, Q) = \left\{ \theta : \sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2 \theta_k^2 \leq Q \right\},$$

where  $v = (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  and  $Q > 0$ . The minimax risk on  $\Theta$  is

$$r_\epsilon(\Theta) = \inf_{\tilde{\theta}} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_\theta \|\tilde{\theta} - \theta\|^2.$$

The infimum is taken over all the estimators of  $\theta$  based on the observations (2.1.1). In the sequel, we write  $v \simeq (k^\alpha)_{k \geq 1}$  for some  $\alpha \in \mathbb{N}$  if we can find  $d_0$  and  $d_1$  positive constants verifying:  $d_0 k^\alpha \leq v_k \leq d_1 k^\alpha$  for all  $k \in \mathbb{N}$ .

Proposition 2.3.1 is very general. There is weak assumptions on the operator  $A$  and on the noise  $\sigma$ . In order to obtain precise minimax results, additional restrictions are needed. We will consider in this section three different settings:

- The SVD case with noisy eigenvalues,
- The non-diagonal case where  $A$  is completely known ( $\sigma = 0$ ),
- The non-diagonal case with noise in the operator.

We only present the results for the weakly geometrically increasing blocks. The proofs in the other cases introduced in Section 2.3.3 exactly follow the same lines. We leave them to the interested reader.

### 2.4.1 The SVD case

Assume that the set of bases  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  and  $(\psi_k)_{k \geq 1}$  exactly corresponds to the SVD one. The matrix  $\eta$  is supposed to be diagonal. For all  $k \in \mathbb{N}$ , we observe:

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} y_k = b_k \theta_k + \epsilon \xi_k, \\ x_k = b_k + \sigma \eta_k. \end{cases}$$

This is exactly the setting of Cavalier and Hengartner [19].

**Theorem 2.4.1** *Let  $\Theta = \Theta(v, Q)$  be an ellipsoid with monotone non-decreasing  $v \simeq (k^\alpha)_{k \geq 1}$ ,  $\alpha > 1/2$  and  $Q \in [0, Q_0]$  for some  $Q_0 > 0$ . Assume that Assumption A1 holds. Choose  $\varphi_j = (\nu_\epsilon \rho_\epsilon)^{-\gamma}$  for  $0 < \gamma < 1/2$ . Then, the estimator  $\theta^*$  defined by (2.2.15), (2.2.16) verifies:*

$$(2.4.2) \quad \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 = (1 + o(1))r_\epsilon(\Theta),$$

as  $\epsilon \rightarrow 0$ .

The parameter  $\alpha$  represents the smoothness of the functions contained in  $\Theta$ . Our estimator is adaptive: it does not depend on this parameter.

Theorem 4.2 of Cavalier and Hengartner [19] is slightly different from Inequality (2.4.2) since the framework was the model selection one. They only consider finite families of estimator.

The same result as (2.4.2) was obtained in Cavalier and Tsybakov [21] with  $\sigma = 0$ . From an asymptotic point of view, the only difference appears in the quantity  $o(1)$ . It is significantly smaller if  $\sigma = 0$  (see proof of Proposition 2.3.1 in Section 2.7). Regularization is easier without noise in the operator.

PROOF. In this setting, the operator  $G_n$  vanishes. The representation matrix  $A$  is diagonal, Assumption A2 holds. Assumption A3 does not concern the SVD case. By a direct application of Proposition 1:

$$(2.4.3) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 &\leq \max_{j=1 \dots J} (1 + g_j) \times \inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} R_\epsilon^N(\lambda, \theta) \\ &+ c\epsilon^2 \left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma}\right) \nu_\epsilon^{2\beta+1} + \Gamma(\theta) + \Omega, \end{aligned}$$

where  $g_j$  is defined in (2.7.15) and (2.7.19) for all  $j = 1 \dots J$ . In a first time, we show that  $g_j \rightarrow 0$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ , and then that the three residual terms in (2.4.3) are negligible compared to  $r_\epsilon(\Theta)$ .

Let  $j \in \{1 \dots J\}$ . Using Cavalier and Tsybakov [21],  $\Delta_j \leq (\rho_\epsilon \nu_\epsilon)^{-1} (1 + \rho_\epsilon)^{-j}$  and:

$$\frac{(\varphi_j^2 + c\Delta_j)}{\varphi_j} \leq [(\rho_\epsilon \nu_\epsilon)^{-\gamma} + (\rho_\epsilon \nu_\epsilon)^{\gamma-1} (1 + \rho_\epsilon)^{-j}] \rightarrow 0, \text{ as } \epsilon \rightarrow 0.$$

Since  $K_j \geq \nu_\epsilon (1 + \rho_\epsilon)^j$  and  $\sigma = O(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$(2.4.4) \quad \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \frac{\|\theta\|_{(j)}}{\varphi_j} \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma} \leq cK_j^{-2\alpha} (\nu_\epsilon \rho_\epsilon)^\gamma \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma} \times \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \rightarrow 0, \text{ as } \epsilon \rightarrow 0.$$

Thus,  $\max_{j=1 \dots J} g_j \rightarrow 0$  with a good choice of  $B$ . By a direct application of Pinsker's Theorem (see Belitser and Levit [5]) and simple calculation,

$$\inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} \sup_{\theta \in \Theta} R_\epsilon^N(\lambda, \theta) = (1 + o(1)) \sup_{\theta \in \Theta} R_\epsilon(\hat{\lambda}, \theta) = (1 + o(1))r_\epsilon(\Theta),$$

where  $\hat{\lambda}$  is the Pinsker's estimator and  $R_\epsilon(\lambda, \theta)$  denotes the classical quadratic risk of a linear estimator.



We now focus on the residual terms in (2.4.3). Under our assumptions, Belitser and Levit [5] show that for all  $\epsilon > 0$ :

$$(2.4.5) \quad r_\epsilon(\Theta) = O(\epsilon^{\frac{4\alpha}{2\beta+2\alpha+1}}) \text{ as } \epsilon \rightarrow 0.$$

The term  $\Omega$  is clearly negligible compared to  $r_\epsilon(\Theta)$ . Now remark:

$$\Gamma(\theta) \leq \sum_{i=M_0}^{\infty} \epsilon^2 (\lambda_i^0)^2 b_i^{-2} + \sum_{i=M_0}^{\infty} \theta_i^2 \leq \sum_{i=M_0}^{\infty} \frac{\epsilon^2 b_i^{-2} \theta_i^2}{\epsilon^2 b_i^{-2} + \theta_i^2} + \sum_{i=M_0}^{\infty} \theta_i^2 \leq 2 \sum_{i=M_0}^{\infty} \theta_i^2.$$

Clearly,  $\Gamma(\theta)$  is a  $o(r_\epsilon)$ . Thus:

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 = (1 + o(1)) r_\epsilon(\Theta).$$

This concludes the proof. □

### 2.4.2 Non-diagonal case with $\sigma = 0$

The case  $\sigma = 0$  corresponds to the situation where  $A$  is completely known. We observe:

$$y_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \theta_l + \epsilon \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Results here are a little less precise than in Theorem 2.4.1. Indeed, a generalization of Pinsker's Theorem to this framework has not been established yet.

**Theorem 2.4.2** *Let  $\Theta = \Theta(v, Q)$  be an ellipsoid with monotone non-decreasing  $v \simeq (k^\alpha)_{k \geq 1}$ ,  $Q > 0$  and  $\alpha > 1/2$ . Assume that Assumptions A1 and A2 hold and that  $\|G_m\| \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow +\infty$ . Choose  $\varphi_j = (\nu_\epsilon \rho_\epsilon)^{-\gamma}$  for  $0 < \gamma < 1/2$ . Then, the estimator  $\theta^*$  defined by (2.2.15) and (2.2.16) verifies:*

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 = (1 + o(1)) \inf_{\lambda, m} \sup_{\theta \in \Theta} R_\epsilon^m(\lambda, \theta),$$

as  $\epsilon \rightarrow 0$ , where the infimum is taken over all the filter  $\lambda \in \Lambda_{mon}$  and the bandwidths  $m$ .

PROOF. The noise level  $\sigma$  is null. Assumption A3 is satisfied since  $\varphi_j > 0$ . A direct application of Proposition 2.3.1 provides:

$$\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \leq \max_{j=1 \dots J} (1 + g_j) \inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} R_\epsilon^N(\lambda, \theta) + c\epsilon^2 \nu_\epsilon^{2\beta+1} + c\mathbb{E}_\theta \|G_n f\|^2,$$

where

$$g_j = \frac{c(\varphi_j^2 + 4\Delta_j)}{\varphi_j} (1 + o(1)), \text{ as } \epsilon \rightarrow 0.$$

As in Theorem 2.4.1,  $g_j \rightarrow 0$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ . By Assumption A1, there exists  $t(\epsilon) \rightarrow 0$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ , independent of  $k$  and  $m$  such that:

$$\left| \sum_{l=1}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2 - b_\star^2 k^{2\beta} \right| \leq b_\star^2 k^{2\beta} \times t(\epsilon), \quad \forall k \geq \nu_\epsilon, \quad \forall m \geq \tilde{m},$$

where  $\tilde{m}$  is the information complexity of the problem (see Mathé and Pereverzev [58] for more details). Since  $\|G_m\| \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow +\infty$ , it is then easy to see that,

$$\inf_{\lambda} R_{\epsilon}^N(\lambda, \theta) \leq (1 + o(1)) \inf_{\lambda, m} R_{\epsilon}^m(\lambda, \theta) + c\epsilon^2 \nu_{\epsilon}^{2\beta+1}, \text{ as } \epsilon \rightarrow 0$$

uniformly in  $\theta \in \theta(a, Q)$ . The residual term  $\epsilon^2 \nu_{\epsilon}^{2\beta+1}$  is negligible. Indeed, minimax rate of convergence is of the same order as in the SVD case (see Efromovich and Koltchinskii [29]). In particular, the projection estimator attains the optimal rate of convergence and is linear and monotone. To conclude the proof, just remark that for all  $m$ :

$$\|G_m f\|^2 = \|G_m P_m^{\perp} f\|^2 \leq \|G_m\|^2 \|P_m^{\perp} f\|^2 \leq C^2 \sum_{k>m} \theta_k^2.$$

By simple calculation the quantity  $\mathbb{E}_{\theta} \|G_n f\|^2$  is negligible. □

Our estimator  $\theta^*$  attains the minimax rate of convergence on the ellipsoid  $\Theta$ . Moreover, it is asymptotically the best one compared to the family of estimator defined in (2.2.4).

If we only assume that the operator  $G_n$  is uniformly bounded, the estimator  $\theta^*$  only attains the minimax rate of convergence on  $\Theta(v, Q)$ . This assumption is very standard. This is a necessary condition for the convergence of the projection method (see Kress [51], Böttcher [6]). The assumption  $\|G_m\| \rightarrow 0$  is more restrictive. It guarantee that the projection error  $A_n^{-1} \Pi_n A f - f$  can be controlled by the the familiar bias  $P_n^{\perp} f$  (see (2.9) and (2.2.10)). We refer to Kress [51] or Efromovich and Koltchinskii [29] for more details.

### 2.4.3 The non-diagonal case

We finish this section with a general setting. Assume we have at our disposal the observations:

$$\begin{cases} Y = A f + \epsilon \xi, \\ X = A + \sigma \eta. \end{cases}$$

This is the setting of Efromovich and Koltchinskii [29] and Hoffmann and Reiß [40]. We obtain the following result:

**Theorem 2.4.3** *Let  $\Theta = \Theta(v, Q)$  be an ellipsoid with monotone non-decreasing  $v \simeq (k^{\alpha})_{k \geq 1}$ ,  $Q \in [0, Q_0]$  and  $\alpha > 1/2$ . Assume that Assumptions A1 and A2 hold and  $\|G_m\| \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow +\infty$ .*

(i) *Choose  $\varphi_j > 16Q_0\sigma^2/\epsilon^2$ . Then, there exists a positive constant  $c$  such that:*

$$(2.4.6) \quad \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{\theta} \|\theta^* - \theta\|^2 \leq c r_{\epsilon}(\Theta) \times \log^{1+\tau} \frac{1}{\epsilon},$$

*The estimator  $\theta^*$  attains the minimax rate of convergence up to a log term.*

(ii) *Assume  $\sigma \log^{1+\tau} 1/\sigma = o(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ . Choose  $\varphi_j = (\nu_{\epsilon} \rho_{\epsilon})^{-\gamma}$  for  $0 < \gamma < 1/2$ . Then,*

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}_{\theta} \|\theta^* - \theta\|^2 = (1 + o(1)) \inf_{\lambda, m} \sup_{\theta \in \Theta} R_{\epsilon}^m(\lambda, \theta),$$

*as  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

PROOF. Using simple algebra and Assumption A1:

$$\Gamma(\theta) \leq \mathbb{E}_\theta \sum_{k=M_0}^{+\infty} (\lambda_k^0 \epsilon^2 \sum_{l=1}^{+\infty} b_{kl}^2 + \theta_k^2) + 2b_*^2 \epsilon^2 t(\epsilon) \mathbb{E}_\theta \sum_{k=\nu_\epsilon}^{M_1} (\lambda_k^0)^2 k^{2\beta} + c\epsilon^2 \nu_\epsilon^{2\beta+1},$$

where  $\lambda^0 = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \Lambda_{\text{mon}}} R_\epsilon^N(\lambda, \theta)$ . Therefore, the term  $\Gamma(\theta)$  is negligible for  $\epsilon$  small enough.

The end of the proof follows the same lines as for Theorems 2.4.1 and 2.4.2. The only difference is contained in the expression of  $g_j$  (see (2.7.15) and (2.7.19)). Study the quantity:

$$\frac{Q_0}{\varphi_j^2} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \log^{1+\tau} 1/\sigma.$$

If  $\sigma \log^{1+\tau} 1/\sigma = o(\epsilon)$ , it vanishes with  $\varphi_j = (\nu_\epsilon \rho_\epsilon)^{-\gamma}$ . Assumption A3 is satisfied for  $\epsilon$  small enough and  $g_j \rightarrow 0$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ . The estimator  $\theta^*$  produces sharp minimax results. Otherwise, we choose  $\varphi_j > 16Q_0\sigma^2/\epsilon^2$ . Assumption A3 is satisfied but  $g_j$  does not vanish as  $\epsilon \rightarrow 0$ . Our estimator attains the minimax rate of convergence up to a log term.  $\square$

The hypothesis  $\sigma \log^{1+\tau} 1/\sigma = o(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$  means that the noise in the operator is smaller than  $\epsilon$  from an asymptotic point of view. One may think either to numerical measurements of the operator with a high quality or to independent observations with a larger number of data.

The degree of ill-posedness of the problem is supposed to be unknown. For this reason, a log term appears in the right-hand side of (2.4.6). If  $\beta$  is known, we can see in the proofs that the log term is not needed anymore. Indeed, choose  $M = M_0$ . In this case,  $M$  is not stochastic and quantities as  $\epsilon \|X_n^{-1} A_n f\|^2$  are easier to control.

To the extent that  $\beta$  is known and  $\sigma = O(\epsilon)$ , our estimator  $\theta^*$  produces the same rates of convergence that the projection estimator constructed in Efromovich and Koltchinskii [29]. Indeed, using Lepski's method, they proposed an adaptive estimator that attains the minimax rate of convergence on ellipsoid.

The framework of Hoffmann and Reiß [40] is a little bit different. They considered functions that belong to Besov spaces and constructed a threshold estimator  $\tilde{f}$  that attains the minimax rate of convergence up to a log term. In particular, it verifies:

$$\sup_{f \in V_p^s(Q)} E_f \|\tilde{f} - f\|^2 \leq c \max(\sigma, \epsilon)^{-\frac{2s}{2s+2\beta+1}},$$

where  $V_p^s(Q)$  is a Besov ball. The rate of convergence is thus related to the largest noise. They proved that this rate is optimal. This could certainly be generalized to our framework. However, some modifications in the construction of  $\theta^*$  are required in this situation. Indeed, a penalty term satisfying Assumption A3 may lead to very bad rates of convergence for  $\epsilon = o(\sigma)$  as  $\sigma \rightarrow 0$ . In this particular case, the solution would be to replace  $\epsilon$  by  $\max(\epsilon, \sigma)$  in the construction of  $\theta^*$ .

### 2.4.4 Conclusion

This chapter generalizes the results of Cavalier and Tsybakov [21]. Here, two different problems have been treated.

The first one concerns non-diagonal representation matrices. Our estimator produces sharp minimax results subject to some hypotheses on the sparsity of  $A$ . It seems to be the price to pay when using blockwise estimator in this setting (see for example Assumption 3.4 of Hoffmann and Reiß [40]). This model can be compared to direct observation with correlated noise. The structure of the matrix  $A_n^{-1}$  is related to the degree of correlation. Our results could be certainly extended to inverse problems with correlated data. In this case, Assumption A2 should be replaced by a correlation assumption.

The second problem concerns the noise in the operator. In the SVD representation, this noise has no real influence on the construction of  $\theta^*$ . Problems appear when considering non-diagonal perturbation matrices. The regularization problem is perturbed by the estimation of  $A_M^{-1}$ . In this case, the penalty should be chosen large enough in order to control the noise in the operator.

We can expect a bad quality of recovering for large values of  $\|\theta\|$ , even in the SVD case. Indeed, the quantity  $\sigma^2/\epsilon^2\|\theta\|^2$  explicitly appears in (2.3.3). This property is not specific to the penalized blockwise Stein's rule estimator: we refer for instance to the results of Efromovich and Koltchinskii [29], Cavalier and Hengartner [19] and Hoffmann and Reiß [40].

## 2.5 Example

This example is inspired by Cavalier [15] who studied the fractional integration in the non-periodic framework. We refer to Zygmund [68] for more details on the fractional integration operator.

First consider the operator  $d^{-\beta} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  defined by:

$$\begin{aligned} d^{-\beta} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow d^{-\beta} f(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(t) dt. \end{aligned}$$

This is the periodic version of the fractional integration. It can be proved that  $d^{-\beta} e^{i2\pi k \cdot}(x) = (i2\pi k)^{-\beta} e^{i2\pi k x}$  for all  $k \in \mathbb{N}$  and  $x \in \mathbb{R}$ . The Fourier basis is thus associated to the singular value decomposition with eigenvalues  $((i2\pi k)^{-\beta})_{k \in \mathbb{N}}$ .

One may imagine that the degree of ill-posedness (i.e. the parameter  $\beta$ ) is unknown. Suppose that we can send each  $\phi_k$  as an input function  $f$  (as in (2.1.1)) and observe independently the corresponding  $Y_k$ :

$$Y_k = d^{-\beta} \phi_k + \epsilon \eta,$$

where  $\eta$  is a gaussian white noise. Since for all  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\langle Y_k, \phi_k \rangle = b_k + \epsilon \eta_k$ , we exactly obtain a sequence of observations on the eigenvalues as in (2.1.5) with  $\sigma = \epsilon$ . Such an approach

can easily be extended to every convolution operator (see Cavalier and Hengartner [19] for more details).

Now consider the non-periodic version of the fractionnal integration. Let  $D^{-\beta} : L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$  defined by:

$$D^{-\beta} f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow D^{-\beta} f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(t) dt.$$

We are interested by functions that belong to some Sobolev balls:

$$f \in W(\alpha, Q) = \left\{ f : \int_0^1 (f^{(\alpha)}(t))^2 dt \leq Q \right\}.$$

Here, we look at the case where  $f$  is not 1-periodic: there are boundary effects. In this case, the Fourier basis is not suited for representing  $f$ , spline bases are preferable. In order to represent  $D^{-\beta}$ , choose the spline basis defined in Cavalier [15] as  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  and  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

The associated representation matrix  $A$  can be written as  $A = DS$  where  $D$  denotes a diagonal matrix with eigenvalues  $d_k = k^{-\beta}(1 + o(1))$  as  $k \rightarrow +\infty$  and  $S = I + V$  where  $I$  is the identity matrix. The matrix  $V$  cannot be computed explicitly. We do not obtain finite bound on the associated Hilbert-Schmidt norm. Nevertheless, we may conjecture that  $V$  represents a compact operator. Efromovich and Koltchinskii [29] proved that for a matrix associated to such a decomposition

$$\|G_m\| \rightarrow 0, \text{ as } m \rightarrow +\infty.$$

Moreover, using the properties of the spline bases, we can show in this case that, uniformly in  $k$ :

$$(2.5.1) \quad \sum_{l=1}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2 \rightarrow \sum_{l=1}^{+\infty} \langle A^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2, \text{ as } m \rightarrow +\infty.$$

and

$$(2.5.2) \quad \sum_{l=1, l \neq k}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2 \rightarrow \sum_{l=1, l \neq k}^{+\infty} \langle A^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2, \text{ as } m \rightarrow +\infty.$$

The structure of the matrices  $A_m^{-1}$  is asymptotically the same than  $A^{-1}$ . In this case, Assumptions A1 and A2 hold for  $\epsilon$  small enough since the main term of the representation matrix  $A^{-1}$  are concentrated in the diagonal (for more details, see the proof and in particular equations (34) and (35) of Cavalier [15]).

More generally, every representation matrix of the form  $A = D(I + V)$  where  $D$  is diagonal and  $V$  is compact is a good candidate for satisfying Assumption A2, provided  $A^{-1}$  possesses a quasi-diagonal structure. This corresponds to compact perturbation of the SVD representation.

## 2.6 Technical lemmas

For all  $j = 1 \dots J$ , define the quantities:

$$(2.6.1) \quad \Delta_j = \max_{m=N \wedge M_0 \dots N \wedge M_1} \frac{\max_{k \in I_j} \sum_{l=1}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2}{\sum_{k \in I_j} \sum_{l=1}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2}.$$

and for all  $h \in H$ ,

$$(2.6.2) \quad l_j(h) = \begin{cases} \|h\|_{(j)}^2 & \text{in the SVD setting (2.1.5),} \\ \|h\|^2 & \text{else.} \end{cases}$$

The following lemma provides a control for the stochastic bandwidth  $M$ .

**Lemma 2.6.1** *Let  $M$ ,  $M_0$  and  $M_1$  defined in Section 2.2 by (2.2.6), (2.2.7) and (2.2.8).*

$$P(\{M < M_0\} \cup \{M > M_1\}) = O(\Omega), \text{ as } \sigma \rightarrow 0.$$

PROOF. Remark that  $A_{M_1}^{-1} = (I + \sigma A_{M_1}^{-1} \eta_{M_1}) X_{M_1}^{-1}$ . This implies

$$\|A_{M_1}^{-1}\| \leq \|X_{M_1}^{-1}\| \|I + \sigma A_{M_1}^{-1} \eta_{M_1}\|.$$

The probability that  $M$  is greater than  $M_1$  is:

$$\begin{aligned} P(M > M_1) &\leq P(\|X_{M_1}^{-1}\|^2 \leq \frac{1}{\sigma^2 M_1^2 \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma}}), \\ &\leq P(\|I + \sigma A_{M_1}^{-1} \eta_{M_1}\| \geq \|A_{M_1}^{-1}\| \sigma M_1 \log^{\frac{1+\tau}{2}} \frac{1}{\sigma}), \\ &\leq P(\|\eta_{M_1}\| \geq M_1 \log^{\frac{1+\tau}{2}} \frac{1}{\sigma} - M_1 \log^{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{4}} \frac{1}{\sigma}) \leq ce^{-\log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Indeed, we use (2.2.6), (2.2.8) and Lemma 6.1 of Efromovich and Koltchinskii [29]. Now, remark that, using (2.2.7),

$$P(M < M_0) \leq P\left(\bigcup_{l=1}^{M_0} \{\|X_l^{-1}\|^2 \geq \frac{1}{\sigma^2 l^2 \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma}}\}\right).$$

Using (2.2.8) and Lemma 2.6.2,  $P(M > M_1) \leq ce^{-\log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma}} \Rightarrow P(\mathcal{B}^c) = O(\Omega)$  and

$$\|X_l^{-1}\| \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \leq 2\|A_l^{-1}\|, \forall l \leq M_1.$$

Thus,  $P(M < M_0) = O(\Omega)$  as  $\sigma \rightarrow 0$ . □

**Lemma 2.6.2** *Define the events:*

$$(2.6.3) \quad \mathcal{B} = \bigcap_{m=1}^M \left\{ \sigma \|A_m^{-1}\| \|\eta_m\| \leq \frac{1}{2\sqrt{m}} \right\}, \text{ and } \mathcal{M} = \{M_0 < M < M_1\}.$$

Let  $n$  the quantity defined in Section 2.3,  $h \in H$  and  $B > 0$ . Let  $k \in \{1 \dots n\}$ . The following inequalities hold:

- (i)  $P(\mathcal{B}^c) = O(\Omega)$ ,
- (ii)  $\|X_n^{-1}\|_{\mathbf{1}_{\mathcal{B}}} \leq 2\|A_n^{-1}\|$ ,
- (iii)  $\mathbb{E}_\theta \|X_n^{-1} A_n h\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \leq (1+B)\|h\|_{(j)}^2 + (1 + \frac{1}{B})l_j(h) \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} c_\sigma \mathbb{E}_\theta \sigma_j^2 + \frac{c\Omega}{M_0}$ ,
- (iv)  $P\left(\frac{1}{1+c/\sqrt{M_0}} \sum_{l=1}^n b_{kl}^2 \leq \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 \mathbf{1}_{\mathcal{M} \cap \mathcal{B}} \leq (1 + \frac{8}{\sqrt{M_0}}) \sum_{l=1}^n b_{kl}^2\right) = 1 - O(\Omega)$ ,

where  $c > 0$ ,  $\sigma_j^2 = \epsilon^2 \sum_{k \in I_j} \sum_{l=1}^n \langle A_n^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2$  and  $c_\sigma = \log^{1+\tau} 1/\sigma$ .

PROOF. Using Lemma 6.1 of Efromovich and Koltchinskii [29], for all  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$P(\sigma \|A_m^{-1}\| \|\eta_m\| \geq \frac{1}{2\sqrt{m}}) \leq \exp\left[-\frac{1}{32\sigma^2 m^2 \|A_m^{-1}\|^2}\right].$$

Thus, using Lemma 1,

$$P(\mathcal{B}^c) \leq M_1 \exp\left[-\frac{1}{32\sigma^2 (M_1 - 1)^2 \|A_{(M_1-1)}^{-1}\|^2}\right] + O(\Omega) = O(\Omega).$$

For the second inequality use, as in Cavalier and Hengartner [19], a Taylor expansion:

$$\begin{aligned} \|X_n^{-1}\|_{\mathbf{1}_{\mathcal{B}}} &\leq \|(I + \sigma A_n^{-1} \eta_n)^{-1}\| \|A_n^{-1}\|_{\mathbf{1}_{\mathcal{B}}}, \\ &= \|I - \sigma A_n^{-1} \eta_n + \sigma^2 (A_n^{-1} \eta_n)^2 - \dots\| \|A_n^{-1}\|_{\mathbf{1}_{\mathcal{B}}}, \\ &\leq 2\|A_n^{-1}\|. \end{aligned}$$

This yields (ii). Now, remark that we can find a matrix  $R_n$  verifying:

$$(2.6.4) \quad X_n^{-1} A_n = (I + \sigma A_n^{-1} \eta_n)^{-1} = I - \sigma A_n^{-1} \eta_n + \sigma A_n^{-1} \eta_n R_n,$$

where  $\|R_n\|_{\mathbf{1}_{\mathcal{B}}}^2 \leq 1/n$ . Let  $h \in H$ . A direct computation provides:

$$\begin{aligned} \|X_n^{-1} A_n h\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_{\mathcal{B}} &\leq (1+B)\|h\|_{(j)}^2 + 2(1+B^{-1})\|\sigma A_n^{-1} \eta_n h\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \\ &\quad + 2(1+B^{-1})\|\sigma A_n^{-1} \eta_n R_n h\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_{\mathcal{B}}, \\ &= (1+B)\|h\|_{(j)}^2 + 2(1+B^{-1})(U_j + V_j), \end{aligned}$$

for all  $B > 0$ . Begin with the study of  $U_j$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta U_j &\triangleq \sigma^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j, k \leq n} \left( \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n b_{kl} \eta_l h_p \right)^2 \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \\ &\leq \sigma^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j, k \leq n} \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n h_p^2 b_{kl}^2 \max_{m=1 \dots M_1} (s_k^m)^2 \mathbf{1}_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

where for all  $m \in \{1 \dots M_1\}$ , the  $s_k^m$  are standard Gaussian random variables. Thus,  $\max_{m=1 \dots M_1} (s_k^m)^2 \leq \log^{1+\tau} 1/\sigma$  with probability  $1 - \Omega$  and

$$U_j \leq l_j(h) \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma} \times \mathbb{E}_\theta \sigma_j^2 + c \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \bar{\sigma}_j^2 \Omega \leq l_j(h) \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma} \times \mathbb{E}_\theta \sigma_j^2 + \frac{c\epsilon^2}{M_0},$$

where

$$(2.6.5) \quad \bar{\sigma}_j^2 = \max_{m=N \wedge M_0 \dots N \wedge M_1} \sum_{k \in I_j} \sum_{l=1}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2.$$

Indeed, we use the definition of  $M_0$  to show that  $\bar{\sigma}_j^2 \Omega \leq c\epsilon^2/M_0$  for some  $c > 0$ . By the same way:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta V_j &\stackrel{\Delta}{=} \mathbb{E}_\theta \|\sigma A_n^{-1} \eta_n R_n h\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_B \\ &\leq \sigma^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j} \sum_{p=1}^n \left( \sum_{l=1}^n b_{kl} \eta_l \right)^2 \|R_n\|^2 l_j(h) \mathbf{1}_B \leq l_j(h) \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} c_\sigma \mathbb{E}_\theta \sigma_j^2 + \frac{c\epsilon^2}{M_0}, \end{aligned}$$

where  $c_\sigma = \log^{1+\tau} 1/\sigma$ . The proof of (iv) follows the same lines. Just remark that:

$$(2.6.6) \quad \begin{aligned} \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 &\leq (1+B) \sum_{l=1}^n b_{kl}^2 + 2(1+B^{-1})\sigma^2 \sum_{l=1}^n \langle A_n^{-1} \eta_n A_n^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2 \\ &\quad + 2(1+B^{-1})\sigma^2 \sum_{l=1}^n \langle A_n^{-1} \eta_n R_n A_n^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle^2. \end{aligned}$$

Using the same principle, one obtains the result with a good choice of  $B$ . For the lower bound, use  $A_n^{-1} = X_n^{-1}(I + \sigma A_n^{-1} \eta_n)$ . This completes the proof.  $\square$

The following lemma provides an upper bound for the probability that  $\lambda_{K_j}^* > 0$  on the event  $C_j$ . The proof follows the same lines as in Cavalier and Tsybakov [21]. The main difficulty is to control the correlation between the variables  $\tilde{y}_k$  in each block  $I_j$ .

**Lemma 2.6.3** *Set  $n_0 = M_0 \wedge N$  and  $n_1 = M_1 \wedge N$  and let  $C_j$  the event defined in (2.3.1). Under the assumptions of Proposition 2.3.1, for all  $j \in \{2 \dots J\}$ ,*

$$\begin{aligned} &P(\{\lambda_{K_{j-1}}^* > 0\} \cap C_j) \\ &\leq T_j \exp \left[ -\frac{C\varphi_j^2}{\Delta_j(1+2\sqrt{\varphi_j})^2} \right] + T_j(n_1 - n_0) \exp \left[ -\frac{C\varphi_j^2\epsilon^2/\sigma^2}{\Delta_j(1+2\sqrt{\varphi_j})^2} \right] + O(\Omega), \end{aligned}$$

where  $C$  is independent of  $\epsilon$  and  $\sigma$ . The second exponential term vanishes if  $\sigma = 0$ .



PROOF. From the definitions of  $\tilde{y}_k$  in (2.2.14) and  $\lambda_{K_j}^*$  in (2.2.15):

$$\begin{aligned}
& P(\{\lambda_{K_{j-1}}^* > 0\} \cap C_j) \\
&= P\left(\left\{\sum_{k \in I_j} \tilde{y}_k^2 \geq \tilde{\sigma}_j^2(1 + \varphi_j)\right\} \cap C_j\right), \\
&= P\left(\left\{\epsilon^2 \sum_{k \in I_j} \left(\sum_{l=1}^n x_{kl} \xi_l\right)^2 + 2\epsilon \sum_{k \in I_j} \sum_{l=1}^n \langle X_n^{-1} A_n (P_n + G_n) f, \phi_k \rangle x_{kl} \xi_l \right. \right. \\
(2.6.7) \quad & \left. \left. + \sum_{k \in I_j} \langle X_n^{-1} A_n (P_n + G_n) f, \phi_k \rangle^2 \geq \tilde{\sigma}_j^2(1 + \varphi_j)\right\} \cap C_j\right), \\
&\leq p_1\left(\frac{(1 - \mu)\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j}{4\epsilon^2}\right) + p_2\left(\frac{\mu\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j}{8\epsilon}\right) + P\left(\left\{\|X_n^{-1} A_n h_n\|_{(j)}^2 > \frac{3\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j}{4}\right\} \cap C_j\right),
\end{aligned}$$

where  $h_n = (P_n + G_n)f$ ,  $\mu = 2\sqrt{\varphi_j}/(1 + 2\sqrt{\varphi_j})$ ,

$$\begin{aligned}
p_1(t) &\triangleq P\left(\left\{\sum_{k \in I_j} \left[\left(\sum_{l=1}^n x_{kl} \xi_l\right)^2 - \sum_{l=1}^n x_{kl}^2\right] \geq t\right\} \cap C_j\right), \text{ and} \\
p_2(t) &\triangleq P\left(\left\{\sum_{l=1}^n \left(\sum_{k \in I_j} \langle X_n^{-1} A_n (P_n + G_n) f, \phi_k \rangle x_{kl}\right) \xi_l \geq t\right\} \cap C_j\right),
\end{aligned}$$

for all  $t \geq 0$ . Begin with the evaluation of  $p_1$ . For all  $k \in I_j$ :

$$\left(\sum_{l=1}^n x_{kl} \xi_l\right)^2 = x_{kk}^2 \xi_k^2 + \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n x_{km} \xi_m\right)^2 + 2x_{kk} \xi_k \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n x_{km} \xi_m\right) \triangleq A_1 + A_2 + A_3.$$

Thus, for all  $t \geq 0$ :

$$p_1(t) \leq P(A_1 \geq t/3) + P(A_2 \geq t/3) + P(A_3 \geq t/3).$$

Lemma 3 of Cavalier and Tsybakov [21] and Lemma 2.6.2 provide:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \geq \frac{(1 - \mu)\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j}{12\epsilon^2}) &= P\left(\left\{\sum_{k \in I_j} x_{kk}^2 (\xi_k^2 - 1) \geq \frac{(1 - \mu)\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j}{6\epsilon^2}\right\} \cap C_j\right), \\
&\leq \mathbb{E}_\theta \exp\left[-\frac{(1 - \mu)^2 \tilde{\sigma}_j^4 \varphi_j^2}{c\epsilon^4 (\sum_{k \in I_j} x_{kk}^4 + \frac{(1 - \mu)\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j}{2\epsilon^2} \max_{k \in I_j} x_{kk}^2)}\right], \\
&\leq \exp\left[-\frac{C\varphi_j^2}{\Delta_j(1 + 2\sqrt{\varphi_j})}\right] + O(\Omega).
\end{aligned}$$

Using (2.6.4), (2.6.6) and Assumption A2,  $\forall k \in I_j$ ,

$$(2.6.8) \quad T_j \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n x_{kl}^2 \mathbf{1}_{C_j} \leq 2c \max_{k \in I_j} \sum_{l=1}^n b_{kl}^2 + \frac{c}{M_0} \sum_{l=1}^M b_{kl}^2 T_j \leq c \max_{k \in I_j} \sum_{l=1}^n b_{kl}^2,$$

with probability  $1 - \Omega$ . Therefore,

$$\begin{aligned} P\left(A_2 \geq \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j}{12\epsilon^2}\right) &= P\left(\left\{\sum_{k \in I_j} \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n x_{km} \xi_m\right)^2 - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n x_{km}^2 \geq \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j (1 - \mu)}{2\epsilon^2}\right\} \cap C_j\right), \\ &\leq \sum_{k \in I_j} P\left(\left\{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n x_{km}^2 (s_k^2 - 1) \geq \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j (1 - \mu)}{2\epsilon^2 T_j}\right\} \cap C_j\right), \\ &\leq \mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j} \exp\left[-\frac{(1 - \mu)^2 \tilde{\sigma}_j^4 \varphi_j^2}{c\epsilon^4 T_j^2 (\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n x_{km}^2)^2}\right] \mathbf{1}(C_j), \\ &\leq T_j \exp\left[-\frac{C\varphi_j^2}{\Delta_j(1 + 2\sqrt{\varphi_j})}\right] + O(\Omega), \end{aligned}$$

where conditioning on  $\eta$ , the  $(s_k)_{k \in I_j}$  are standard Gaussian random variables. The bound of  $P(A_3 \geq t)$  follows the same way.

Using Lemma 3 of Cavalier and Tsybakov [21] and Assumption A2, one obtain the same bound for  $p_2$ . In particular, remark that

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^n \left(\sum_{k \in I_j, k \leq n} x_{kl} \langle X_n^{-1} A_n h_n, \phi_k \rangle\right)^2 \\ &\leq 2 \left(\max_{k \in I_j, k \leq n} x_{kk}^2 + \sum_{k \in I_j, k \leq n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n x_{kl}^2\right) \|X_n^{-1} A_n h_n\|_{(j)}^2. \end{aligned}$$

Then use (2.6.8) and Lemma 2.6.2.

We now bound the last probability in (6.7). In the SVD case, a simple calculation provides it vanishes using the definition of  $C_j$  in (2.3.1). Else, using Lemma 2.6.2:

$$\begin{aligned} &P(\{\|X_n^{-1} A_n h_n\|_{(j)}^2 \geq \frac{3\varphi_j \tilde{\sigma}_j^2}{4}\} \cap C_j) \\ &\leq \sum_{m=n_0}^{n_1} P(\{\|X_m^{-1} A_m h_m\|_{(j)}^2 \geq \frac{3\varphi_j \tilde{\sigma}_j^2}{4}\} \cap C_j) + O(\Omega), \\ &\leq \sum_{m=n_0}^{n_1} P(2\|\sigma A_m^{-1} \eta_m h_m\|_{(j)}^2 + 2\|\sigma A_m^{-1} \eta_m R_m h_m\|_{(j)}^2 \geq \frac{\varphi_j \tilde{\sigma}_j^2}{4}) + O(\Omega), \\ &\leq P_1 + P_2 + O(\Omega), \end{aligned}$$

where  $h_m = (P_m + G_m)f$  for all  $m \in \mathbb{N}$ . Then write as in Lemma 2.6.2:

$$P_1 \triangleq \sum_{m=n_0}^{n_1} P(\sigma^2 \sum_{k \in I_j} \left( \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m \langle A_m^{-1} \psi_l, \phi_k \rangle \eta_p h_p \right)^2) \geq \frac{\varphi_j \tilde{\sigma}_j^2}{16}.$$

The bound is obtained using the same methods as for  $p_1$ . By Assumption A3, with  $c_3 = 16(1 + 8/\sqrt{M_0})$ , we can find a constant  $c \in ]0, 1[$  such that,

$$\frac{\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j}{16} - \sigma_j^2 \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|(P_n + G_n)f\|^2 > \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \varphi_j c}{16},$$

with probability  $1 - \Omega$  on the event  $\mathcal{B}$ . The bound of  $P_2$  follows exactly the same way.  $\square$

**Lemma 2.6.4** *Let  $C_j$  be the event defined in (2.3.1), set  $c_\sigma = \log^{1+\tau} 1/\sigma$  and  $h_n = (P_n + G_n)f$ . There exists a positive constant  $c$  such that, for all  $j \in \{1 \dots J\}$  and  $B > 0$ :*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta \left[ \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \|h_n\|_{(j)}^2}{\tilde{\sigma}_j^2 + \|X_n^{-1} A_n h_n\|_{(j)}^2} \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j) \\ & \leq \left( 1 + cB + (1 + B^{-1}) \frac{c_\sigma}{\varphi_j} l_j(h_n) \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \right) \mathbb{E}_\theta \left[ \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \|h_n\|_{(j)}^2}{\tilde{\sigma}_j^2 + \|h_n\|_{(j)}^2} \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j) + c\tilde{\sigma}_j^2 \Omega, \end{aligned}$$

where  $l_j(h_n)$  is defined in (2.6.2) and  $\tilde{\sigma}_j^2$  in (2.6.5).

PROOF. Let  $j \in \{1 \dots J\}$  be fixed. Define:

$$(2.6.9) \quad \bar{R}_{\epsilon, \sigma}^j(\lambda, \theta) = \sum_{k \in I_j} \left[ (1 - \lambda_k)^2 (h_n^k)^2 + \epsilon^2 \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 \lambda_k^2 \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j),$$

$$(2.6.10) \quad \hat{R}_{\epsilon, \sigma}^j(\lambda, \theta) = \sum_{k \in I_j} \left[ (\lambda_k \langle X_n^{-1} h_n, \phi_k \rangle - h_n^k)^2 + \epsilon^2 \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 \lambda_k^2 \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j),$$

where  $h_n^k = \langle h_n, \phi_k \rangle$  for all  $k \in \{1 \dots n\}$ . These two quantities correspond to different approximations of the mean squared risk restricted to the block  $j$ . Remark that

$$(2.6.11) \quad \mathbb{E}_\theta \left[ \inf_{\lambda \in \Lambda^*} \bar{R}_{\epsilon, \sigma}^j(\lambda, \theta) \right] = \mathbb{E}_\theta \left[ \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \|h_n\|_{(j)}^2}{\tilde{\sigma}_j^2 + \|h_n\|_{(j)}^2} \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j),$$

$$(2.6.12) \quad \text{and } \mathbb{E}_\theta \left[ \inf_{\lambda \in \Lambda^*} \hat{R}_{\epsilon, \sigma}^j(\lambda, \theta) \right] = \mathbb{E}_\theta \left[ \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \|h_n\|_{(j)}^2}{\tilde{\sigma}_j^2 + \|X_n^{-1} A_n h_n\|_{(j)}^2} \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j).$$

For all  $\lambda \in \Lambda^*$  and  $B > 0$ , using the elementary inequality  $2ab \leq B^{-1}a^2 + Bb^2$  and Lemma 2.6.2:

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E}_\theta \bar{R}_{\epsilon, \sigma}^j(\lambda, \theta) - \mathbb{E}_\theta \hat{R}_{\epsilon, \sigma}^j(\lambda, \theta) \right| \\
& \leq \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k \in I_j} \{B(1 - \lambda_k)^2 (h_n^k)^2 + (1 + B^{-1}) \lambda_k^2 \langle (X_n^{-1} A_n - I) h_n, \phi_k \rangle^2\} \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j) \\
(2.6.13) \quad & \leq cB \mathbb{E}_\theta \bar{R}_{\epsilon, \sigma}^j(\lambda, \theta) + c(1 + B^{-1}) c_\sigma \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} l_j(h_n) \mathbb{E}_\theta \tilde{\sigma}_j^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) + \tilde{\sigma}_j^2 O(\Omega),
\end{aligned}$$

where  $c > 0$ . Then remark that:

$$(2.6.14) \quad \mathbb{E}_\theta \tilde{\sigma}_j^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) \leq c \mathbb{E}_\theta \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \|(P_n + G_n) f\|_{(j)}^2}{\tilde{\sigma}_j^2 + \|(P_n + G_n) f\|_{(j)}^2} \times \left(1 + \frac{8}{\varphi_j}\right) \mathbf{1}(\bar{C}_j),$$

and apply Inequality (2.6.13) to  $\hat{\lambda}_j = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \Lambda^*} \hat{R}_{\epsilon, \sigma}^j(\lambda, \theta)$  to conclude the proof.  $\square$

The following lemma provides an upper bound for the two residual terms appearing in (2.7.3).

**Lemma 2.6.5** *Let  $\bar{C}_j$  be the event defined in (2.3.1) and set  $c_\sigma = \log^{1+\tau} 1/\sigma$ . There exists a positive constant  $c$  such that,*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \mathbb{E}_\theta \|(X_n^{-1} A_n - I) P_n f\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) \leq c c_\sigma l_j(\theta) \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \mathbb{E}_\theta \tilde{\sigma}_j^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) + \tilde{\sigma}_j^2 O(\Omega), \\
(ii) \quad & \mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j, k \leq n} \langle (X_n^{-1} A_n - I) f, \phi_k \rangle \tilde{y}_k (1 - \bar{\lambda}_j) \mathbf{1}(\bar{C}_j) \\
& \leq c \left(1 + c_\sigma \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} l_j(\theta)\right) \mathbb{E}_\theta \tilde{\sigma}_j^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) + \tilde{\sigma}_j^2 O(\Omega).
\end{aligned}$$

PROOF. The proof uses the same techniques as in Lemmas 2.6.2-2.6.4.  $\square$

## 2.7 Proof of Proposition 2.3.1

Remark that

$$\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 = \sum_{j=1}^J \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|_{(j)}^2 + \sum_{k>N} \theta_k^2.$$

For all  $j \in \{1, \dots, J\}$ , let  $C_j$  the event defined in (2.3.1) and set:

$$(2.7.1) \quad \bar{C}_j = \left\{ \|(P_n + G_n) f\|_{(j)}^2 \geq \varphi_j \frac{\tilde{\sigma}_j^2}{8} \right\} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{M}.$$

The events  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{M}$  are defined in Lemma 2.6.2 (see Section 2.6). We first bound the risk separately on  $C_j$  and  $\bar{C}_j$ .

### 2.7.1 Bound of the risk on $\bar{C}_j$

Let  $j \in \{1 \dots J\}$  be fixed. In a first time, assume that the penalty verifies:

$$(2.7.2) \quad \Delta_j \leq \frac{1 - \varphi_j}{4} \times \frac{1}{(1 + 8/\sqrt{M_0})^2},$$

and set

$$\bar{\theta}_k = \tilde{y}_k \left( 1 - \frac{\tilde{\sigma}_j^2(1 + \varphi_j)}{\|\tilde{y}\|_{(j)}^2} \right) \triangleq \tilde{y}_k \bar{\lambda}_k(\tilde{y}).$$

Using the decomposition of Stein [64]:

$$(2.7.3) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|_{(j)}^2 &= \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - X_n^{-1} A_n (P_n + G_n) f\|_{(j)}^2 \\ &+ \mathbb{E}_\theta \|(X_n^{-1} A_n - I) f + X_n^{-1} A_n G_n f\|_{(j)}^2 \\ &+ 2\mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j, k \leq n} [\langle (X_n^{-1} A_n - I) f + X_n^{-1} A_n G_n f, \phi_k \rangle \tilde{y}_k (1 - \lambda_k^*)]. \end{aligned}$$

Set  $h_n = (P_n + G_n) f$ . Applying Lemma 5 of Cavalier and Tsybakov [21], we get:

$$(2.7.4) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - X_n^{-1} A_n h_n\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) &\leq \mathbb{E}_\theta \|\bar{\theta} - X_n^{-1} A_n h_n\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j), \\ &= \sum_{k \in I_j} \mathbb{E}_\theta \{ (\tilde{y}_k - \langle X_n^{-1} A_n h_n, \phi_k \rangle)^2 + (\tilde{y}_k (\bar{\lambda}_k - 1))^2 \\ &\quad - 2[(\tilde{y}_k - \langle X_n^{-1} A_n h_n, \phi_k \rangle) \tilde{y}_k (1 - \bar{\lambda}_k)] \} \mathbf{1}_{\{k \leq n\}} \mathbf{1}(\bar{C}_j), \end{aligned}$$

Using (2.2.14):

$$\mathbb{E}_\theta (\tilde{y}_k - \langle X_n^{-1} A_n h_n, \phi_k \rangle)^2 \mathbf{1}_{\{k \leq n\}} \mathbf{1}(\bar{C}_j) = \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 \mathbf{1}_{\{k \leq n\}} \mathbf{1}(\bar{C}_j),$$

and applying Lemma 1 of Stein [64], we obtain:

$$\begin{aligned} S_j &= \mathbb{E}_\theta \|\bar{\theta} - X_n^{-1} A_n h_n\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) = \mathbb{E}_\theta [\tilde{\sigma}_j^2] \mathbf{1}(\bar{C}_j) \\ &+ \mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j, k \leq n} \left\{ [\tilde{y}_k (\bar{\lambda}_k - 1)]^2 - \epsilon^2 \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 (1 - \bar{\lambda}_j - \tilde{y}_k \frac{\partial \bar{\lambda}_k}{\partial \tilde{y}_k}(\tilde{y})) \right\} \mathbf{1}(\bar{C}_j). \end{aligned}$$

After some algebra, using (2.7.2), Jensen's inequality, and (iv) of Lemma 2.6.2:

$$\begin{aligned} S_j &\leq \mathbb{E}_\theta \tilde{\sigma}_j^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) - (1 - \varphi_j^2) \mathbb{E}_\theta \left( \frac{\tilde{\sigma}_j^4}{\|\tilde{y}\|_{(j)}^2} \right) \mathbf{1}(\bar{C}_j) + \\ &4\epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \left( \max_{k \in I_j, k \leq n} \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 \frac{(1 + \varphi_j) \tilde{\sigma}_j^2}{\|\tilde{y}\|_{(j)}^2} \right) \mathbf{1}(\bar{C}_j), \\ &\leq \mathbb{E}_\theta \left[ \tilde{\sigma}_j^2 - \frac{\tilde{\sigma}_j^4}{\|\tilde{y}\|_{(j)}^2} (1 - \varphi_j^2 - 4(1 + 8/\sqrt{M_0})^2 \Delta_j (1 + \varphi_j)) \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j) + c\tilde{\sigma}_j^2 \Omega. \end{aligned}$$

Conditioning on  $X_n$ ,  $\mathbb{E}_\theta[\|\tilde{y}\|_{(j)}^2/X_n] = \tilde{\sigma}_j^2 + \|X_n^{-1}A_n h_n\|_{(j)}^2$ . We can apply Jensen inequality since (2.7.2) holds:

$$\begin{aligned} S_j &\leq \mathbb{E}_\theta \left[ \tilde{\sigma}_j^2 - \frac{\tilde{\sigma}_j^4(1 - \varphi_j^2 - 4(1 + 8/\sqrt{M_0})^2 \Delta_j(1 + \varphi_j))}{\mathbb{E}_\theta[\|\tilde{y}\|_{(j)}^2/X_n]} \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j) + c\tilde{\sigma}_j^2\Omega, \\ &\leq \mathbb{E}_\theta \left( c \frac{(\varphi_j^2 + 4\Delta_j)}{\varphi_j} + \frac{\|X_n^{-1}A_n h_n\|_{(j)}^2}{\|h_n\|_{(j)}^2} \right) \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \|h_n\|_{(j)}^2}{\tilde{\sigma}_j^2 + \|X_n^{-1}A_n h_n\|_{(j)}^2} \mathbf{1}(\bar{C}_j). \end{aligned}$$

Using (2.7.3), Lemmas 2.6.4, 2.6.5 and the same techniques as in Lemmas 2.6.2, we eventually obtain:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) \\ &\leq (1 + c \frac{(\varphi_j^2 + 4\Delta_j)}{\varphi_j})(1 + B + B^{-1} \frac{l_j(h_n)}{\varphi_j} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} c_\sigma)^2 \mathbb{E}_\theta \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \|h_n\|_{(j)}^2}{\tilde{\sigma}_j^2 + \|h_n\|_{(j)}^2} \mathbf{1}(\bar{C}_j) \\ (2.7.5) \quad &+ c\mathbb{E}_\theta \|X_n^{-1}A_n G_n f\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_B + \tilde{\sigma}_j^2 O(\Omega), \end{aligned}$$

where  $c_\sigma = \log^{1+\tau} 1/\sigma$  and  $c$  is a positive constant.

Now consider the case where Inequality (2.7.2) is not satisfied. The penalty  $\varphi_j$  is too large. Using (2.2.15) and Lemmas 2.6.2 and 2.6.5,

$$\begin{aligned} (2.7.6) \quad \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(\bar{C}_j) &\leq 2\mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k \in I_j} (\tilde{y}_k - \theta_k)^2 + \sum_{k \in I_j} \tilde{y}_k^2 (1 - \lambda_k^*)^2 \right] \mathbf{1}(\bar{C}_j) \\ &\leq c(1 + c_\sigma l_j(\theta)) \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} + 1 + \varphi_j \mathbb{E}_\theta \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \|h_n\|_{(j)}^2}{\tilde{\sigma}_j^2 + \|h_n\|_{(j)}^2} \mathbf{1}(\bar{C}_j) \\ (2.7.7) \quad &+ \tilde{\sigma}_j^2 \Omega + c\mathbb{E}_\theta \|X_n^{-1}A_n G_n f\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_B. \end{aligned}$$

Sharp results for  $\theta^*$  will be obtained only if Inequality (2.7.2) is satisfied. Following the structure of the representation matrix, it will not always be the case. Indeed, Inequality (2.7.2) holds automatically if the penalty is small enough. But we require also that Assumption A3 holds. The choice of  $\varphi_j$  is therefore a trade off between a good quality of recovering and a control of the noise in the operator.

## 2.7.2 Bound of the risk on $C_j$

Define:

$$A_j = \{\|\tilde{y}\|_{(j)}^2 \leq \tilde{\sigma}_j^2(1 + \varphi_j)\} = \{\lambda_{K_{j-1}}^* = 0\}.$$

On  $\bar{A}_j \cap C_j$ , the function  $\lambda_k^*(\tilde{y})$  is positive but Lemma 2.6.3 provides that  $P(\bar{A}_j \cap C_j)$  is small. Thus  $\theta^*$  is equal to zero on  $C_j$  with a great probability. Let  $B \in ]0,1[$ . One can easily show that,

$$\|\theta\|_{(j)}^2 - \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2 \leq (1 + B^{-1})\|G_n f\|_{(j)}^2 + B\|\theta\|_{(j)}^2.$$

Therefore:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(C_j), \\
&= \mathbb{E}_\theta \|\theta\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(C_j) + \mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j, k \leq n} [(\lambda_k^* \tilde{y}_k)^2 - 2\lambda_k^* \tilde{y}_k \theta_k] \mathbf{1}(C_j \cap \bar{A}_j), \\
&\leq \frac{1}{1-B} \mathbb{E}_\theta \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(C_j) + \frac{1+B^{-1}}{1-B} \mathbb{E}_\theta \|G_n f\|_{(j)}^2 \\
(2.7.8) \quad & + R_1 - 2R_2.
\end{aligned}$$

With the Cauchy-Schwarz and Young inequalities:

$$(2.7.9) \quad |R_2| \triangleq \left| \mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j, k \leq n} \lambda_k^* \tilde{y}_k \theta_k \mathbf{1}(C_j \cap \bar{A}_j) \right| \leq \frac{1}{2} R_1 + \frac{r^2}{2} P(C_j \cap \bar{A}_j),$$

since  $\|\theta\| \leq r$ . Using (2.2.14) and the fact that  $0 \leq \lambda_k^* \leq 1$ , we get:

$$\begin{aligned}
R_1 &\triangleq \mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j, k \leq n} (\lambda_k^* \tilde{y}_k)^2 \mathbf{1}(C_j \cap \bar{A}_j), \\
&\leq 2\mathbb{E}_\theta \sum_{k \in I_j} \left[ \langle X_n^{-1} A_n (P_n + G_n) f, \phi_k \rangle^2 + \epsilon^2 \left( \sum_{l=1}^n x_{kl} \xi_l \right)^2 \right] \mathbf{1}(C_j \cap \bar{A}_j), \\
(2.7.10) \quad &\leq 4r^2 P(C_j \cap \bar{A}_j) + c\bar{\sigma}_j^2 P(C_j \cap \bar{A}_j)^{1/2} + c\mathbb{E}_\theta \|X_n^{-1} A_n G_n f\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_B,
\end{aligned}$$

where  $\bar{\sigma}_j^2$  is defined in (2.6.5). Indeed,

$$\|X_n^{-1} A_n (P_n + G_n) f\|^2 \mathbf{1}(C_j \cap \bar{A}_j) \leq 2r^2 + 2\|X_n^{-1} A_n G_n f\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_B,$$

Moreover:

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \left( \sum_{l=1}^n x_{kl} \xi_l \right)^2 \mathbf{1}(C_j \cap \bar{A}_j) &= \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{l=1}^n x_{kl}^2 (s_k^n)^2 \mathbf{1}(C_j \cap \bar{A}_j), \\
(2.7.11) \quad &\leq c\bar{\sigma}_j^2 P(C_j \cap \bar{A}_j)^{1/2} + \bar{\sigma}_j^2 O(\Omega).
\end{aligned}$$

where  $s_k^n \sim \mathcal{N}(0,1)$  conditioning on  $\eta$  and  $c$  is a positive constant. On the other hand, remark that:

$$(2.7.12) \quad \mathbf{1}(C_j) \leq \left(1 + \frac{\varphi_j}{8}\right) \frac{\bar{\sigma}_j^2}{\bar{\sigma}_j^2 + \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2} \mathbf{1}(C_j).$$

Using (2.7.8)-(2.7.10) and (2.7.12), we eventually find:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|_{(j)}^2 \mathbf{1}(C_j) \\
&\leq \left(1 + \frac{\varphi_j}{8}\right) \times \frac{1}{1-B} \mathbb{E}_\theta \left[ \frac{\bar{\sigma}_j^2 \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2}{\bar{\sigma}_j^2 + \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2} \right] \mathbf{1}(C_j) \\
(2.7.13) \quad & + c \frac{1+B^{-1}}{1-B} \mathbb{E}_\theta \|X_n^{-1} A_n G_n f\|_{(j)}^2 \mathbf{1}_B + c\bar{\sigma}_j^2 P(C_j \cap \bar{A}_j)^{1/2} + c\bar{\sigma}_j^2 \Omega,
\end{aligned}$$

for some  $c > 0$ .

### 2.7.3 Final bound of the risk

Let  $j \in \{1 \dots J\}$ . Using (iv) of Lemma 2.6.2 and the same methods as in Lemma 2.6.4, we find:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \frac{\tilde{\sigma}_j^2 \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2}{\tilde{\sigma}_j^2 + \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2} \mathbf{1}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{M}} &\leq \left(1 + \frac{c}{\sqrt{M_0}}\right) \mathbb{E}_\theta \frac{\sigma_j^2 \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2}{\sigma_j^2 + \|(P_n + G_n)f\|_{(j)}^2} + c\Omega, \\ &= (1 + c/\sqrt{M_0}) \inf_{\lambda \in \Lambda^*} \bar{R}_\epsilon^n(\lambda, \theta) + O(\Omega), \end{aligned}$$

where  $\sigma_j^2 = \epsilon^2 \sum_{k \in I_j} \sum_{l=1}^n b_{kl}^2$ , and

$$\bar{R}_\epsilon^n(\lambda, \theta) = \sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^2 \langle (P_n + G_n)f, \phi_k \rangle^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_k^2 b_{kl}^2 + \sum_{k>n} \theta_k^2.$$

Using (2.7.5), (2.7.7), (2.7.13), and summing up over  $j$ :

$$(2.7.14) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \mathbf{1}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{M}} &\leq \max_{j=1 \dots J} t_j \times \mathbb{E}_\theta \inf_{\lambda \in \Lambda^*} \bar{R}_\epsilon^n(\lambda, \theta) + c\epsilon^2 \\ &+ c \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j^2 P(C_j \cap \bar{A}_j)^{1/2} + \frac{1 + B^{-1}}{1 - B} \mathbb{E}_\theta \|G_n f\|^2 + O(\Omega). \end{aligned}$$

Indeed, the definition of  $M_0$  provides  $\tilde{\sigma}_j^2 \Omega \leq c\epsilon^2/M_0$ . For all  $j \in \{1 \dots J\}$ ,

$$(2.7.15) \quad t_j \leq \left(c_0 + \frac{c(\varphi_j^2 + 4\Delta_j)}{\varphi_j}\right) (1 + cB + c(1 + B^{-1}) \frac{c_\sigma}{\varphi_j} l_j(\theta) \frac{\sigma^2}{\epsilon^2})^2 \left(1 + \frac{c}{\sqrt{M_0}}\right),$$

where  $c_\sigma = \log^{1+\tau} 1/\sigma$ ,  $l_j(\theta)$  is defined in (2.6.2),  $c_0 = 1$  if Inequality (2.7.2) is satisfied and  $c_0 \geq 1$  else. In this case, this constant can be explicitly computed.

To finish the proof, remark that, using (7.6):

$$\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \mathbf{1}_{\mathcal{B}^c \cup \mathcal{M}^c} \leq O(\Omega).$$

Following the proof of Lemma 1 of Cavalier and Tsybakov [21] we get:

$$(2.7.16) \quad \mathbb{E}_\theta \left[ \inf_{\lambda \in \Lambda^*} \bar{R}_\epsilon^n(\lambda, \theta) \right] \leq (1 + \eta_\epsilon) \mathbb{E}_\theta \left[ \inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} \bar{R}_\epsilon^n(\lambda, \theta) \right] + c\epsilon^2 \nu_\epsilon^{2\beta+1} + O(\Omega),$$

where  $\eta_\epsilon \rightarrow 0$  as  $\epsilon \rightarrow 0$  by Assumption A1. In view of Lemma 2.6.3 and with the choice of geometrically increasing blocks, we can find a positive constant  $c$  verifying:

$$(2.7.17) \quad \sum_{j=2}^J \tilde{\sigma}_j^2 P(C_j \cap \bar{A}_j)^{1/2} \leq c\epsilon^2.$$

The bound is obtained by the same way as in Cavalier and Tsybakov [21]. Now, remark that for all  $\theta$  and  $\lambda$  verifying the conditions of the proposition and  $B > 0$ :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\theta \left[ \bar{R}_\epsilon^n(\lambda, \theta) - R_\epsilon^n(\lambda, \theta) \right] \\ &= \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^2 \langle G_n f, \phi_k \rangle^2 + 2 \sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^2 \theta_k \langle G_n f, \phi_k \rangle \right], \\ &\leq (1 + B^{-1}) \mathbb{E}_\theta \|G_n f\|^2 + B \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^M (1 - \lambda_k)^2 \theta_k^2, \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \mathbb{E}_\theta[\inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} \bar{R}_\epsilon^n(\lambda, \theta)] \leq (1+B)\mathbb{E}_\theta[\inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} R_\epsilon^n(\lambda, \theta)] + (1+B^{-1})\mathbb{E}_\theta\|G_n f\|^2.$$

With (2.7.14), (2.7.16) and (2.7.17), we eventually obtain:

$$(2.7.18) \quad \mathbb{E}_\theta\|\theta^* - \theta\|^2 \leq \max_{j=1\dots J} (1+g_j) \times \mathbb{E}_\theta[\inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} R_\epsilon^n(\lambda, \theta)] \\ + c(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma}) \epsilon^2 \nu_\epsilon^{2\beta+1} + c \frac{1+B^{-1}}{1-B} \mathbb{E}_\theta\|G_n f\|^2 + O(\Omega),$$

where

$$(2.7.19) \quad g_j = t_j(1 + \eta_\epsilon) \frac{1+B}{1-B} - 1,$$

$t_j$  is defined in (2.7.15),  $c$  is a positive constant and  $\eta_\epsilon \rightarrow 0$  as  $\epsilon \rightarrow 0$  by Assumption A1. Hence, one can easily show that

$$\mathbb{E}_\theta[\inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} R_\epsilon^n(\lambda, \theta)] \leq \inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} R_\epsilon^N(\lambda, \theta) + \Gamma(\theta),$$

where  $\Gamma(\theta)$  is defined in (2.3.4). This concludes the proof. □



## Chapitre 3

# On the stability of the risk hull method for projection estimation

### Abstract

We consider in this chapter the regularization by projections of a linear inverse problem  $Y = Af + \xi$  where  $\xi$  denotes a Gaussian white noise and  $A$  a compact operator. Compared to the standard unbiased risk estimation (URE) method, the risk hull minimization (RHM) procedure presents very interesting numerical behavior. However, regularization in the singular value decomposition setting requires the knowledge of the eigenvalues of  $A$ . Here, we deal with noisy eigenvalues: only observations on this sequence are available. We study the efficiency of the RHM method in this situation. More generally, we shed some light on properties usually related to regularization with a noisy operator.

### 3.1 Introduction

Let  $H$  and  $K$  two separable Hilbert spaces and  $A$  a compact operator acting from  $H$  to  $K$ . Our aim is to recover a function  $f \in H$  from noisy measurement:

$$(3.1.1) \quad Y = Af + \epsilon\xi,$$

for some noise  $\xi$  and  $0 < \epsilon < 1$ . The solution of (3.1.1) does not continuously depend on the data. Only approximations, obtained via regularization methods are available. Here and in the sequel, statistical inverse problems are considered:  $\xi$  is a Gaussian white noise (see Hida [39] for more details).

Regularization of ill-posed inverse problems has been studied in both numerical and statistical areas. Several methods have been proposed. We refer for instance to Engl et al. [31], Hanke [38], Donoho [24], Johnstone and Silverman [45] and many others. A regularization method is characterized by a regularization operator and a parameter choice rule. This rule may be associated to some a priori information on the solution as regularity,  $\ell^2$ -norm, existence of jump, and so on... However, these informations are in most cases unknown. Therefore, data driven choice rules are preferable.

A method is said to be adaptive if it do not require some a priori information on the solution  $f$ . Many adaptive estimators have been proposed for solving (3.1.1). However,

they are not always related to a good numerical efficiency. We mention for instance the well-known unbiased risk estimation (URE) procedure (see Section 2 for some references on the subject). Specific processes are involved in this method but they are not always well-controlled. This phenomenon leads to a very unstable procedure, in particular when dealing with ill-posed inverse problems. This instability is clearly linked to the specificity of the Gaussian white noise model (3.1.1). It requires a treatment, not necessary useful in numerical analysis.

In this context, Cavalier and Golubev [17] proposes a new data driven parameter choice rule for projection estimators: the risk hull minimization (RHM) method. Principle is rather intuitive. Instead of the quadratic risk, estimate and minimize a corresponding hull, i.e. a deterministic quantity  $V(f, N)$  satisfying:

$$\mathbb{E}_f \sup_N [l(f, N) - V(f, N)] \leq 0, \forall f \in H.$$

Here,  $l(f, N)$  denotes the quadratic loss of the projection estimator associated to the bandwidth  $N$ . The risk hull method presents very interesting theoretical and numerical behavior. Moreover, using Monte-Carlo approximation, it is easy to implement.

Each regularization method require some informations on the operator  $A$ . Cavalier and Golubev [17] assumed a complete knowledge of the spectral decomposition of  $A$ . However, in many problems and areas, the operator may only be numerically approximated or independently observed. In this case, these approximations could be used instead of the "true" operator. Nevertheless, it is not clear that such an approach may lead to a similar efficiency. In the last decade, some authors were interested by this question. We mention for instance Efromovich and Koltchinskii [29], Cavalier and Hengartner [19], Hoffmann and Reiß [40] or Cavalier and Raimondo [20]. The underneath aim is to provide an accurate understanding of linear inverse problems.

The following question naturally arises: 'does the RHM method is still efficient with noise in the operator?' In this chapter, we give a positive answer. Moreover, we present some usual properties related to regularization with noise in the operator.

This chapter is organised as follow. In Section 3.2, we recall the main properties of the RHM method and we propose an estimator using noisy measurements of the operator. Section 3.3 contains the main theorem, some numerical simulations and a brief discussion on the results. Proofs and technical lemmas are gathered in Sections 3.4 and 3.5.

## 3.2 The risk hull method

### 3.2.1 Statement of the problem

We want to recover the function  $f$  from the noisy observation (3.1.1). The singular value decomposition (SVD) is a classical regularization approach. Let  $A^*$  be the adjoint of  $A$ . The operator  $A^*A$  is compact and selfadjoint with eigenvalues  $(b_k^2)_{k \geq 1}$ . The set of eigenfunctions  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  is assumed to be orthonormal. For all  $k \in \mathbb{N}$ , set  $\psi_k = b_k^{-1}A\phi_k$ . The model (3.1.1) can be written in the sequence space form:

$$(3.2.1) \quad \langle Y, \psi_k \rangle = y_k = b_k \theta_k + \epsilon \xi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

where  $\theta_k = \langle f, \phi_k \rangle$ . The  $\xi_k$  are i.i.d. standard Gaussian random variables, since the set  $(\psi_k)_{k \geq 1}$  is also orthonormal. In the  $L^2$  sense, recovering the function  $f$  is equivalent to recover the sequence  $\theta = (\theta_k)_{k \geq 1}$ .

In ill-posed inverse problems, the solution does not continuously depend on the data  $Y$ . The sequence of eigenvalues  $(b_k)_{k \geq 1}$  converges to 0 as  $k \rightarrow +\infty$ . For large values of  $k$ , the term  $b_k \theta_k$  is thus attenuated compared to the noise  $\epsilon \xi_k$ . This is the main difficulty of regularization. In this context, projection estimation is a very simple and natural method. Let  $N \in \mathbb{N}$  be fixed. The associated projection estimator (also called spectral cut-off) is defined by:

$$\hat{\theta}^N = \sum_{k=1}^N b_k^{-1} y_k \phi_k.$$

It is equivalent to:

$$\hat{\theta}_k^N = \begin{cases} b_k^{-1} y_k & \text{if } k \leq N, \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

where  $\hat{\theta}_k^N = \langle \hat{\theta}^N, \phi_k \rangle$ . The choice of the bandwidth  $N$  is a trade-off between a good accuracy and a control of the noise in the data. It is related to the associated quadratic risk:

$$(3.2.2) \quad R(\theta, N) = \mathbb{E}_\theta \|\hat{\theta}^N - \theta\|^2 = \sum_{k > N} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^N b_k^{-2}.$$

Given  $f \in H$  (i.e a sequence  $\theta$ ), our purpose is to construct the best possible adaptive bandwidth  $N^*$ . We measure the quality the associated estimator  $\theta^*$  by its oracle efficiency:

$$r_\epsilon(\theta, \theta^*) = \frac{\inf_N \mathbb{E}_\theta \|\hat{\theta}^N - \theta\|^2}{\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2}.$$

We want  $r_\epsilon(\theta, \theta^*)$  as close as possible to 1. In the particular case where  $r_\epsilon(\theta, \theta^*)$  converges to 1 as  $\epsilon \rightarrow 0$ , the bandwidth  $N^*$  asymptotically corresponds to the best possible choice.

### 3.2.2 Data-driven choice for the bandwidth

Several data-driven procedures have been proposed for solving this problem. Some of them are based on the well-known unbiased risk estimation (URE) method. Principle is as follow: given a sequence  $\theta$ , we want to select the best possible bandwidth, i.e. that minimizes the quadratic risk. Such a choice (called an oracle) can only be approximated. Indeed,  $R(\theta, N)$  depends on  $\theta$ . Define:

$$(3.2.3) \quad \tilde{N} = \underset{N}{\operatorname{argmin}} U_\epsilon(N, y), \text{ with } U_\epsilon(N, y) = - \sum_{l=1}^N b_l^{-2} y_l^2 + 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^N b_k^{-2}.$$

The quantity  $U_\epsilon(N, y)$  is a natural estimator for the quadratic risk. This method was studied in Cavalier et al. [16], and sharp oracle inequalities have been obtained. However, numerical simulations are not always satisfying. Indeed,  $b_k^{-1} y_k \sim \mathcal{N}(\theta_k, \epsilon^2 b_k^{-2})$  for all  $k \in \mathbb{N}$ . Since we deal with ill-posed inverse problems, the variance of the unbiased risk estimator is very large. This explain in part the difficulties of the URE method. The bandwidth selection

(3.2.3) allows large choices for the parameter  $N$  when the oracle  $N_0$  is typically small. We refer to Cavalier and Golubev [17] for a complete discussion and some numerical simulations.

In this context, Cavalier and Golubev [17] introduced a new data-driven bandwidth choice rule called the risk hull minimization (RHM) method. Principle is rather intuitive. Instead of the quadratic risk  $R(\theta, N)$ , consider the  $l^2$  loss:

$$(3.2.4) \quad l(\theta, N) \triangleq \|\hat{\theta}^N - \theta\|^2 = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^N b_k^{-2} \xi_k^2.$$

Due to the ill-posedness of the problem, the variance of the last term in the right-hand side is very large. When dealing with the quadratic risk, this variability is neglected. This explains also the instability of the URE method.

The sequence  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  is unknown. Therefore, construct a hull for the loss, i.e. a deterministic quantity  $V(\theta, N)$  verifying, for all  $\theta$ :

$$\mathbb{E}_\theta \sup_N [l(\theta, N) - V(\theta, N)] \leq 0.$$

Then estimate and minimize  $V(\theta, N)$  instead of  $R(\theta, N)$ . The risk hull constructed by Cavalier and Golubev [17] is in fact a penalized URE method. The penalty contains the stochastic term in (3.2.3) and in (3.2.4). This penalty is directly computable via Monte-Carlo approximations.

In the model selection framework, different penalizations have been proposed. We mention for example Barron et al. [3], Birgé and Massart [7] or Golubev [36]. However, the choice of the penalty, often related to some constant or regularization parameter, may be rather difficult.

### 3.2.3 Inverse problem with noisy operator

The eigenvalues of the operator  $A$  are explicitly involved in the construction of the hull of Cavalier and Golubev [17]. This is the case for all regularization method constructed in the SVD framework. In many situations,  $A$  is not well-known or only up to a parameter. Numerical approximations or independent observations may be used in order to regularize the problem. Here, for all  $k \in \mathbb{N}$ , we deal with the data:

$$(3.2.5) \quad \begin{cases} y_k = b_k \theta_k + \epsilon \xi_k, \\ x_k = b_k + \sigma \zeta_k, \end{cases}$$

where the  $\zeta_k$  are i.i.d. standard Gaussian random variables independent of  $(\xi_k)_{k \geq 1}$  and  $\sigma \geq 0$  is a noise level.

Regularization of inverse problems with a noisy operator has already been considered. In the model selection context, Cavalier and Hengartner [19] obtained a sharp oracle inequality with an estimator based on the URE method. In a different setting, we can also mention the work of Efromovich and Koltchinskii [29], Cavalier and Raimondo [20] or Marteau [54].

The joint asymptotic of  $\epsilon, \sigma$  is very important. Here and in the sequel, we assume that  $\sigma = O(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ . Hoffmann and Reiß [40] also considered the case  $\sigma \gg \epsilon$ . They proved that the rate of convergence in such a situation only depends on  $\sigma$ . This could certainly be generalized in our framework, but with longer proofs.

Using directly  $(x_k)_{k \geq 1}$  instead of  $(b_k)_{k \geq 1}$  is a natural but naive idea. Due to the ill-posedness of the problem, the sequence  $(b_k)_{k \geq 1}$  converges to 0 as  $k \rightarrow +\infty$ . For large values of  $k$ , there is mainly noise in  $x_k$ . This is a problem when estimating  $b_k^{-1}$ . Here define the following stopping rule:

$$(3.2.6) \quad M = \min \left\{ k \leq T_0 : |x_k| \leq \sigma \log^{1+\tau} \frac{1}{\sigma} \right\} - 1,$$

where  $\tau > 0$  and  $T_0$  ensures that  $M$  is not too large. For example, choose  $T_0 = \sigma^{-2}$ . The quantity  $M$  is stochastic but can be controlled. Indeed, as proved in Cavalier and Hengartner [19],

$$M_0 < M < M_1,$$

with a large probability, where

$$(3.2.7) \quad M_0 = \min \left\{ k : |b_k| \leq \sigma \log^{1+2\tau} \frac{1}{\sigma} \right\},$$

and

$$(3.2.8) \quad M_1 = \min \left\{ k : |b_k| \leq \sigma \log^{1+\tau/2} \frac{1}{\sigma} \right\}.$$

Given  $a, b \in \mathbb{R}$ , write  $a \simeq b$  if we can find  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$  verifying:  $c_1 a \leq b \leq c_2 a$ . Using Lemma 3.4.5,  $x_k \simeq b_k$  with a large probability for  $k \leq M$ . For  $k > M$ , there is too much noise in  $x_k$  in order to provide a good quality of estimation. This can be a problem in some particular cases: see Section 3.3 for a complete discussion.

We are now ready to construct an estimator of  $\theta$ . For all  $N \in \mathbb{N}$ , define

$$U_0(N) = \inf \left\{ t > 0 : \mathbb{E} \eta_N \mathbf{1}_{\{\eta_N \geq t\}} \leq \epsilon^2 \right\}, \text{ with } \eta_N = \epsilon^2 \sum_{k=1}^N b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1).$$

As proved in Theorem 2 of Cavalier and Golubev [17], the quantity

$$(3.2.9) \quad V_\alpha(\theta, N) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^N b_k^{-2} + (1 + \alpha)U_0(N) + \frac{C^* \epsilon^2}{\alpha},$$

is a risk hull for all  $\alpha > 0$ , i.e.

$$\mathbb{E}_\theta \sup_N [l(\theta, N) - V_\alpha(\theta, N)] \leq 0,$$

where  $l(\theta, N)$  is defined in (3.2.4) and  $C^*$  is a positive constant. Cavalier and Golubev [17] proposes to minimize the following estimator of  $V_\alpha(\theta, N)$ :

$$(3.2.10) \quad V_\alpha(y, N) = - \sum_{k=1}^N b_k^{-2} y_k^2 + 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^N b_k^{-2} + (1 + \alpha)U_0(N).$$

Since the sequence  $(b_k)_{k \geq 1}$  is here unknown, consider instead

$$(3.2.11) \quad V_\alpha(x, y, N) = - \sum_{k=1}^N x_k^{-2} y_k^2 + 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^N x_k^{-2} + (1 + \alpha)U_0(N, x),$$

where

$$U_0(N, x) = \inf \{ t > 0 : \mathbb{E}_x \tilde{\eta}_N \mathbf{1}_{\{\tilde{\eta}_N \geq t\}} \leq \epsilon^2 \}, \quad \tilde{\eta}_N = \epsilon^2 \sum_{k=1}^N x_k^{-2} (\xi_k^2 - 1),$$

and  $\mathbb{E}_x$  denotes the conditional expectation on the sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$ . We prove in Section 3.3 that the estimator

$$(3.2.12) \quad \theta^* = \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-1} y_k \phi_k,$$

associated to the bandwidth

$$(3.2.13) \quad N^* = \operatorname{argmin}_{N \leq M} V_\alpha(x, y, N),$$

is a relevant choice from theoretical and numerical point of view.

### 3.3 Theoretical results and simulations

#### 3.3.1 Main result

Let  $v$  a given real sequence and  $r \in \mathbb{R}$ . Here and in the sequel, we write  $v \sim (k^r)_{k \geq 1}$ , if we can find  $d_0$  and  $d_1$  positive constants verifying:  $d_0 k^r \leq v_k \leq d_1 k^r$  for all  $k \in \mathbb{N}$ .

From now, we assume a polynomial decay for the eigenvalues of the operator:  $(b_k)_{k \geq 1} \sim (k^{-\beta})_{k \geq 1}$  for some  $\beta \geq 0$ . The problem is said to be mildly ill-posed.

Define:

$$(3.3.1) \quad R_\alpha(\theta, N) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^N b_k^{-2} + (1 + \alpha)U_0(N).$$

The two associated oracle bandwidths are

$$(3.3.2) \quad \bar{N}_0 = \operatorname{arg inf}_N R_\alpha(\theta, N) \quad \text{and} \quad \tilde{N}_0 = \operatorname{arg inf}_{N \leq M} R_\alpha(\theta, N).$$

The proof of the following theorem is given in Section 3.5.

**Theorem 3.3.1** *Let  $\theta^*$  the estimator defined in (3.2.12) and (3.2.13). Assume that  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (k^{-\beta})_{k \in \mathbb{N}}$  for some  $\beta > 0$ . There exist  $C_1$  and  $\gamma_0 > 0$  such that  $\forall \gamma \in (0, \gamma_0]$  and  $\alpha > 1$ :*

$$(3.3.3) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 &\leq (1 + \varphi_\sigma(\gamma)) \inf_N R_\alpha(\theta, N) + C_1 \frac{\epsilon^2}{\gamma^{4\beta+1}} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|\theta\|^2 \right)^{4\beta+1} \\ &+ \frac{C_1 \epsilon^2}{(\alpha - 1)_+} + \Gamma(\theta) + \Omega, \end{aligned}$$



where  $\Omega = c_0 M_1 \exp(-\log^{1+\tau} 1/\sigma)$  for some positive constant  $c_0$ ,  $\varphi_\sigma(\gamma)$  vanishes as  $\gamma, \sigma \rightarrow 0$  and

$$(3.3.4) \quad \Gamma(\theta) = \sum_{k=M_0}^{M_0 \vee \bar{N}_0} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=M_0}^{M_0 \vee \bar{N}_0} b_k^{-2} + (1 + \alpha)[U_0(\bar{N}_0 \vee M_0) - U_0(M_0)].$$

By convention  $\sum_a^a = 0$  and  $a \vee b = \max(a, b)$  for all  $a, b > 0$ .

Our results always hold with polynomial hypotheses of Cavalier and Golubev [17]. However, for the sake of convenience, we prefer to use simpler assumptions concerning  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

The risk of our estimator is close to the best possible one (the oracle). This result differs from Theorem 1 of Cavalier and Golubev [17] by some residual terms depending of  $\sigma$  and on the norm of  $f$ . For large values of  $\|\theta\|$ , the quality of estimation will then be rather bad. This is not really linked to the risk hull method. Such a residual term appears in all the situations where noisy measurements of the operator are involved. We refer for instance to the proofs of Cavalier and Hengartner [19], Efromovich and Koltchinskii [29], Hoffmann and Reiß [40] or Marteau [54]. This phenomenon is in fact rather simple. When  $\sigma = 0$ , we use the data

$$(3.3.5) \quad b_k^{-1} y_k = \theta_k + \epsilon b_k^{-1} \xi_k,$$

in order to estimate each coefficient  $\theta_k$ . With noise in the operator, we use instead:

$$\begin{aligned} x_k^{-1} y_k &= x_k^{-1} (b_k \theta_k + \epsilon \xi_k), \\ &= a_k \theta_k + \epsilon x_k^{-1} \xi_k, \\ &= \theta_k + \epsilon x_k^{-1} \xi_k + (a_k - 1) \theta_k, \end{aligned}$$

where  $a_k = x_k^{-1} b_k$ . With a large probability, Lemma 3.4.5 provides  $(a_k - 1) \simeq \sigma b_k^{-1} \eta_k$  and  $x_k \simeq b_k$ . Therefore, from a heuristic point of view:

$$(3.3.6) \quad x_k^{-1} y_k \simeq \theta_k + \epsilon b_k^{-1} \xi_k + \sigma b_k^{-1} \eta_k \theta_k, \quad \forall k \leq M.$$

The variance of  $x_k^{-1} y_k$  is then of order  $\epsilon^2 b_k^{-2} + \sigma^2 \theta_k^2 b_k^{-2}$ . It increases with the norm of  $\theta$ . Noise in the operator add a new perturbation in the data with variance depending on  $\|\theta\|$ . The associated error term is not negligible. This will be illustrated via numerical simulations.

The terms  $\Omega$  and  $\Gamma(\theta)$  are usually associated to regularization with a noisy operator. They were introduced in Cavalier and Hengartner [19]. The term  $\Gamma(\theta)$  corresponds to the residual of  $R_\alpha(\theta, \bar{N}_0)$  truncated at order  $M$ . It vanishes if  $M_0 > \bar{N}_0$ .

### 3.3.2 Numerical simulations

This section illustrates Inequality (3.3.3) via numerical simulations. Consider the family of functions:

$$\theta_k^a = \frac{a \times 0.1}{1 + (k/W)^m}, \quad k \in \mathbb{N},$$

where  $a$  is called amplitude,  $W$  bandwidth and  $m$  smoothness. This family does not depend of  $\epsilon$ . Indeed, our aim is to study the quality of estimation compared to  $\|\theta\|$  and the ratio  $\sigma/\epsilon$ . The family considered in Cavalier and Golubev [17] (i.e. depending on  $\epsilon$ ) will not be convenient.

From now, fix  $W = m = 6$ . The results for different smoothness and amplitude are essentially the same and will not be reproduced here. The quality of an estimator is measured by its oracle efficiency:

$$(3.3.7) \quad r_\epsilon(\theta, \theta^*) = \frac{\inf_N \mathbb{E}_\theta \|\theta^N - \theta\|^2}{\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2} = \frac{\mathbb{E}_\theta \|\theta^{N_0} - \theta\|^2}{\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2}.$$

Let  $\tilde{\theta}$  the estimator of Cavalier and Golubev [17] and  $\tilde{N}$  the associated bandwidth. We are interested by the comparison between  $r_\epsilon(\theta, \theta^*)$  and  $r_\epsilon(\theta, \tilde{\theta})$ . We also compare the mean bandwidths  $\mathbb{E}_\theta[N^*]$  and  $\mathbb{E}_\theta[\tilde{N}]$  to the oracle  $N_0$ . These quantities are computed via the Monte-Carlo method with 10 000 replications.

The relation between the oracle efficiency of  $\theta^*$  and  $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|\theta\|^2$  is also rather interesting. This term is associated to the noise in the operator. In (3.2.12), we use  $x_k^{-1}$  instead of  $b_k^{-1}$  in order to estimate each coefficient  $\theta_k$ . It is possible to prove that the associated residual error is linked to:

$$(3.3.8) \quad d_\epsilon(x, \theta) = \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 - \mathbb{E}_\theta \|\hat{\theta}^* - \theta\|^2,$$

where

$$\hat{\theta}^* = \sum_{k=1}^{N^*} b_k^{-1} y_k \phi_k,$$

and  $N^*$  is defined in (3.2.13).

We only consider the RHM efficiency. A comparison with the URE method has been presented in Cavalier and Golubev [17]. This last procedure exhibits bad numerical behavior compared to the RHM method. From now, fix  $\epsilon = 0.01$  and consider two different level of noise in the eigenvalues:  $\sigma = \epsilon/10$  and  $\sigma = \epsilon$ . Each case is studied with  $\beta = 1$  and  $\beta = 2$ . Results are presented in Figures 3.1-3.3 for the case  $\sigma = \epsilon/10$  and in Figures 3.4-3.6 for the case  $\sigma = \epsilon$ .

When the noise in the operator is significantly small ( $\sigma = \epsilon/10$ ), the numerical behavior of the RHM method is rather close to the case  $\sigma = 0$  for  $a \in \{0 \dots 50\}$  (Figure 3.1). The bandwidth choice is unaffected (Figure 3.2). The term  $d_\epsilon(x, \theta)$  has no influence on the quality of estimation. It is clearly negligible compared to the oracle risk (Figure 3.3).

A surprising outcome concerns the quality of estimation for  $\sigma > 0$ . It is sometimes better than for the case  $\sigma = 0$ . As proved in Lemma 3.4.3, the penalty  $U_0(N, x)$  may be smaller than  $U_0(N)$ . In this case, the chosen bandwidth is closer of  $N_0$  (see Figure 3.2). The oracle efficiency is improved since the residual term  $d_\epsilon(x, \theta)$  is negligible (see Figure 3).

Results for the case  $\sigma = \epsilon$  are rather different. If  $a$  is too large (or equivalently  $\|\theta\|$ ), the quality of estimation is really affected by the noise  $\sigma$  (Figure 3.4). Two different explanations are available. First, replacing  $b_k^{-1}$  by  $x_k^{-1}$  affects the risk when  $k$  is large. The quantity  $d_\epsilon(x, \theta)$ , associated to the residual term  $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|\theta\|^2$  in (3.3.3), is not negligible for large values of  $a$ . It is of order of the optimal risk: see Figure 6.

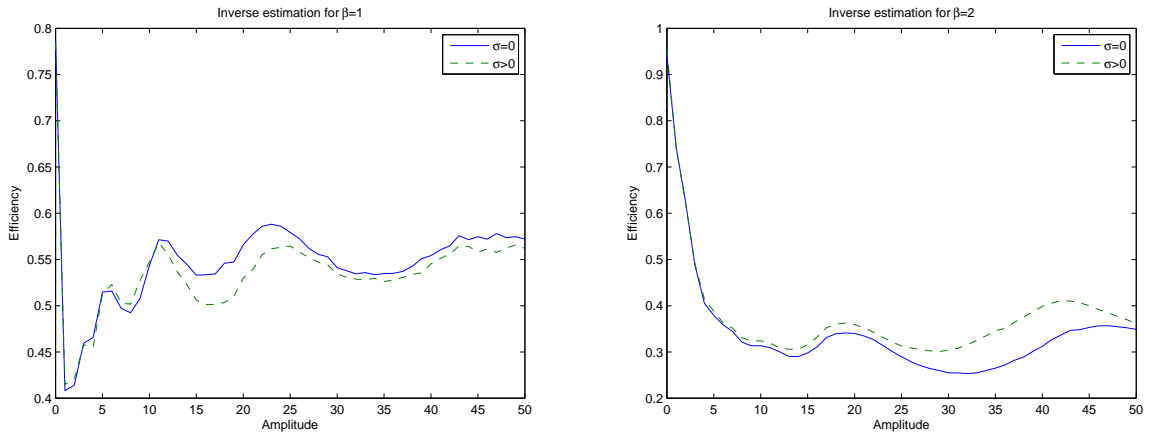


FIG. 3.1 – Efficiency of the RHM method for  $\sigma = \epsilon/10$

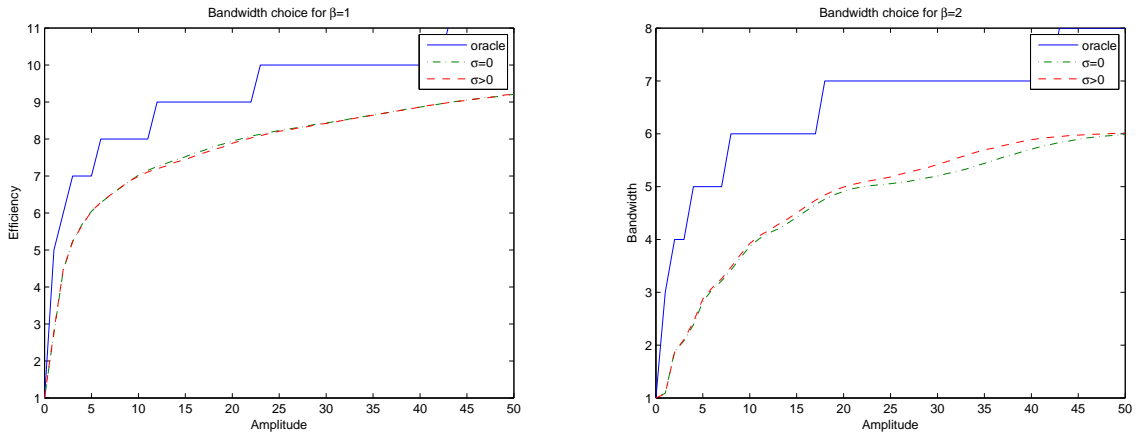


FIG. 3.2 – Choice of bandwidth for  $\sigma = \epsilon/10$

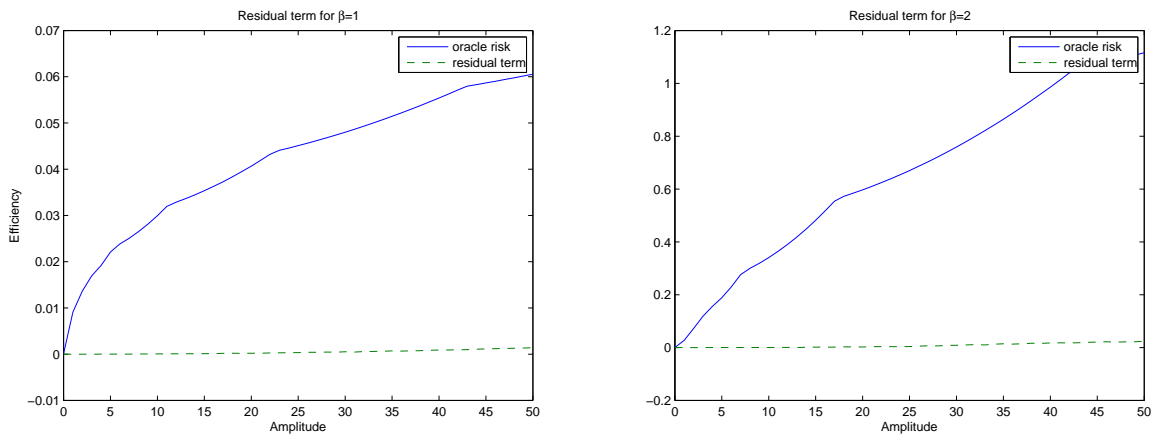


FIG. 3.3 – Behavior of the residual term for  $\sigma = \epsilon/10$

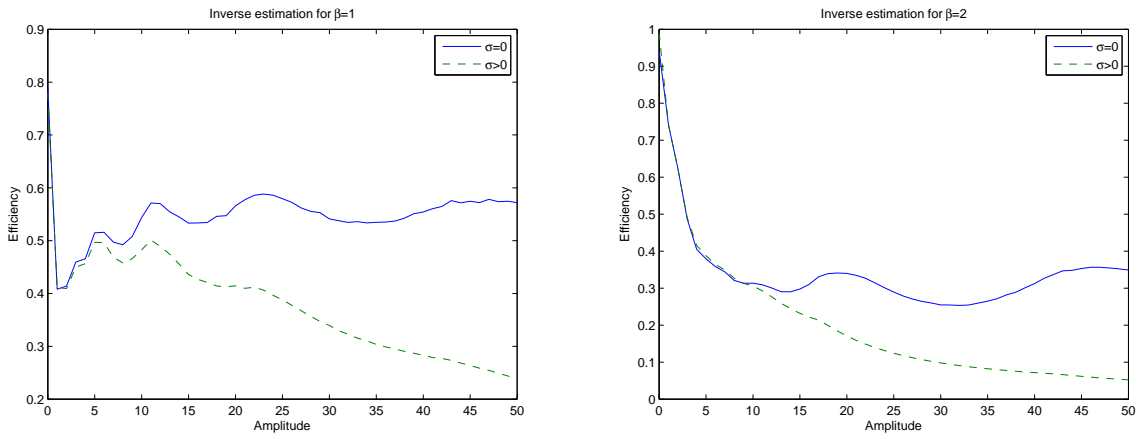


FIG. 3.4 – Efficiency of the RHM method for  $\sigma = \epsilon$

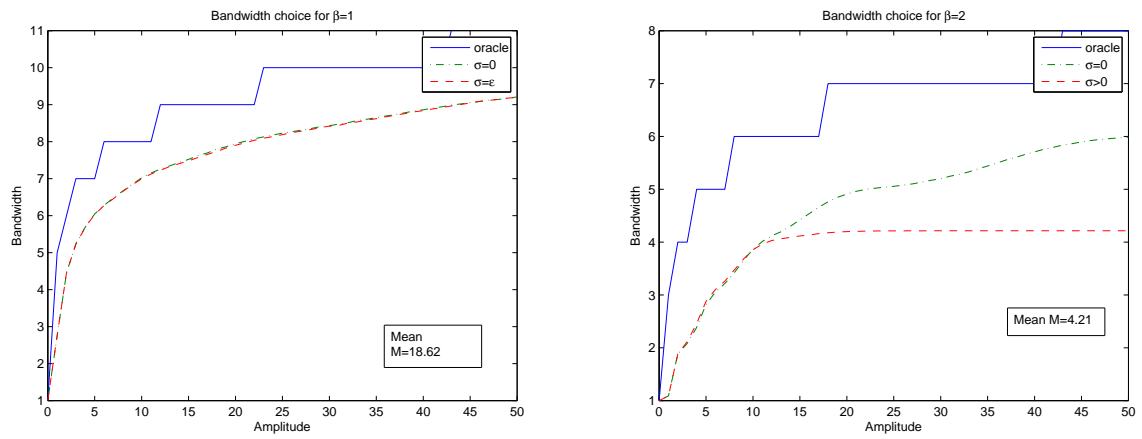


FIG. 3.5 – Choice of bandwidth for  $\sigma = \epsilon$

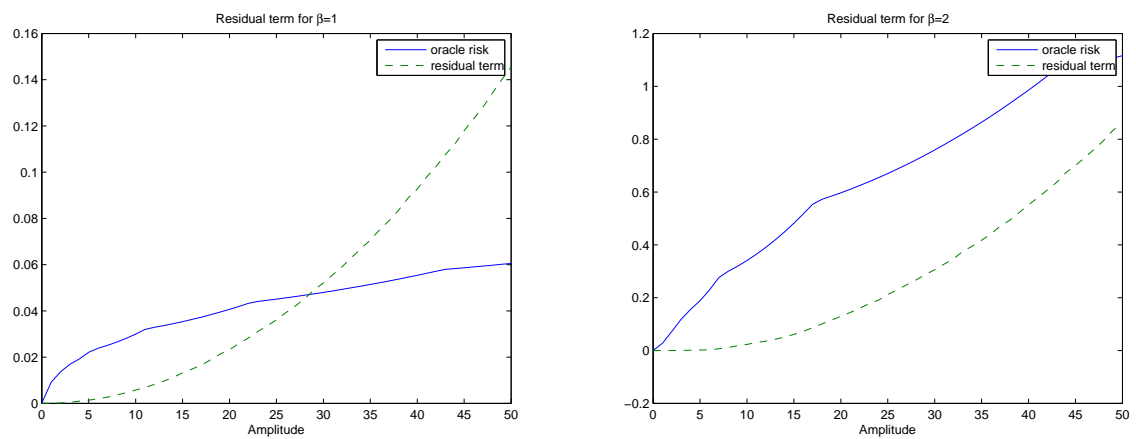


FIG. 3.6 – Behavior of the residual term for  $\sigma = \epsilon$

The second problem is related to the stopping rule  $M$ . It is, in the case  $\beta = 2$ , much smaller than the oracle bandwidth  $N_0$  for large values of  $\|\theta\|$  (Figure 3.5). Since  $N^* \leq M$ , the number of estimated coefficients of  $\theta$  is not sufficient. The corresponding error is associated to  $\Gamma(\theta)$  in Theorem 3.3.1. This explain in part why we do not consider estimation for larger value of  $\sigma$  than 0.01. Never more than 4 or 5 coefficients are estimated. It make no sense to study the quality of the RHM method in this case. All the procedures will produce more or less similar results.

### 3.3.3 Conclusion

Control of the norm of  $\theta$  is crucial when dealing with noisy operator. This can be explained in part by (3.3.6). The noise add a new perturbation in the observations. It would be interesting to develop methods taking into account this particularity.

The term  $\Gamma(\theta)$  is also rather important. It is related to the respective values of  $M$  and  $N_0$ . If  $N_0$  is too large compared to  $M$ , we cannot estimate a sufficient number of coefficients  $\theta_k$ . Fortunately, in most cases,  $N_0/M \rightarrow 0$  as  $\epsilon, \sigma \rightarrow 0$ . Regularization with noise in the operator is clearly asymptotic. This is rather different than for the case  $\sigma = 0$  where the quality of estimation is independent of  $\epsilon$ . All this properties are not linked to the RHM method but rather to estimation with noise in the operator.

We conclude this chapter with a short discussion on the parameter  $\alpha$ . In Cavalier and Golubev [17], it seems that the condition  $\alpha > 1$  is too restrictive. Indeed, acceptable bounds of the risk are available for  $\sigma = 0$  and  $0 < \alpha \leq 1$ . For  $\sigma > 0$ , the setting is a little bit different. In this case, the condition  $\alpha > 1$  enables us to control the difference between  $U_0(N)$  and  $U_0(N, x)$  (see Lemma 3.4.3 and Inequality (3.5.13)). The noisy penalty is large enough to contain the stochastic term in  $V_\alpha(x, y, N)$ . The RHM procedure is stable.

## 3.4 Technical lemmas

From now, we consider  $\Omega = O(M_1 \exp[-\log^{1+\tau} 1/\sigma])$  as  $\sigma \rightarrow 0$ . Therefore, we often write  $\Omega + \Omega = \Omega$ . The resulting constant  $c_0$  in Theorem 3.3.1 is the sum of all the constants that appear in the proof. For all  $N \in \mathbb{N}$ , introduce also the term:

$$(3.4.1) \quad \Delta(N) = \sup_{k=1 \dots N} \epsilon^2 b_k^{-2},$$

and the event:

$$(3.4.2) \quad \mathcal{B} = \bigcap_{k=1}^M \{\sigma |b_k^{-1} \zeta_k| \leq \nu \sqrt{2} - 1\},$$

where  $1/\sqrt{2} < \nu < 1$ . On this event,  $a_k = x_k^{-1} b_k \simeq 1$  uniformly in  $k \leq M$ . Moreover, Lemma 3.4.5 provides  $P(\mathcal{B}^c) \leq \Omega$ . Thus,  $x_k$  can easily be controlled with a large probability for  $k \leq M$ .

**Lemma 3.4.1** *Let  $\theta^*$  defined in (3.2.12) and (3.2.13). There exists  $\rho_\sigma \rightarrow 0$  as  $\sigma \rightarrow 0$  verifying:*

$$\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \leq (1 + \rho_\sigma) \mathbb{E}_\theta l(\theta, N^*) + c_\sigma^2 \|\theta\|^2 \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \mathbb{E}_\theta \Delta(N^*) + \Omega,$$

where  $c > 0$ ,  $c_\sigma = \log^{1+\tau} 1/\sigma$  and  $l(\theta, N^*)$  is defined in (3.2.4).

PROOF. For all  $k \in \mathbb{N}$ , set  $a_k = x_k^{-1}b_k$ . By simple algebra:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 &= \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} (\theta_k^* - \theta_k)^2 \\
&= \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} (x_k^{-1}y_k - \theta_k)^2 + \mathbb{E}_\theta \sum_{k=N^*+1}^{+\infty} \theta_k^2, \\
&= \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} (a_k\theta_k + \epsilon x_k^{-1}\xi_k - \theta_k)^2 + \mathbb{E}_\theta \sum_{k=N^*+1}^{+\infty} \theta_k^2, \\
&= \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} [\theta_k^2(1 - a_k)^2 + \epsilon^2 x_k^{-2} \xi_k^2 + 2\epsilon(a_k - 1)\theta_k x_k^{-1} \xi_k] + \mathbb{E}_\theta \sum_{k>N^*} \theta_k^2.
\end{aligned}$$

Using (3.2.4),

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 - \mathbb{E}_\theta l(\theta, N^*)| \\
&\leq \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} \theta_k^2 (1 - a_k)^2 + \left| \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} [\epsilon^2 b_k^{-2} (a_k^2 - 1) \xi_k^2 + 2\epsilon(1 - a_k) \theta_k x_k^{-1} \xi_k] \right|, \\
(3.4.3) \quad &\leq A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}$$

Begin with the study of  $A_1$ :

$$(1 - a_k)^2 \mathbf{1}_B = \frac{(\sigma b_k^{-1} \zeta_k)^2}{(1 + \sigma b_k^{-1} \zeta_k)^2} \mathbf{1}_B \leq c \sigma^2 b_k^{-2} \zeta_k^2 \mathbf{1}_B.$$

Therefore, using Lemma 3.4.5:

$$\begin{aligned}
A_1 &\triangleq \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} \theta_k^2 (1 - a_k)^2 \leq c \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} \theta_k^2 \frac{\sigma^2}{b_k^2} \zeta_k^2 + \Omega, \\
&\leq c \mathbb{E}_\theta \sup_{i=1 \dots N^*} \frac{\sigma^2}{b_i^2} \zeta_i^2 \times \sum_{k=1}^{N^*} \theta_k^2 + \Omega, \\
(3.4.4) \quad &\leq c \|\theta\|^2 c_\sigma \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \mathbb{E}_\theta \Delta(N^*) + \Omega,
\end{aligned}$$

where  $c_\sigma = \log^{1+\tau} 1/\sigma$ . Indeed, a large deviation inequality provides:

$$(3.4.5) \quad P\left(\sup_{i=1 \dots N^*} \zeta_i^2 > c_\sigma\right) \leq M_1 P(|\zeta_1| > \sqrt{c_\sigma}) + \Omega \leq \Omega.$$

By the same way, using (ii) of Lemma 3.4.5:

$$\begin{aligned}
A_2 &\triangleq \left| \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} \epsilon^2 b_k^{-2} (a_k^2 - 1) \xi_k^2 \right|, \\
&\leq \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^{N^*} \epsilon^2 b_k^{-2} \xi_k^2 \left| \left( -2 \frac{\sigma}{b_k} \zeta_k + 6 \frac{\sigma^2}{b_k^2} \zeta_k^2 \nu_{k,2} \right) \right| \right], \\
&\leq c \frac{\sqrt{c_\sigma}}{\log^{1+\tau/2} 1/\sigma} \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} \epsilon^2 b_k^{-2} \xi_k^2 + \Omega, \\
(3.4.6) \quad &\leq c (\log^{-1/2} \frac{1}{\sigma}) \mathbb{E}_\theta l(\theta, N^*) + \Omega.
\end{aligned}$$

To finish the proof, apply the elementary inequality  $2ab < Ba^2 + B^{-1}b^2$  to:

$$A_3 \triangleq 2\epsilon |\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} (1 - a_k) \theta_k x_k^{-1} \xi_k| \leq BA_1 + cB^{-1} \mathbb{E}_\theta l(\theta, N^*) + \Omega.$$

Using (3.4.3)-(3.4.6), we eventually obtain the lemma with a good choice of  $B$ .  $\square$

**Lemma 3.4.2** *Assume  $(b_k)_{k \geq 1} \sim (k^{-\beta})_{k \geq 1}$  for some  $\beta \geq 0$ . Let  $V_\mu(\theta, N^*)$  and  $\Delta(N^*)$  the quantities defined in (3.2.9) and (3.4.1). For all  $B > 0$  and  $\mu > 0$ ,*

$$\mathbb{E}_\theta \Delta(N^*) \leq B \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, N^*) + c\epsilon^2 B^{-2\beta}.$$

PROOF. Let  $B > 0$  be fixed. Using Inequality (20) of Cavalier et al. [16], we obtain:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta \Delta(N^*) &= \mathbb{E}_\theta \sup_{k=1..N^*} \epsilon^2 b_k^{-2}, \\
&= \mathbb{E}_\theta \sup_{k=1..N^*} \epsilon^2 b_k^{-2} \mathbf{1}_{\{B^{-1} \sup_{k \leq N^*} \epsilon^2 b_k^{-2} < \sum_{k=1}^{N^*} \epsilon^2 b_k^{-2}\}} \\
&\quad + \mathbb{E}_\theta \sup_{k=1..N^*} \epsilon^2 b_k^{-2} \mathbf{1}_{\{B^{-1} \sup_{k \leq N^*} \epsilon^2 b_k^{-2} \geq \sum_{k=1}^{N^*} \epsilon^2 b_k^{-2}\}} \\
&\leq B \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} b_k^{-2} + c\epsilon^2 B^{-2\beta}, \\
&\leq B \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, N^*) + c\epsilon^2 B^{-2\beta}.
\end{aligned}$$

$\square$

**Lemma 3.4.3** *There exists  $1 > g_\sigma > 0$  such that,*

$$\mathbb{E} \sup_{k \leq M} [U_0(k) - (1 + g_\sigma) U_0(k, x)] \leq C\epsilon^2 + \Omega,$$

and  $g_\sigma \rightarrow 0$  as  $\sigma \rightarrow 0$ .

PROOF. Apply Lemma 1 of Cavalier and Golubev [17] to  $U_0(k, x)$ , conditioning on the sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$ . There exists  $k_0 > 0$  independent of  $\epsilon$  and  $\sigma$ , such that for all  $M > k > k_0$ ,

$$(3.4.7) \quad \frac{U_0(k, x)}{\sqrt{2\tilde{\Sigma}_k}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \geq \sqrt{\log \left( \frac{\tilde{\Sigma}_k}{2\pi\epsilon^4} \right)} \mathbf{1}_{\mathcal{B}},$$

where  $\tilde{\Sigma}_k = \epsilon^4 \sum_{s=1}^k x_s^{-4}$ . Indeed, on the event  $\mathcal{B}$  defined in (3.4.2),  $x_k \simeq b_k$  for all  $k \leq M$ . The polynomial hypotheses of Cavalier and Golubev [17] are satisfied by the sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$ . One can directly apply Lemma 1 of the related paper.

Define also  $\Sigma_k = \epsilon^4 \sum_{s=1}^k b_s^{-4}$  and  $K_k = \eta_k / \sqrt{2\Sigma_k}$ . Let  $k \geq k_0$  be fixed. We first show that on the event  $\mathcal{B}$ ,  $U_0(k) < 2U_0(k, x)$ . Remark that:

$$\begin{aligned} U_0(k) < 2U_0(k, x) \mathbf{1}_{\mathcal{B}} &\Leftrightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \mathbb{E}_x \eta_k \mathbf{1}_{\{\eta_k \geq 2U_0(k, x)\}} < \epsilon^2, \\ &\Leftrightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \mathbb{E}_x K_k \mathbf{1}_{\{K_k \geq \frac{2U_0(k, x)}{\sqrt{2\Sigma_k}}\}} < \frac{\epsilon^2}{\sqrt{2\Sigma_k}}. \end{aligned}$$

Using (3.4.7) and Lemma 3.4.5, on the event  $\mathcal{B}$ ,

$$(3.4.8) \quad \frac{2U_0(k, x)}{\sqrt{2\Sigma_k}} = \frac{2U_0(k, x)}{\sqrt{2\tilde{\Sigma}_k}} \frac{\sqrt{\tilde{\Sigma}_k}}{\sqrt{\Sigma_k}} \geq \frac{1}{\nu^2} \sqrt{\log \left( \frac{\tilde{\Sigma}_k}{2\pi\epsilon^4} \right)} \triangleq u_1(k, x).$$

It follows from the above equation that it suffices to show:

$$(3.4.9) \quad \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \mathbb{E}_x K_k \mathbf{1}_{\{K_k \geq u_1(k, x)\}} < \frac{\epsilon^2}{\sqrt{2\Sigma_k}}.$$

Let  $t > 0$ , possibly depending on the sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$ . Integrating by parts:

$$(3.4.10) \quad \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \mathbb{E}_x K_k \mathbf{1}_{\{K_k \geq t\}} = \left[ t P_x(K_k \geq t) + \int_t^{+\infty} P_x(K_k > u) du \right] \mathbf{1}_{\mathcal{B}},$$

where  $P_x$  denotes the conditional probability on the sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$ . Each  $K_k$  can be approximated by a standard Gaussian random variable on small intervals. Indeed, for all  $m > 0$ , conditioning on the sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$ , there exists a measure  $P_k^m$  verifying:

$$\max_{t_0 \leq u \leq t_1} |P_k^m(u) - \phi(u)| \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \leq \frac{C\epsilon^2 t_1^2}{\sqrt{2k\Sigma_k}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}},$$

where  $\phi$  is the density of a standard Gaussian random variable and

$$|P_x(K_k > u) - P_k^m(u)| \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \leq \frac{C}{k^{m/2}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}}.$$



See Cavalier and Golubev [17] for more details. Using (3.4.10), for all  $t_1 \geq t$ ,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_x K_k \mathbf{1}_{\{K_k \geq t\}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \\
&= \left[ t P_x(K_k \geq t) + \int_t^{t_1} P_x(K_k > u) du + \int_{t_1}^{+\infty} P_x(K_k > u) du \right] \mathbf{1}_{\mathcal{B}}, \\
&\leq \left[ t P_k^m(t) + \int_t^{t_1} P_k^m(u) du + \int_{t_1}^{+\infty} P_x(K_k > u) du + \frac{C t_1}{k^{m/2}} \right] \mathbf{1}_{\mathcal{B}}, \\
(3.4.11) \quad &\leq \left[ t \phi(t) + \int_t^{+\infty} \phi(u) du + t_1 \max_{t \leq u \leq t_1} |P_k^m(u) - \phi(u)| \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{+\infty} P_x(K_k > u) du + \frac{C t_1}{k^{m/2}} \right] \mathbf{1}_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Replacing  $t$  by  $u_1(k, x)$ , and integrating by parts,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} K_k \mathbf{1}_{\{K_k \geq u_1(k, x)\}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}} &\leq \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u_1(k, x)^2/2} + \int_{t_1}^{+\infty} P(K_k > u) du + \right. \\
&\quad \left. t_1 \max_{u_1(k, x) \leq u \leq t_1} |P_k^m(u) - \phi(u)| + \frac{C t_1}{k^{m/2}} \right] \mathbf{1}_{\mathcal{B}}, \\
&= T_1 + T_2 + T_3 + T_4.
\end{aligned}$$

Begin with the majoration of  $T_1$ :

$$(3.4.12) \quad T_1 \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u_1(k, x)^2/2} \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \leq c \frac{\epsilon^{4/2\nu^4}}{\Sigma_k^{1/2\nu^4}} = o\left(\frac{\epsilon^2}{\sqrt{2\Sigma_k}}\right), \text{ as } k \rightarrow +\infty.$$

Indeed  $1/\sqrt{2} < \nu < 1$ . For the study of  $T_2$ , write

$$K_k = \sum_{s=1}^k d_s^2 (\xi_s^2 - 1),$$

where  $d_s^2 = \sigma_s^2 / \sqrt{2\Sigma_k}$ . A large deviation inequality (see for example Lemma 3 of Cavalier and Tsybakov [21]), provides

$$\begin{aligned}
P_x(K_k > u) &\leq \exp\left[-\frac{u^2}{4(\sum_{s=1}^k d_s^4 + u \max_{s=1..k} d_s^2)}\right], \\
&= \exp\left[-\frac{u^2}{2 + 4u \frac{\sigma_k^2}{\sqrt{2\Sigma_k}}}\right], \\
&\leq \exp(-u/6),
\end{aligned}$$

for all  $u > 1$ . Choose  $t_1 = (6u_1(k, x)^2 \wedge 1)$  to obtain:

$$(3.4.13) \quad T_2 \leq \int_{6u_1(k, x)^2}^{+\infty} e^{-\frac{u}{6}} du \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \leq C \exp[-u_1(k, x)^2] = o\left(\frac{\epsilon^2}{\sqrt{2\Sigma_k}}\right), \text{ as } k \rightarrow +\infty.$$

Indeed, the behavior of the eigenvalues ensures:

$$(3.4.14) \quad \sqrt{\log\left(\frac{k}{2\pi}\right)} \leq u_1(k, x) \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \leq C\sqrt{\log(k)}.$$

With this choice of  $t_1$  and (3.4.14), we can easily obtain a bound for the remainders terms  $T_3$  and  $T_4$ :

$$(3.4.15) \quad T_3 \stackrel{\Delta}{=} t_1 \max_{t \leq u \leq t_1} |P_k^m(u) - \phi(u)| \mathbf{1}_{\mathcal{B}} \leq \frac{C\epsilon^2 u_1(k, x)^6}{\sqrt{2k\Sigma_k}} \mathbf{1}_{\mathcal{B}} = o\left(\frac{\epsilon^2}{\sqrt{2\Sigma_k}}\right), \text{ as } k \rightarrow +\infty.$$

To finish, choosing large enough  $m$ ,

$$(3.4.16) \quad T_4 = o\left(\frac{\epsilon^2}{\sqrt{2\Sigma_k}}\right), \text{ as } k \rightarrow +\infty.$$

Thus, on the event  $\mathcal{B}$ , we can find  $k_1$  independent of  $\epsilon$  and  $\sigma$  verifying:

$$U_0(k, x) \mathbf{1}_{\mathcal{B}} > \frac{U_0(k)}{2}, \forall k \geq k_1.$$

Now, let  $k \leq k_1$ :

$$U_0(k) \leq C\epsilon^2.$$

Indeed,  $k_1$  is independent of  $\epsilon$ . Then remark:

$$(3.4.17) \quad \mathbb{E} \sup_{k \leq M} [U_0(k) - 2U_0(k, x)] \mathbf{1}_{\mathcal{B}^c} \leq \sup_{k \leq M} [U_0(k)] \times P(\mathcal{B}^c) \leq \Omega.$$

Indeed, looking at the proof of Lemma 1 of Cavalier and Golubev [17], we can find a convenient bound for  $U_0(k)$ ,  $k \leq M$ . Using the approximation  $M \simeq \sigma^{-\frac{2}{2\beta+1}}$ , it is then easy to see that (3.4.17) is satisfied.

The lemma is proved for  $g_\sigma = 1$ . Nevertheless, the proof can easily be improved. Indeed, using Taylor expansion of Lemma 3.4.5,  $\tilde{\Sigma}_k/\Sigma_k \rightarrow 1$ , as  $\sigma \rightarrow 0$ . Using this property in (3.4.8) and following the same methods, one obtain the lemma by choosing an appropriate  $g_\sigma$ .

□

**Lemma 3.4.4** *For all integer  $N$ , define:*

$$(3.4.18) \quad g(N, y) = \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^N (1 - a_k^2) b_k^{-2} y_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^N (a_k^2 - 1) b_k^{-2} \right] + (1 + \alpha) \mathbb{E}\{U_0(N, x) - U_0(N)\}.$$

Let  $\bar{N}_0$  and  $\tilde{N}_0$  defined in (3.3.2). There exists  $\delta_\sigma \rightarrow 0$  as  $\sigma \rightarrow 0$  and  $C > 0$  such that, for all positive  $\gamma$ :

$$\mathbb{E}_\theta g(\tilde{N}_0, y) \leq (\delta_\sigma + \gamma) R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) + \gamma R_\alpha(\theta, \bar{N}_0) + \frac{C\sigma_1^2}{\gamma^{4\beta+1}} \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \|\theta\|\right)^{4\beta+1} + C\epsilon^2 + \Omega.$$

PROOF. With Lemma 3.4.5 and Inequality (4.55) of Cavalier and Golubev [17]:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{\tilde{N}_0} (1 - a_k^2) b_k^{-2} y_k^2 &\leq \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{\tilde{N}_0} \frac{\sigma}{b_k} \zeta_k b_k^{-2} y_k^2, \\
&\leq c(\log^{-1} \frac{1}{\sigma}) \times \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{\tilde{N}_0} \epsilon^2 b_k^{-2} + \epsilon \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{\tilde{N}_0} b_k^{-1} \zeta_k \theta_k \times \frac{\sigma}{\epsilon} \theta_k + \Omega, \\
&\leq (\delta_\sigma + \gamma) R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) + \gamma R_\alpha(\theta, \bar{N}_0) + \frac{C\sigma_1^2}{\gamma^{4\beta+1}} \left( \frac{\sigma}{\epsilon} \|\theta\| \right)^{4\beta+1} + \Omega,
\end{aligned}$$

with  $\delta_\sigma = \log^{-1} 1/\sigma$ . Then, with probability  $1 - \Omega$ :

$$(a_k^2 - 1) \leq C \log^{-2(1+\tau)} \frac{1}{\sigma}.$$

It remain to apply Lemma 3.4.3 to complete the proof. □

The following lemma was introduced in Cavalier and Hengartner [19].

**Lemma 3.4.5** *For all  $k \in \mathbb{N}$ , set  $a_k = x_k^{-1} b_k$  and consider the Taylor expansions:*

$$(i) \quad a_k = 1 - \frac{\sigma}{b_k} \zeta_k + \frac{\sigma^2}{b_k^2} \zeta_k^2 \nu_{k,1},$$

$$(ii) \quad a_k^2 = 1 - 2 \frac{\sigma}{b_k} \zeta_k + 6 \frac{\sigma^2}{b_k^2} \zeta_k^2 \nu_{k,2},$$

where  $\nu_{k,1}$  and  $\nu_{k,2}$  are random variables. On the event  $\mathcal{B}$ ,  $\nu_{k,1}$  and  $\nu_{k,2}$  are uniformly bounded. Moreover:

$$P(\mathcal{B}^c) \leq \Omega.$$

PROOF. Proof is given in Cavalier and Hengartner [19]. □

### 3.5 Proof of Theorem 3.3.1

As proved in Theorem 2 of Cavalier and Golubev [17], the quantity:

$$V_\mu(\theta, N) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^N b_k^{-2} + (1 + \mu) U_0(N) + \frac{C^* \sigma_1^2}{\mu},$$

is a risk hull, i.e  $\forall \mu > 0$ ,

$$\mathbb{E}_\theta \sup_N [l(\theta, N) - V_\mu(\theta, N)] \leq 0.$$

In particular:

$$(3.5.1) \quad \mathbb{E}_\theta l(\theta, N^*) \leq \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, N^*).$$

Moreover, using the definition of  $N^*$ :

$$(3.5.2) \quad V_\alpha(x, y, N^*) \leq V_\alpha(x, y, N), \quad \forall N \leq M.$$

The main idea of the proof consists in writing  $V_\alpha(x, y, N^*)$  in terms of  $V_\mu(\theta, N^*)$  and then using (3.5.1), (3.5.2) and Lemma 3.4.1.

Let  $N^*$  defined in (3.2.13),  $\alpha > 1$  and  $\mu > 0$ .

$$(3.5.3) \quad \begin{aligned} & V_\alpha(x, y, N^*) - V_\mu(\theta, N^*) \\ &= -\sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} y_k^2 + 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} + (1 + \alpha)U_0(N^*, x) - \sum_{k > N^*} \theta_k^2 - \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^*} b_k^{-2} \\ & \quad - (1 + \mu)U_0(N^*) - \frac{C^* \sigma_1^2}{\mu}, \\ &= -\sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} y_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} - \sum_{k > N^*} \theta_k^2 - \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^*} b_k^{-2} (1 - a_k^2) - \frac{C^* \sigma_1^2}{\mu} \\ & \quad + [(1 + \alpha)U_0(N^*, x) - (1 + \mu)U_0(N^*)], \end{aligned}$$

where  $a_k = b_k/x_k$ . Remark that:

$$(3.5.4) \quad \begin{aligned} & -\sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} y_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} - \sum_{k > N^*} \theta_k^2 \\ &= -\epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - 2 \sum_{k=1}^{N^*} \theta_k x_k^{-2} b_k \epsilon \xi_k - \sum_{k=1}^{N^*} a_k^2 \theta_k^2 - \sum_{k > N^*} \theta_k^2, \\ &= -\epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - 2\epsilon \sum_{k=1}^{N^*} \theta_k x_k^{-2} b_k \xi_k - \|\theta\|^2 - \sum_{k=1}^{N^*} (a_k^2 - 1) \theta_k^2. \end{aligned}$$

We now use inequality (ii) of Lemma 3.4.5 in order to bound the terms containing the quantities  $a_k$  in (3.5.3) and (3.5.4). These terms represent the error made when using  $x_k^{-2}$  instead of  $b_k^{-2}$ . Applying (3.4.5), we obtain:

$$(3.5.5) \quad \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} (a_k^2 - 1) \theta_k^2 \leq c_\sigma \|\theta\|^2 \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \mathbb{E}_\theta \Delta(N^*) - 2\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} \sigma b_k^{-1} \zeta_k \theta_k^2 + \Omega,$$

where  $c_\sigma = \log^{1+\tau} 1/\sigma$ . Moreover,

$$(3.5.6) \quad \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} b_k^{-2} (1 - a_k^2) \leq \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} \frac{1 - a_k^2}{a_k^2} \leq \phi_\sigma \mathbb{E}_\theta V_\alpha(x, y, N^*) + \Omega,$$

where  $\phi_\sigma \rightarrow 0$  as  $\sigma \rightarrow 0$ . Indeed, Lemma 3.4.5 and (3.4.5) provide that  $a_k \rightarrow 1$  uniformly

in  $k \leq M$  on the event  $\mathcal{B}$ . Then use (3.5.3)-(3.5.6) to produce the inequality:

$$(3.5.7) \quad \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, N^*) \leq \|\theta\|^2 + \frac{C^* \sigma_1^2}{\mu} + c_\sigma \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|\theta\|^2 \mathbb{E}_\theta \Delta(N^*) \\ + \mathbb{E}_\theta \left[ (1 + \phi_\sigma) V_\alpha(x, y, N^*) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) + 2\epsilon \sum_{k=1}^{N^*} \theta_k a_k x_k^{-1} \xi_k \right. \\ \left. - \{(1 + \alpha) U_0(N^*, x) - (1 + \mu) U_0(N^*)\} - 2\sigma \sum_{k=1}^{N^*} b_k^{-1} \zeta_k \theta_k^2 \right] + \Omega.$$

Remark that:

$$-2\sigma \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} b_k^{-1} \zeta_k \theta_k^2 = 2\sigma \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} b_k^{-1} \bar{\zeta}_k \theta_k^2,$$

where  $\bar{\zeta}_k \simeq \mathcal{N}(0, 1)$ . Thus, one can apply Inequality (4.55) of Cavalier and Golubev [17] to this quantity. Let  $\tilde{N}_0$  defined in (3.3.2). For all  $\gamma_1 > 0$ ,

$$(3.5.8) \quad -2\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} \sigma b_k^{-1} \zeta_k \theta_k^2 \\ \leq \gamma_1 \left( \sum_{k=\tilde{N}_0+1}^{+\infty} \theta_k^2 + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_0} \epsilon^2 b_k^{-2} \right) + \frac{C\sigma_1^2}{\gamma_1^{4\beta+1}} \left( \frac{\sigma}{\epsilon} \|\theta\| \right)^{4\beta+1} \\ + \gamma_1 \mathbb{E}_\theta \left( \sum_{k=N^*+1}^{+\infty} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N^*} b_k^{-2} \right). \\ \leq \gamma_1 \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, N^*) + \gamma_1 R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) + \frac{C\sigma_1^2}{\gamma_1^{4\beta+1}} \left( \frac{\sigma}{\epsilon} \|\theta\| \right)^{4\beta+1}.$$

Now using (3.5.2),  $V_\alpha(x, y, N^*) \leq V_\alpha(x, y, N)$  for all  $N \leq M$ . In particular, this inequality is true for  $N = \tilde{N}_0$  where

$$(3.5.9) \quad \tilde{N}_0 = \underset{N \leq M}{\operatorname{arginf}} R_\alpha(\theta, N),$$

and  $R_\alpha(\theta, N)$  is defined in (3.3.1) for all  $N \in \mathbb{N}$ .

The bandwidth  $\tilde{N}_0$  is stochastic. It depends on the sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$ . Moreover, since  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  and  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  are independent,

$$(3.5.10) \quad \mathbb{E}_\theta V_\alpha(x, y, \tilde{N}_0) = -\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{\tilde{N}_0} x_k^{-2} y_k^2 + 2\epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{\tilde{N}_0} x_k^{-2} + (1 + \alpha) \mathbb{E}_\theta U_0(\tilde{N}_0, x), \\ = \mathbb{E}_\theta \left[ -\sum_{k=1}^{\tilde{N}_0} \theta_k^2 + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_0} b_k^{-2} + (1 + \alpha) U_0(\tilde{N}_0) \right] + \mathbb{E}_\theta g(\tilde{N}_0, y), \\ = -\|\theta\|^2 + \mathbb{E}_\theta R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) + \mathbb{E}_\theta g(\tilde{N}_0, y),$$

where,  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,

$$(3.5.11) \quad g(N, y) = \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^N (1 - a_k^2) b_k^{-2} y_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^N (a_k^2 - 1) b_k^{-2} \right] + (1 + \alpha) \mathbb{E}_\theta \{U_0(N, x) - U_0(N)\}$$

Using inequalities (5.7)-(3.5.11), we obtain, for all  $N \leq M$ :

$$\begin{aligned} & (1 - \gamma_1) \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, N^*) \\ & \leq (1 + \phi_\sigma) \mathbb{E}_\theta R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) + \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) + \frac{C\sigma_1^2}{\gamma_1^{4\beta+1}} \left( \frac{\sigma}{\epsilon} \|\theta\| \right)^{4\beta+1} \\ & \quad + 2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} \theta_k a_k \epsilon x_k^{-1} \xi_k + \mathbb{E}_\theta \{ (1 + \alpha) U_0(N^*, x) - (1 + \mu) U_0(N^*) \} \\ & \quad + c_\sigma \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|\theta\|^2 \mathbb{E}_\theta \Delta(N^*) + \mathbb{E}_\theta g(\tilde{N}_0, y) + \gamma_1 R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) + \frac{C^* \sigma_1^2}{\mu} + \Omega. \end{aligned}$$

Then apply Lemmas 3.4.2, 3.4.4 and Inequality (4.55) of Cavalier and Golubev [17]. For all  $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$  and  $0 < B < 1$ ,

$$(3.5.12) \quad \begin{aligned} & (1 - \gamma_1 - B) \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, N^*) \\ & \leq (1 + \phi_\sigma + 2\gamma_2 + \delta_\sigma) \mathbb{E}_\theta R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) + \frac{C\sigma_1^2}{\gamma_1^{4\beta+1}} \left( 1 + \frac{\sigma}{\epsilon} \|\theta\| \right)^{4\beta+1} \\ & \quad + \epsilon^2 (1 - \gamma_2) \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - \mathbb{E}_\theta \{ (1 + \alpha) U_0(N^*, x) - (1 + \mu) U_0(N^*) \} \\ & \quad + \gamma_2 \mathbb{E}_\theta l(\theta, N^*) + \epsilon^2 B^{-2\beta} \left( \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|\theta\|^2 \right)^{2\beta+1} + 2\gamma_1 R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) + \frac{C^* \sigma_1^2}{\mu} + \Omega. \end{aligned}$$

We now bound the term:

$$T \triangleq \epsilon^2 (1 - \gamma_2) \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{N^*} x_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - \mathbb{E}_\theta \{ (1 + \alpha) U_0(N^*, x) - (1 + \mu) U_0(N^*) \}.$$

This represents the main difficulty of the proof. Indeed, Inequality (4.48) of Cavalier and Golubev [17] establishes that for all  $\nu > 0$ ,

$$\mathbb{E}_\theta \sup_k \{ \eta_k - (1 + \nu) U_0(k) \} \leq \frac{C\sigma_1^2}{\nu}.$$

This result can be generalised to the quantity  $T$ , conditioning on the sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$ . Lemma 3.4.3 provides that there exists  $g_\sigma$  verifying:

$$\mathbb{E}_\theta \sup_{N \leq M} [U_0(N) - (1 + g_\sigma) U_0(N, x)] \leq C\epsilon^2 + \Omega,$$

for some  $C > 0$ . Conditioning on the sequence  $(x_k)_{k \geq 1}$ , the term  $T$  becomes:

$$\begin{aligned}
(3.5.13) \quad T &= (1 - \gamma_2) \mathbb{E}_\theta \left[ \tilde{\eta}_{N^*} - \frac{\alpha - \mu}{1 - \gamma_2} U_0(N^*, x) + \frac{1 + \mu}{1 - \gamma_2} g_\sigma U_0(N^*, x) \right] + C\epsilon^2 + \Omega, \\
&= (1 - \gamma_2) \mathbb{E}_\theta \left[ \tilde{\eta}_{N^*} - \frac{\alpha - \mu - (1 + \mu)g_\sigma}{1 - \gamma_2} U_0(N^*, x) \right] + C\epsilon^2 + \Omega, \\
&\leq \frac{(1 - \gamma_2)^2 C \sigma_1^2}{(\alpha - \mu(1 + g_\sigma) - g_\sigma + \gamma_2 - 1)_+} + C\epsilon^2 + \Omega.
\end{aligned}$$

If the term  $g_\sigma$  is negative, we can easily find  $\mu$  and  $\gamma_2$  able to control the residual term in (3.5.13). The choice is the same as in Cavalier and Golubev [17]. Now, if  $g_\sigma$  is positive and cannot be controlled, any acceptable bound for (3.5.13) is available. The noisy penalty  $U_0(N^*, x)$  is too small to contain the stochastic term in  $V_\alpha(x, y, N^*)$ . Fortunately, Lemma 3.4.3 ensures that  $g_\sigma < 1$ . Choose

$$(3.5.14) \quad 1 > \gamma_2 > g_\sigma.$$

Since  $\alpha > 1$ ,

$$\alpha - 1 > 0.$$

Therefore, we set

$$\mu = \frac{\alpha - 1}{2(1 + g_\sigma)}.$$

With this choice of parameters, there exists a constant  $C$  independent of  $\epsilon$  such that  $T \leq C\epsilon^2/(\alpha - 1)_+$ . Now, setting  $B = \gamma_1$ , use (3.5.1) and (3.5.13) to obtain:

$$\begin{aligned}
(1 - \gamma_2 - 2\gamma_1) \mathbb{E}_\theta l(\theta, N^*) &\leq (1 + 2\gamma_2 + \phi_\sigma + \delta_\sigma) \mathbb{E}_\theta R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) + 2\gamma_1 R_\alpha(\theta, \bar{N}_0) \\
&\quad + \frac{C\sigma_1^2}{\gamma_1^{4\beta+1}} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|\theta\|^2 \right)^{4\beta+1} + \frac{C\epsilon^2}{(\alpha - 1)_+} + \Omega.
\end{aligned}$$

Whatever the value of  $\gamma_2$ , the parameter  $\gamma_1$  can be chosen sufficiently small in order to provide that:

$$1 - \gamma_2 - 2\gamma_1 > 0.$$

Then remark that:

$$\mathbb{E}_\theta R_\alpha(\theta, \tilde{N}_0) \triangleq \mathbb{E}_\theta \inf_{N \leq M} R_\alpha(\theta, N) \leq \inf_N R_\alpha(\theta, N) + \Gamma(\theta).$$

We eventually apply Lemmas 3.4.1 and 3.4.2 with  $B = \gamma_1$  to obtain:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \\
&\leq (1 + \rho_\sigma) \frac{(1 + \phi_\sigma + \delta_\sigma + 2\gamma_2)}{(1 - 2\gamma_1 - \gamma_2)} R_\alpha(\theta, \bar{N}_0) + \frac{C\epsilon^2}{(\alpha - 1)_+} \\
&\quad + \frac{C\sigma_1^2}{\gamma_1^{4\beta+1}} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \|\theta\|^2 \right)^{4\beta+1} + \Gamma(\theta) + \Omega,
\end{aligned}$$

for some  $1 > \gamma > 0$ , where  $\rho_\sigma$  is defined in Lemma 3.4.1. In order to conclude the proof, set for example  $\gamma_2 = \sqrt{g_\sigma}$  in (3.5.14). □





# Chapitre 4

## Risk hull method for general families of estimators

### Abstract

We consider in this chapter the statistical linear inverse problem  $Y = Af + \xi$  where  $A$  denotes a compact operator and  $\xi$  a stochastic noise. The unknown function  $f$  has to be recovered from the indirect measurement  $Y$ . We are interested in the model selection approach: given a family of estimators, we want to select the best possible one. In this context, the unbiased risk estimation (URE) method is rather popular. Nevertheless, it is also very unstable. Recently, Cavalier and Golubev [17] introduced the risk hull minimization (RHM) method. It significantly improves the performances of the standard URE procedure. However, it only concerns projection rules. We prove in this chapter that it can be extended to a large class of linear estimators.

### 4.1 Introduction

This chapter is devoted to statistical linear inverse problems. We want to recover an unknown function  $f$  from noisy and indirect measurements. Formally, consider  $H$  and  $K$  two Hilbert spaces and  $A : H \rightarrow K$  a compact operator. We observe:

$$(4.1.1) \quad Y = Af + \epsilon\xi,$$

where  $f$  belongs to  $H$  and  $\epsilon\xi$  denotes some noise. This representation arises in many mathematical and physical domains. In the numerical literature, the noise  $\epsilon\xi$  is deterministic. For such a model, many recovering method have been proposed. For a survey, we mention for instance Engl [30], Hanke [38], Engl et al. [31] or Roy and Couchman [63]. In the statistical literature, one deals instead with stochastic perturbation. The Gaussian white noise model is the most used. The representation (4.1.1) is equivalent to:

$$(4.1.2) \quad \langle Y, g \rangle = \langle Af, g \rangle + \epsilon \langle \xi, g \rangle, \quad \forall g \in K,$$

where  $\langle \xi, g \rangle \sim \mathcal{N}(0, \|g\|^2)$  and  $\epsilon > 0$ . Given  $g_1, g_2 \in K$ ,  $\mathbb{E} \langle \xi, g_1 \rangle \langle \xi, g_2 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle$ . We refer to Hida [39] for more details concerning the Gaussian white noise.

The singular value decomposition setting provides a better understanding of the model (4.1.1). The operator  $A^*A$  is compact and selfadjoint. Let  $(b_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$  the associated sequence of eigenvalues. The set of eigenfunctions  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  is assumed to be orthonormal. Define  $\psi_k = b_k^{-1}A\phi_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . For all integer  $k$ , the following equality holds:

$$(4.1.3) \quad \begin{cases} A\phi_k = b_k\psi_k, \\ A^*\psi_k = b_k\phi_k. \end{cases}$$

The triple  $(b_k, \phi_k, \psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  is called the singular system for the operator  $A^*A$ . The associated representation matrix is diagonal. For all  $k \in \mathbb{N}$ , set  $g = \psi_k$  in (4.1.2) and use (4.1.3) in order to obtain the sequence space model:

$$(4.1.4) \quad y_k = b_k\theta_k + \epsilon\xi_k, \forall k \in \mathbb{N},$$

where  $\theta_k = \langle f, \phi_k \rangle$ . The  $\xi_k$  are i.i.d. standard Gaussian random variables since the set  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  is also orthonormal. In the  $L^2$  sense, the function  $f$  and  $\theta = (\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  represent the same mathematical object. The sequence  $\theta$  has to be recovered from the noisy observations  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Since  $A^*A$  is compact,  $b_k \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow +\infty$ . When  $k$  is large, the estimation of  $\theta_k$  is really difficult: there is mainly noise in the observation  $y_k$ .

Consider the following problem: given  $g \in K$ , find  $f \in H$  satisfying  $Af = g$ . In some sense, the best approximate solution  $\hat{f}$  verifies:

$$(4.1.5) \quad \|A\hat{f} - g\| = \inf_{f \in H} \|Af - g\|,$$

and is  $\hat{f} = (A^*A)^{-1}A^*g$ . The operator  $(A^*A)^{-1}A^*$  is called the generalized inverse of  $A$  and  $\hat{f}$  the least square solution. Here, we deal with the model (4.1.1). Therefore, replace  $g$  in (4.1.5) by  $Y$ . Since  $A^*A$  is compact, it is not continuously invertible. The solution  $\hat{f}$  will not be convenient: it does not necessarily converge to  $f$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ . In order to solve (4.1.1), one may use instead:

$$\hat{f}_t = \Phi_t(A^*A)A^*Y,$$

where  $\Phi_t$  approximates the function  $x \mapsto x^{-1}$ . This is a regularization method. The parameter  $t$  is a regularization parameter. The performances of  $\hat{f}_t$  are related to the choice of  $t$  which is crucial for both numerical and statistical approaches.

In the SVD setting, a regularization method  $\Phi_t$  corresponds to a filter  $\lambda(t) = (\lambda_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ . It is a real sequence with values in  $[0,1]$ . The associated estimator is:

$$\hat{f}_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t) b_k^{-1} y_k \phi_k.$$

In Section 3.2, we present some examples of regularization method. The quality of  $\hat{f}_t$  is measured via its quadratic risk:

$$(4.1.6) \quad R(\theta, \lambda(t)) = \mathbb{E}_\theta \|\hat{f}_t - f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2}.$$

The behavior of  $R(\theta, \lambda(t))$  depends on both the function  $f$  and the regularization approach, i.e. the filter  $\lambda$  and the parameter  $t$ . For more details and some examples, we mention Ermakov [32], Donoho [24], Johnstone and Silverman [45] or Efromovich [28]. In the model selection context, the unbiased risk estimation (URE) method (presented in Section 4.2) is rather popular for choosing  $t$ . It has been studied for instance in Cavalier et al. [16]. However, this method is very unstable due to the ill-posedness of the problem.

Indeed, specific phenomena are related to the Gaussian white noise model. They require particular approaches that may not be useful in numerical areas. The Risk Hull Minimization (RHM) method initiated by Cavalier and Golubev [17] is a good example of such procedure. It answers to specific problems of the statistical model (4.1.2) and improves the standard URE approach. The risk hull method has been developed for projection estimators. As proved in this chapter, it can be extended to a large class of linear estimators. This class contains for instance Tikhonov estimators or Landweber iterative methods.

This chapter is organized as follows. In Section 4.2, we recall some well-known properties of Tikhonov estimators and we present the problematic of model selection. The risk hull method is introduced in Section 4.3. Section 4.4 contains the main results and proofs are gathered in Section 4.5. Finally, Section 4.6 is devoted to ordered processes. A reader not familiar with this topic is advised to read this part before being interested in the proofs.

## 4.2 Tikhonov estimator and model selection

Consider the following problem: given a function  $f$  and a set of estimators  $\Lambda$ , we want to select the best possible one, i.e. that minimizes the quadratic risk. In most cases, the family  $\Lambda$  may be identified with a regularization operator  $\Phi_t$  indexed by  $t$  and a collection of parameters  $T$ . This collection may be finite or not. We want to select the parameter  $t$  in an adaptive way, i.e. without using some unknown information on the function  $f$ .

In order to shed some light on this framework, recall briefly some properties of the Tikhonov estimators. Obviously, these estimators are well-known. However, some steps may be useful in the sequel. For a review on this procedure, both in the numerical and statistical domains, we mention for instance Engl et al. [31], Mathé and Pereverzev [58], Bissantz et al. [9] or Bissantz et al. [8] for non-linear inverse problems.

Tikhonov estimation is rather intuitive. We want to control both the regularity of our estimator  $\tilde{f}$  and the fitting of  $A\tilde{f}$  with the data  $Y$ . Therefore, resolve the following optimization problem:

$$(4.2.1) \quad \tilde{f}_t = \operatorname{argmin}_{f \in H} \{ \|Af - Y\|^2 + t^{-1} \|f\|_a \},$$

where  $t$  is a regularization parameter. For all  $f \in H$  and  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\|f\|_a = \|(AA^*)^{-a}f\|$ . In some sense,  $(AA^*)^{-a}$  is a differential operator. The parameter  $a$  is chosen a priori. It is related to the expected regularity of the function  $f$ . In the literature, one often uses  $\alpha$  instead of  $t^{-1}$ . However, the notation (4.2.1) is consistent with Sections 4.3-4.6.

The formulation (4.2.1) can easily be extended to the theory of Hilbert scales. A Hilbert scale  $(H^l)_{l \in \mathbb{R}}$  is a family of Hilbert spaces  $H^l$  with inner product  $\langle u, v \rangle_l = \langle L^l u, L^l v \rangle$ . Denote by  $\|\cdot\|_l$  the associated norm on  $H^l$ . The operator  $L$  is assumed to be self-adjoint,

unbounded and strictly positive in the initial Hilbert space  $H$ . Suppose also that the range of  $A : H^{l-\beta} \rightarrow H^l$  coincide with  $H^l$ , for all  $l \in \mathbb{Z}$  and that there exist  $d, D > 0$  verifying:

$$d\|x\|_{l-\beta} \leq \|Ax\|_l \leq D\|x\|_{l-\beta}, \forall x \in H^{l-\beta}, \text{ with } \beta > 0.$$

This is a current assumption concerning the way where  $A$  acts along  $(H_l)_{l \in \mathbb{R}}$ . The parameter  $\beta$  corresponds to the degree of ill-posedness of the problem. Here and in the sequel, use  $L = (A^*A)^{-1}$ .

The solution of (4.2.1) is:

$$(4.2.2) \quad \tilde{f}_t = \Phi_t(A^*A)A^*Y, \text{ with } \Phi_t(A^*A) = (A^*A + t^{-1}(L^a)^*L^a)^{-1}.$$

In the SVD representation, the Tikhonov estimator becomes:

$$(4.2.3) \quad \tilde{f}_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t) b_k^{-1} y_k \phi_k, \text{ with } \lambda_k(t) = \frac{1}{1 + t^{-1}(b_k^{-2})^{1+2a}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

The associated quadratic risk is:

$$(4.2.4) \quad R(\theta, \lambda(t)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} \triangleq b(\theta, t) + v(t).$$

Assume that the function  $f$  belongs to a ball  $H_Q^\mu$  of radius  $Q$  in  $H^\mu$  for some  $\mu > 0$ :

$$(4.2.5) \quad f \in H_Q^\mu = \{g \in H : \|(A^*A)^{-\mu}g\|^2 \leq Q\} \Leftrightarrow \theta \in \Theta(s, Q) = \left\{ \vartheta : \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^{-4\mu} \vartheta_k^2 \leq Q \right\}.$$

The choice of  $t$  is crucial and has a real impact on the performances of  $\tilde{f}_t$ . It is a trade-off between the respective values of  $b(\theta, t)$  and  $v(t)$ . First consider the bias term  $b(\theta, t)$ . In what follow, we note  $b_1 \lesssim b_2$  when there exists  $C > 0$  such that  $b_1 \leq Cb_2$ . Assume that the sequence of eigenvalues possesses a polynomial behavior:  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (k^{-\beta})_{k \in \mathbb{N}}$  for some  $\beta > 0$ . The problem is said to be mildly ill-posed. Using simple algebra:

$$\begin{aligned} b(\theta, t) &\triangleq \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 \lesssim \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{-2}(k^{4\beta})^{1+2a}}{(1 + t^{-1}k^{2\beta(1+2a)})^2} k^{-4\beta\mu} k^{4\beta\mu} \theta_k^2 \\ &\leq Qt^{-2} \sup_{x \geq 0} g_t(x), \text{ with } g_t(x) = \frac{x^{8\beta a - 4\beta\mu}}{(x^{-2\beta} + t^{-1}x^{4\beta a})^2}, \\ &\lesssim t^{-\frac{2\mu}{(1+2a)}}, \end{aligned}$$

provided  $\mu < 1 + 2a$ . For  $\mu$  larger than  $1 + 2a$ ,  $g_\alpha$  cannot be optimally bounded. The Tikhonov estimator does not attain the minimax rate of convergence on  $H_Q^\mu$ . It is said to be underqualified. For the special case  $a = 0$ , we obtain the well-known condition  $\mu < 1$ . The term  $1 + 2a$  is called qualification of the Tikhonov regularization (see Engl et al. [31] or Bissantz et al. [9] for more details).

Now consider the second term  $v(t)$ . Let  $n = n_t \in \mathbb{N}$  which will be chosen later:

$$v(t) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^{n_t} \lambda_k(t)^2 b_k^{-2} + \epsilon^2 \sum_{k>n_t} \lambda_k(t)^2 b_k^{-2} \lesssim \epsilon^2 n_t^{2\beta+1} + \epsilon^2 \sum_{k>n_t} \lambda_k(t)^2 b_k^{-2}.$$

Then,

$$\begin{aligned} & \epsilon^2 \sum_{k>n_t} \lambda_k(t)^2 b_k^{-2} \\ &= \epsilon^2 \sum_{k>n_t} \left( \frac{1}{1 + t^{-1}(b_k^{-2})^{1+2a}} \right)^2 b_k^{-2} \lesssim \epsilon^2 t^{-2} \sum_{k>n_t} k^{-8\beta a - 2\beta} \lesssim \epsilon^2 t^{-2} n_t^{-8\beta a - 2\beta + 1}, \end{aligned}$$

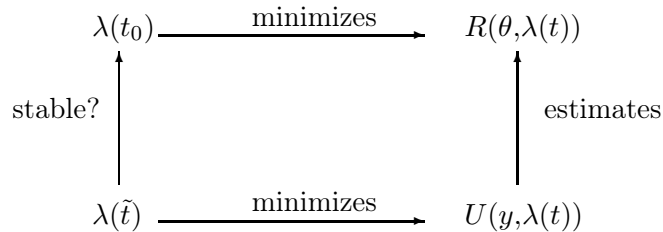
provided  $2\beta(2a + 1/2) > 1$ . Using simple algebra,

$$(4.2.6) \quad v(t) \lesssim \epsilon^2 t^{\frac{2\beta+1}{2\beta(1+2a)}}, \text{ setting } n_t = t^{\frac{1}{2\beta(1+2a)}}.$$

Finally, choose  $t_0$  such that  $v(t_0) = b(\theta, t_0)$ . The associated estimator attains the minimax rate of convergence on  $H_Q^\mu$  for  $\mu < 1 + 2a$ . The parameter  $t_0$  can easily be constructed with the a priori knowledge of  $\mu$  and  $Q$ .

Hence, the parameter  $t$  depends essentially on the regularity and on the norm of  $f$ . Since these informations are in most cases unknown, the choice of  $t$  is somewhat difficult.

Several data driven regularization methods have been proposed. In the model selection context, the unbiased risk estimation procedure is rather popular. Principle is intuitive: given  $f$  and a set of estimator  $\Lambda$  (or equivalently a collection  $T$  of regularization parameters), we want to select the best possible one, i.e. that minimizes the quadratic risk  $R(\theta, \lambda(t))$  (defined in (4.2.4)). Since this quantity depends on the unknown function  $f$ , this estimator is not available. It is called oracle. Therefore, construct an estimator  $U(y, \lambda(t))$  of  $R(\theta, \lambda(t))$ . Then, minimize  $U(y, \lambda(t))$  instead of  $R(\theta, \lambda(t))$ . The unbiased risk procedure is summarized in the following scheme.



A natural estimator for  $R(\theta, \lambda(t))$  is:

$$\begin{aligned} U(y, \lambda(t)) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \{\lambda_k^2(t) - 2\lambda_k(t)\} (b_k^{-2} y_k^2 - \epsilon^2 b_k^{-2}) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2}, \\ &= - \sum_{k=1}^{+\infty} \{2\lambda_k(t) - \lambda_k^2(t)\} b_k^{-2} y_k^2 + 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t) b_k^{-2}. \end{aligned}$$

Cavalier and Tsybakov [21] applied this method on the set of blockwise monotone estimator. In the model selection context, Cavalier et al. [16] dealt with finite families of estimators. Sharp oracle inequalities have been obtained. However, numerical simulations are somewhat disappointing. This has been illustrated in Cavalier and Golubev [17] for projection regularization. The same phenomenon occurs for Tikhonov estimators.

The behavior of the URE method is studied via a simple example:  $f = 0$ , i.e.  $\theta_k = 0$  for all  $k \in \mathbb{N}$ . The collection  $T$  is a grid on  $\mathbb{R}^+$ :

$$T = \{t : n_t \in \{1, \dots, 100\}\} \triangleq \left\{ t : t^{\frac{1}{2\beta(1+2a)}} \in \{1, \dots, 100\} \right\}.$$

In the sequel,  $n_t$  is called bandwidth. We construct the URE estimator  $\tilde{f}$  for  $\beta = 1/4$  and  $\beta = 1$ , with  $r = 2\beta a = 2$ . In some sense, the a priori on the regularity of  $f$  is always the same. Since  $f = 0$ , the oracle corresponds to the parameter that minimizes  $v(t)$ , i.e. the smaller of the grid. We generate 1000 independent random vectors  $Y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\epsilon \xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . For each vector  $Y^p$ ,  $p \in \{1, \dots, 1000\}$ , we compute  $n_t^p$  and the related loss  $\|\hat{\theta}^p - \theta\|^2$ . These quantities are plotted as a stem diagram in Figure 4.1.

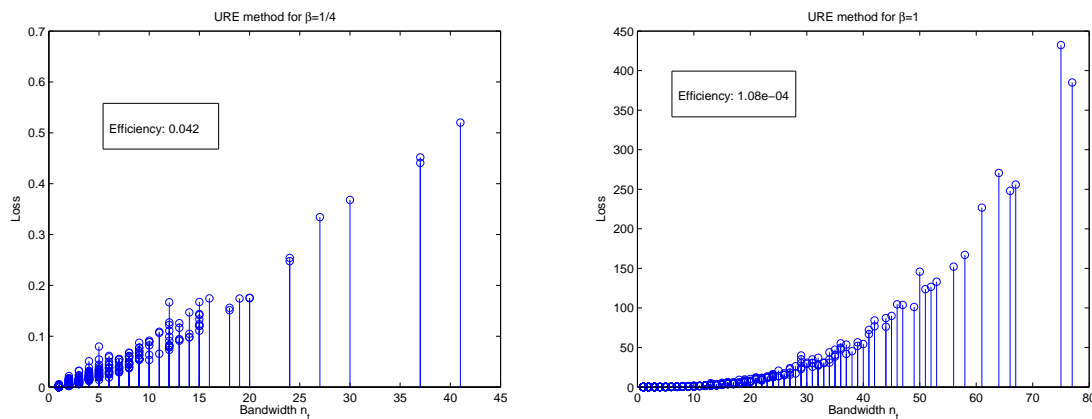


FIG. 4.1 – Behavior of the unbiased risk estimation method.

The efficiency corresponds to:

$$r_\epsilon(t_0, \tilde{t}) = \inf_{t \in T} \mathbb{E}_\theta \|\hat{\theta}_t - \theta\|^2 \times \left( \frac{1}{1000} \sum_{p=1}^{1000} \|\hat{\theta}^p - \theta\|^2 \right)^{-1}.$$

We compare the URE estimator to the best possible one in  $T$ . A good quality of estimation is related to an efficiency close to 1.

The URE procedure allows large choices for the parameter  $t$ . This leads to very bad performances, especially for  $\beta = 1$ . This phenomenon is due to the variability of the Gaussian white noise model. Indeed, when  $f = 0$ ,

$$(4.2.7) \quad U(y, t) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \{2\lambda_k(t) - \lambda_k^2(t)\} \epsilon^2 b_k^{-2} \xi_k^2 + 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t) b_k^{-2}.$$

The variance of the stochastic term in (4.2.7) increases with  $t$ . This phenomenon is amplified by the ill-posedness of the problem. For all  $t > 0$  and  $k \in \mathbb{N}$ ,  $2\lambda_k(t) - \lambda_k^2(t) > 0$ . This explains in part why the method selects large parameters.

The instability of the URE procedure has already been discussed in the literature. Often, one considers instead the criterion  $U(y, \lambda(t)) + \text{pen}(t)$  where  $\text{pen}(t) \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow +\infty$ . A penalty is introduced in the estimator of  $R(\theta, \lambda(t))$ . This penalty is chosen in order to balance the stochastic term in (4.2.7). We expect that smaller parameters will be selected. Several penalizations have been proposed for both direct and inverse problems. We mention for instance Barron et al. [3], Birgé and Massart [7], Golubev [36] or Loubes and Ludena [52].

The risk hull minimization method (also denoted RHM) initiated by Cavalier and Golubev [17] provides an interesting alternative. Consider the simple example of projection estimator (also called spectral cut-off):  $\lambda_k(t) = \mathbf{1}_{\{k \leq t\}}$ , for all  $k \in \mathbb{N}$ . Denote by  $\hat{\theta}_t$  the related estimator. The loss is:

$$l(\theta, \lambda(t)) = \|\hat{\theta}_t - \theta\|^2 = \sum_{k>t} \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^t b_k^{-2} \xi_k^2.$$

Due to the ill-posedness of the problem, the variance of  $l(\theta, t)$  is very large. However, this variability is neglected in the URE procedure. Indeed, we deal with  $R(\theta, \lambda(t)) = \mathbb{E}_\theta l(\theta, \lambda(t))$ . In order to take account of this variability, one may look after a risk hull, i.e. a deterministic quantity  $V(\theta, \lambda(t))$  verifying:

$$\mathbb{E}_\theta \sup_t \{l(\theta, \lambda(t)) - V(\theta, \lambda(t))\} \leq 0.$$

Then, we estimate and minimize  $V(\theta, \lambda(t))$  instead of  $R(\theta, \lambda(t))$ . The challenge is to find an explicit hull. It should not be too large in order to provide a good quality of estimation although a small hull will not be sufficiently stable. The hull  $V(\theta, \lambda(t))$  of Cavalier and Golubev [17] can be explicitly constructed. It is easily computable using for instance Monte-Carlo approximation. The related performances are significantly better than the standard URE procedure, both from a theoretical and numerical point of view. Note that the risk hull method leads in fact to a penalized URE criterion where the penalty is explicitly computable.

However, projection estimation is rather rough. There exist several regularization methods with better performances. We may mention for instance the Tikhonov estimators presented in Section 4.2. In order to illustrate the possible differences between projection and Tikhonov estimation, consider the family:

$$(4.2.8) \quad \theta_k = \frac{\tau}{1 + k^s}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{with } \tau, s \in \mathbb{R}^+.$$

The parameter  $\tau$  is called amplitude and  $s$  is linked to the regularity of the associated function  $f$ . We consider the cases  $s = 0.51$  and  $s = 2$ . For each value of  $s$ , we shall vary the amplitude  $a$  between 1 and 50. In Figure 2, we compare the Tikhonov and projection oracles to the linear monotone oracle  $\hat{f}_{mon}$  given by:

$$\hat{f}_{mon} = \underset{\lambda \in \Lambda_{mon}}{\operatorname{argmin}} R_\epsilon(\lambda, \theta) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k^{-2} \theta_k^2}{\theta_k^2 + \epsilon^2 b_k^{-2}},$$

where the infimum is taken over  $\Lambda_{mon}$ , the family of linear and monotone estimators.

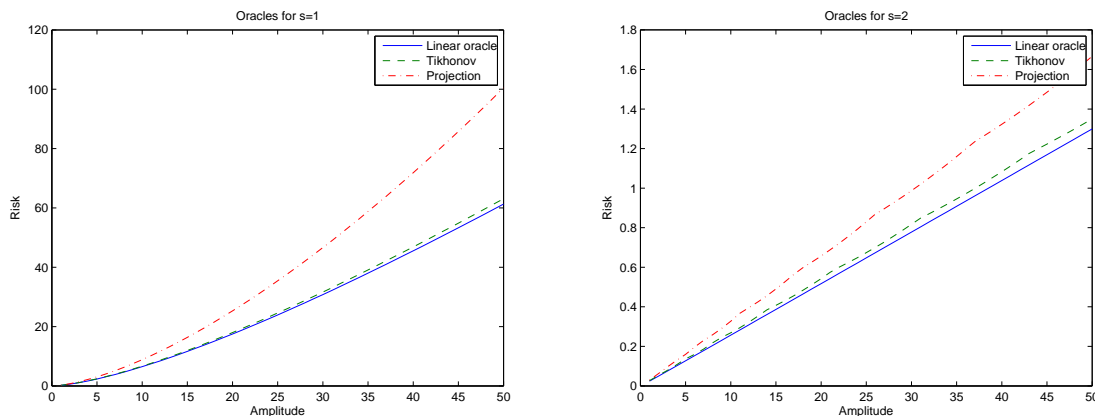


FIG. 4.2 – Comparison of Tikhonov and projection estimators.

For the function defined in (4.2.8), Tikhonov oracle is very close to the linear monotone oracle compared to projection estimation. This is less significant for the case  $s = 2$  since the sequence  $\theta$  is fastly decreasing.

Generalization of the RHM algorithm to a wide family of linear estimators may produce interesting results but is not obvious. It requires in particular the control of the process:

$$\eta(t) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1), \quad t \geq 0.$$

When dealing with projection procedures,  $\eta(t)$ ,  $t \geq 0$  is a Wiener process. These objects have been intensively studied and many results are available. In this chapter, the assumptions concerning the sequence  $(\lambda_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  are rather weak. In such a situation, we will see that the process  $\eta(t)$ ,  $t \geq 0$  is said to be ordered. Some interesting properties have been established in Kneip [50] and Cao and Golubev [13]. It present different behavior compared to the well-known Wiener process. Generalization of the RHM algorithm requires advanced probabilistic tools, all gathered in Section 4.6.

## 4.3 Risk hull

### 4.3.1 Assumptions and construction

Here and in the sequel, assume that  $\Lambda$  is a family of monotones filters indexed by a positive parameter  $t$ , i.e.  $\Lambda = (\lambda(t))_{t \in T}$ , where  $T \subseteq \mathbb{R}^+$ . Each filter  $\lambda(t)$  may be noted  $\lambda$  or identified with the regularization parameter  $t$ . The meaning will be clear following the context. The associated linear estimator is denoted by  $\hat{\theta}_t$ . For all  $k \in \mathbb{N}$ , the function  $t \rightarrow \lambda_k(t)$  is assumed to be monotone non-decreasing. We require some additional assumptions on the family  $\Lambda$ .



**Polynomial hypotheses.** *There exist  $C_1, C_2, C_3, C_4$  positive constants and  $d > 0$  independent of  $t$  and  $\epsilon$  such that:*

$$(4.3.1) \quad \frac{\max_k \epsilon^2 \lambda_k^2(t) b_k^{-2}}{\sqrt{\sigma^2(t)}} \leq C_1 t^{-d/2}, \text{ where } \sigma^2(t) = \epsilon^4 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^4(t) b_k^{-4},$$

$$(4.3.2) \quad \exp \left[ -\frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \log \left( 1 + \frac{2s^2 \epsilon^4 \lambda_p^4(t) b_p^{-4}}{\sigma^2(t)} \right) \right] \leq \left( 1 + \frac{C_2 s^2}{t^d} \right)^{-t^d}, \forall s \in \mathbb{R},$$

and for all  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$(4.3.3) \quad (C_3 t^d)^{-l/2+1} \leq \left| \sigma^2(t)^{-l/2} \epsilon^{2l} \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_p^{2l}(t) b_p^{-2l} \right| \leq (C_4 t^d)^{-l/2+1}.$$

In some sense, (4.3.1)-(4.3.3) generalize the polynomial hypotheses of Cavalier and Golubev [17]. Some examples of regularization method satisfying (4.3.1)-(4.3.3) are presented in Section 3.2.

For all  $\lambda \in \Lambda$ , i.e. for all  $t \in T$ , introduce:

$$(4.3.4) \quad U_0(t) = \inf\{u > 0 : \mathbb{E}\eta(t) \mathbf{1}_{\{\eta(t) > u\}} \leq \epsilon^2\}, \text{ with } \eta(t) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1).$$

The term  $\sigma^2(t)$  denotes the variance of the process  $\eta(t)$ ,  $t \geq 0$  up to some constant. This process is ordered: see Section 4.6 for more details. In particular, the function  $t \mapsto \sigma^2(t)$  is monotone non-decreasing. The following lemma provides a lower bound for  $U_0(t)$ . This quantity will be useful in the following.

**Lemma 4.3.1** *Assume that (4.3.1)-(4.3.3) hold. There exists  $T_0 > 0$  independent of  $\epsilon$  such that for all  $t > T_0$ ,*

$$U_0(\lambda(t)) \triangleq U_0(t) \geq \sqrt{2\sigma^2(t) \log \left( \frac{\sigma^2(t)}{2\pi\epsilon^4} \right)},$$

where  $\sigma^2(t)$  is defined in (4.3.1).

A proof of this lemma is available in Section 4.5. We are now able to propose a risk hull. First introduce:

$$(4.3.5) \quad \lambda(t_0) = \lambda^0 = \operatorname{arg\,inf}_{\lambda \in \Lambda} R(\theta, \lambda),$$

where  $R(\theta, \lambda)$  is the quadratic risk defined in (4.1.6). Hence,  $\lambda^0$  corresponds to the oracle filter for the family  $\Lambda$ . For all  $x \in \mathbb{R}^+$ , define also:

$$(4.3.6) \quad \omega(x) = \sup_{t \in T} \sup_k \lambda_k^2(t) b_k^{-2} \mathbf{1}_{\{\sum_{l=1}^{+\infty} \lambda_l^2(t) b_l^{-2} \leq x \sup_l \lambda_l^2(t) b_l^{-2}\}},$$

and,

$$(4.3.7) \quad L_T = \log^2 S, \text{ with } S = \frac{\max_{t \in T} \sup_k b_k^{-2} \lambda_k^2(t)}{\min_{t \in T} \sup_k b_k^{-2} \lambda_k^2(t)}.$$

These terms have been introduced in Cavalier et al. [16]. The function  $\omega$  is explicitly computed in Section 3.2 for some particular families of estimators. The quantity  $S$  provides an information on the homogeneity of  $T$ . For  $S < +\infty$ , the collection  $T$  may be identified with an interval  $[t_1, t_{\max}]$  and  $S$  is linked to the ratio  $t_{\max}/t_1$ .

**Theorem 4.3.1** *Assume that (4.3.1)-(4.3.3) hold. Then, there exist  $C^*, \bar{C} > 0$  such that, for all  $\theta$  and  $\alpha, \gamma > 0$ ,*

$$(4.3.8) \quad V_\alpha(\theta, \lambda(t)) = (1 + \gamma) \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} + (1 + \alpha) U_0(\lambda(t)) \right\} \\ + \frac{C^* \epsilon^2}{\alpha} + \bar{C} \epsilon^2 \gamma^{-1} L_T \omega(\gamma^{-2} L_T) + \gamma R(\theta, \lambda(t_0)),$$

is a risk hull, i.e.:

$$\mathbb{E}_\theta \sup_{t \in T} \left\{ \|\hat{\theta}_t - \theta\|^2 - V_\alpha(\theta, \lambda(t)) \right\} \leq 0.$$

The hull of Cavalier and Golubev [17] is constructed for projection estimators. Here, the main difference is contained in the residual term  $\bar{C} \epsilon^2 L_T \gamma^{-1} \omega(\gamma^{-2} L_T)$ . The hull is somewhat less precise. This can be explained by the structure of the stochastic processes involved in the loss. Indeed, when considering projection estimators, one essentially deals with Wiener processes. These processes are well-known and may be easily controlled. In particular:

$$P(\max_{t \geq 0} [W(t) - \gamma t] \geq x) \leq \exp(-2\gamma x), \forall \gamma > 0 \text{ and } x \in \mathbb{R}^+,$$

where  $W(t), t \geq 0$  denotes a Wiener process. The proof of Theorem 4.3.1 is based on the theory of ordered processes summarized in Section 4.6 (see also Kneip [50] or Cao and Golubev [13]). These objects are well understood but more difficult to control. At best, it is possible to prove that for all  $p \in \mathbb{N}$ :

$$P(\max_{t \geq 0} [\rho(t) - \gamma \Sigma^2(t)] \geq x) \leq \frac{C p^p}{(\gamma x)^p}, \forall \gamma > 0 \text{ and } x \in \mathbb{R}^+,$$

for a given ordered process  $\rho(t), t \geq 0$  of variance  $\Sigma^2(t)$ . The theory of ordered processes permits to treat infinite families of estimators. This is a real improvement compared to the framework of Cavalier et al. [16].

### 4.3.2 Examples

In this section, we illustrate the polynomial hypotheses (4.3.1)-(4.3.3). Assume that the sequence  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  possesses a polynomial behavior, i.e.  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (k^{-\beta})_{k \in \mathbb{N}}$  for some positive parameter  $\beta$ . The degree of ill-posedness  $\beta$  is assumed to be known.

We consider three different procedures: projection, Tikhonov and Landweber iterative methods.

EXAMPLE 1. (Projection estimators)

Obviously, Assumption (4.3.1)-(4.3.3) are satisfied for projection filters since this chapter generalizes Cavalier and Golubev [17]. Consider the set:

$$\Lambda_{\text{Proj}} = \left\{ \lambda = (\lambda_k(t))_{k \in \mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}, \lambda_k = \mathbf{1}_{\{k \leq t\}}, t \in \mathbb{N} \right\}.$$

The projection estimator is also called spectral cut-off in the literature.

Assumption (4.3.2) is verified in the proof of Lemma 1 of Cavalier and Golubev [17] with  $d = 1$ . Since  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (k^{-\beta})_{k \in \mathbb{N}}$ :

$$\sigma^2(t) = \sum_{k=1}^t b_k^{-4} \simeq t^{4\beta+1}, \text{ and } \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_p^{2l}(t) b_p^{-2l} = \sum_{p=1}^t b_p^{-2l} \simeq t^{2\beta l+1}, \forall l \in \mathbb{N},$$

uniformly in  $t \in \mathbb{N}$ . Therefore, (4.3.3) holds with  $d = 1$ . Then, remark that:

$$\frac{\max_k \lambda_k^2(t) b_k^{-2}}{\sqrt{\sigma^2(t)}} \simeq \frac{t^{2\beta}}{t^{2\beta+1/2}} = t^{-1/2}.$$

Cavalier et al. [16] proved that  $\omega(x) = x^{2\beta}$  for all  $x \in \mathbb{R}^+$ . This concludes Example 1.

EXAMPLE 2. (Tikhonov estimators)

We use the same notation of Section 1.1. Consider the family:

$$\Lambda_{\text{Tikh}} = \left\{ \lambda = (\lambda_k(t))_{k \in \mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N}, \lambda_k = \frac{1}{1 + t^{-1}(b_k^{-2})^{(1+2a)}}, t \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

It is possible to show:

$$\sigma^2(t) = \epsilon^4 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^4(t) b_k^{-4} \simeq \epsilon^4 (t^d)^{4\beta+1}, \text{ and } \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_p^l(t) b_p^{-l} \simeq (t^d)^{2\beta l+1}, \forall l \in \mathbb{N}.$$

with  $d = 1/(2\beta(1 + 2a))$  (see (4.2.6)). Hence, (4.3.3) holds. Then, verify (4.3.2). Let  $n_t$  defined in (4.2.6). For all  $k \in \{n_t/2, \dots, n_t\}$ :

$$\lambda_k^2 b_k^{-2} = \frac{b_k^{-2}}{[1 + t^{-1}(b_k^{-2})^{(1+a)}]^2} \geq C k^{2\beta} \geq C \frac{n_t^{2\beta}}{2^{2\beta}}.$$

Therefore, for all  $t \in \mathbb{R}^+$  and  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \exp \left[ -\frac{1}{4} \sum_{l=1}^{+\infty} \log \left( 1 + \frac{2s^2 \epsilon^4 \lambda_l^4(t) b_l^{-4}}{\sigma^2(t)} \right) \right] &\leq \exp \left[ -\frac{1}{4} \sum_{l=n_t/2}^{n_t} \log \left( 1 + \frac{2s^2 \epsilon^4 \lambda_l^4(t) b_l^{-4}}{\sigma^2(t)} \right) \right], \\ &\leq \exp \left[ -\frac{1}{4} \sum_{l=n_t/2}^{n_t} \log \left( 1 + \frac{C s^2 n_t^{4\beta}}{n_t^{4\beta+1}} \right) \right], \\ (4.3.9) \quad &\leq \left( 1 + \frac{C_1 s^2}{n_t} \right)^{-n_t/8} = \left( 1 + \frac{C_1 s^2}{t^d} \right)^{-t^d/8}. \end{aligned}$$

This prove (4.3.2). Finally, remark that:

$$(4.3.10) \quad \frac{\max_k \lambda_k^2(t) b_k^{-2}}{\sqrt{\sigma^2(t)}} \simeq \frac{\lambda_{n_t}^2(t) b_{n_t}^{-2}}{\sqrt{\sigma^2(t)}} \simeq \frac{n_t^{2\beta}}{n_t^{2\beta+1/2}} = t^{-d/2}.$$

Using for instance (4.2.6) and (4.3.10), we obtain  $\omega(x) \leq Cx^{2\beta}$  for all  $x \in \mathbb{R}^+$ .

EXAMPLE 3. (Iterated Tikhonov regularization)

This method presents an interesting alternative to the previous one. Without a priori on  $f$  ( $a=0$ ), the qualification of the standard Tikhonov estimator is 1. This can be enhanced using iterations. Set  $\hat{f}_0 = 0$ . Given  $j \in \mathbb{N}$  and  $\hat{f}_{j-1}$ ,  $\hat{f}_j$  is defined as the unique solution of:

$$(A^*A + t^{-1}I)\hat{f}_j = A^*T + t^{-1}\hat{f}_{j-1},$$

where  $I$  denotes the identity operator. We refer to  $\hat{f}_j$  as the iterated Tikhonov estimator of order  $j$ . In the SVD setting, the following representation arises:

$$\hat{f}_j = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t) b_k^{-1} y_k \phi_k, \text{ with } \lambda_k(t) = \frac{(t^{-1} + b_k^2)^j - t^{-j}}{(t^{-1} + b_k^2)^j}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

The qualification corresponds to the number of iterations. It is possible to prove that  $\max_k \lambda_k^2(t) b_k^{-2} \lesssim n_t^{2\beta}$  and  $\sigma^2(t) \geq n_t^{4\beta+1}$ , with  $n_t = t^{-1/2\beta}$ . Hence, (4.3.1) holds. Then, for all  $k \in \{n_t/2, \dots, n_t\}$ ,

$$\lambda_k^2(t) b_k^{-2} \geq \left[ (1 + t^{-1} b_k^{-2})^j - t^{-j} b_k^{-2j} \right] b_k^{-2} \geq C n_t^{2\beta},$$

for some  $C > 0$ . Using the same algebra as in (4.3.9), one obtain (4.3.2). The proof of (4.3.3) essentially follows the same lines.

EXAMPLE 4. (Landweber iterative methods)

This procedure is rather interesting from a numerical point of view since it does not require the inversion of an operator. Consider the equation  $g = Af$  for some  $g \in K$ . It can be rewritten as follow:

$$(4.3.11) \quad f = f + A^*(g - Af).$$

The Landweber iterative method is constructed in the following way. Define  $\hat{f}_0 = 0$ . Then, for all  $t \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 1$ , set:

$$(4.3.12) \quad \hat{f}_t = \hat{f}_{t-1} + A^*(g - A\hat{f}_{t-1}).$$

The number  $t$  of iteration plays the role of the regularization parameter. With the model (4.1.1), replace  $g$  by  $Y$ . In the SVD setting, the Landweber iterative estimator is:

$$\hat{f}_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t) b_k^{-1} y_k \phi_k, \text{ with } \lambda_k(t) = (1 - (1 - b_k^2)^t), \forall k \in \mathbb{N}.$$

The estimator  $\hat{f}_t$  is defined only if  $\|A\| \leq 1$  (i.e.  $\max_k b_k \leq 1$ ). Otherwise, the method can easily be modified via the introduction of a relaxation parameter in (4.3.11). The qualification of the Landweber method is  $\infty$ , i.e. there is no restriction on the regularity  $\mu$ .

Using simple algebra, it is possible to prove that  $\sigma^2(t) \simeq \epsilon^4(n_t)^{4\beta+1}$  with  $n_t = t^{1/2\beta}$  and:

$$\begin{aligned} \max_k \lambda_k^2(t) b_k^{-2} &= \max_{x \in (0,1)} \frac{(1 - (1-x)^t)^2}{x}, \\ &\leq \max_{x \in (0,1)} s'(x), \text{ with } s(x) = 1 - (1-x)^t, \\ &= t \end{aligned}$$

Hence, (4.3.1) holds with  $d = 1/2\beta$ . The proof of (4.3.2) and (4.3.3) follows essentially the same lines.

There exists a large choice of iterative procedures. The  $\nu$ -methods are rather popular in the numerical analysis. They require a small number of iterations compared to the Landweber estimator. The explicit representation is somewhat difficult to obtain in the SVD setting. However, we may expect that this method satisfy the polynomial assumptions (4.3.1)-(4.3.3).

## 4.4 Oracle efficiency

### 4.4.1 Theoretical results

Due to the ill-posedness of the problem, the standard URE method is rather unstable. This is illustrated via numerical simulations in Section 4.2. Therefore, estimate and minimize the hull  $V_\alpha(\theta, \lambda(t))$  (introduced in (4.3.8)), instead of  $R(\theta, \lambda(t))$ . Remark that:

$$(4.4.1) \quad \operatorname{argmin}_{\lambda \in \Lambda} V_\alpha(\theta, \lambda) = \operatorname{argmin}_{t \in T} \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} [\lambda_k^2(t) - 2\lambda_k(t)]^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} + (1 + \alpha) U_0(\lambda(t)) \right\}.$$

For all  $\alpha > 0$ , the right-hand side of (4.4.1) can be estimated by

$$(4.4.2) \quad V_\alpha(y, \lambda(t)) = \sum_{k=1}^{+\infty} [\lambda_k^2(t) - 2\lambda_k(t)] (b_k^{-2} y_k^2 - \epsilon^2 b_k^{-2}) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} + (1 + \alpha) U_0(\lambda(t)).$$

Hence consider:

$$(4.4.3) \quad \lambda^* = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \Lambda} V_\alpha(y, \lambda),$$

and denote by  $\theta^*$  the associated estimator. This approach corresponds in fact to a penalized URE method. The penalty  $(1 + \alpha) U_0(\lambda(t))$  is explicitly computable via Monte Carlo approximations. The performances of  $\theta^*$  are summarized in the following theorem.

**Theorem 4.4.1** *Let  $\theta^*$  the estimator defined in (4.4.3) with  $\alpha > 1$ . Assume that there exists a positive constant  $C_T$  such that, uniformly in  $t \in T$ :*

$$(4.4.4) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-4} \leq C_T \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^4(t) b_k^{-4}.$$

*Then, there exist  $B_1, D_1$  and  $\gamma_1 > 0$  independent of  $\epsilon$ , such that, for all  $\lambda \in \Lambda$ , (i.e.  $t \in T$ ) and  $0 < \gamma < \gamma_1$ ,*

$$\mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \leq (1 + B_1 \gamma) R_\alpha(\theta, \lambda(t)) + D_1 \epsilon^2 \gamma^{-1} L_T \omega(\gamma^{-2} L_T) + \frac{D_1 \epsilon^2}{(\alpha - 1)_+},$$

where  $L_T$  is defined in (4.3.7) and

$$(4.4.5) \quad R_\alpha(\theta, \lambda(t)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} + (1 + \alpha) U_0(\lambda(t)).$$

Proof is presented in Section 4.5. It is based on Theorem 4.3.1 and on the theory of ordered processes (summarized in Section 4.6). Clearly, inequality (4.4.4) is verified for projection estimators. This is also the case for Tikhonov estimators, provided  $a > 0$ , Tikhonov iterated procedure ( $j > 1$ ) and for the Landweber iterative method. The constant  $C_T$  has a real impact on the quality of estimation. Indeed, the penalty controls the stochastic term in the loss and in  $V_\alpha(y, \lambda)$ . For all  $\lambda \in \Lambda$ , the variance of these terms is of order  $\epsilon^4 \sum_k \lambda_k^4 b_k^{-4}$  and  $\epsilon^4 \sum_k \lambda_k^2 b_k^{-4}$ , respectively. If  $C_T$  is too large, the penalty is not sufficient for  $V_\alpha(y, \lambda)$ . The efficiency of  $\theta^*$  will not necessarily be improved compared to the standard URE method.

In Theorem 2, we require  $\alpha$  to be greater than 1. It seems that this condition is too restrictive. Indeed, acceptable bounds for the risk are available for  $\alpha < 1$ . This needs more precision in the proofs. The obtained oracle inequality is not sharp: one cannot consider  $\gamma \rightarrow 0$  as  $\epsilon \rightarrow 0$  in this case. On the other hand, large choices are related to a poor efficiency since  $R_\alpha(\theta, \lambda)$  will be significantly greater than the quadratic risk  $R(\theta, \lambda)$ . In the next section, devoted to numerical simulations, we set  $\alpha = 1.1$ . Results are essentially the same for  $\alpha$  close to this quantity, whatever the degree of ill-posedness or the regularity  $\mu$ .

Several bounds in the proof of Theorem 4.4.1 are derived from the theory of ordered processes. These results can easily be applied to the unbiased risk estimation method. In particular, it is possible to deal with infinite families of estimators. Let  $\tilde{\theta}$  be the URE estimator. The following inequality generalizes Theorem 1 of Cavalier et al. [16].

**Theorem 4.4.2** *Assume that (4.3.1)-(4.3.3) and inequality (4.4.4) hold. Then, there exists  $B_2, D_2$  and  $\gamma_2 > 0$  independent of  $\epsilon$ , such that, for all  $\lambda \in \Lambda$ , (i.e.  $t \in T$ ) and  $0 < \gamma < \gamma_2$ ,*

$$\mathbb{E}_\theta \|\tilde{\theta} - \theta\|^2 \leq (1 + B_2 \gamma) R(\theta, \lambda(t)) + D_2 \epsilon^2 \gamma^{-1} L_T \omega(\gamma^{-2} L_T),$$

where  $R(\theta, \lambda(t))$  and  $S$  are defined in (4.1.6) and (4.3.7) respectively.

At a first glance, it seems that the performances of  $\tilde{\theta}$  may be better than  $\theta^*$ . However, proofs shows that the constants  $B_1, D_1$  are significantly smaller than  $B_2, D_2$ . In most cases, the URE method is not sharp enough. It does not take into account the variability of the problem. Numerical simulations in Section 4.2 emphasizes the performances of both the RHM and the standard URE procedures.

### 4.4.2 Numerical simulations

The following numerical simulations may illustrate the results presented in the previous part. First consider the simple example of Section 2:  $f = 0$ . Consider the collection:

$$(4.4.6) \quad T = \{t : n_t \in \{1, \dots, 100\}\} \triangleq \left\{ t : t^{\frac{1}{2\beta(1+2a)}} \in \{1, \dots, 100\} \right\}.$$

This is exactly the same grid as in Section 4.2. We generate 1000 independent vectors  $Y = (\epsilon \xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . For each one, we plot the loss and the associated bandwidth  $n_{\hat{t}}$  as a stem diagram in Figure 4.3.

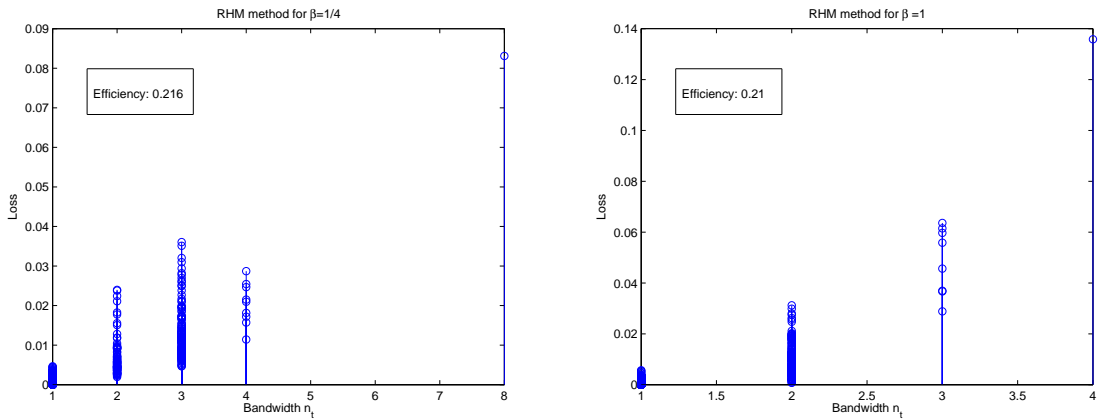


FIG. 4.3 – Risk hull method for  $f = 0$ .

The improvement compared to the URE method is really significant (see Figure 4.1). The selected  $t^*$  is rather close to the oracle ( $t^0 = 1$ ) compared to the standard unbiased risk estimation method. The efficiency is naturally enhanced, in particular for  $\beta = 1$

The particular case  $f = 0$  is not really significant. Obviously, an exhaustive numerical study on the RHM method is impossible. Therefore, consider the family:

$$\theta_k = \frac{\tau}{1 + k^s}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

already introduced in Section 4.2. For both cases  $s = 1$  and  $s = 2$ , we shall vary the amplitude  $\tau$  between 1 and 50. Given an estimator  $\hat{\theta}$ , we are interested in the numerical efficiency of  $\hat{\theta}$ , i.e. in the ratio:

$$r_\epsilon(\theta, \hat{\theta}) = \frac{\inf_{\lambda \in \Lambda_{mon}} \mathbb{E}_\theta \|\tilde{\theta}_\lambda - \theta\|^2}{\mathbb{E}_\theta \|\hat{\theta} - \theta\|^2}.$$

Remark that the infimum is taken over  $\Lambda_{mon}$ , i.e. the family of monotone and linear estimators.

We compare two different approaches: the RHM procedure with projection and Tikhonov estimators, denoted by  $\theta_P^*$  and  $\theta_T^*$  respectively, and the URE algorithm with Tikhonov estimation (denoted  $\hat{\theta}_T$ ).

The efficiency of each estimator is plotted following the amplitude of the function  $f$  (i.e. the parameter  $\tau$ ) via Monte Carlo approximations. We use 5000 replications. We only consider the case  $\beta = 1$  and use the grid  $T$  constructed in (4.4.6). Results are presented in Figure 4.4.

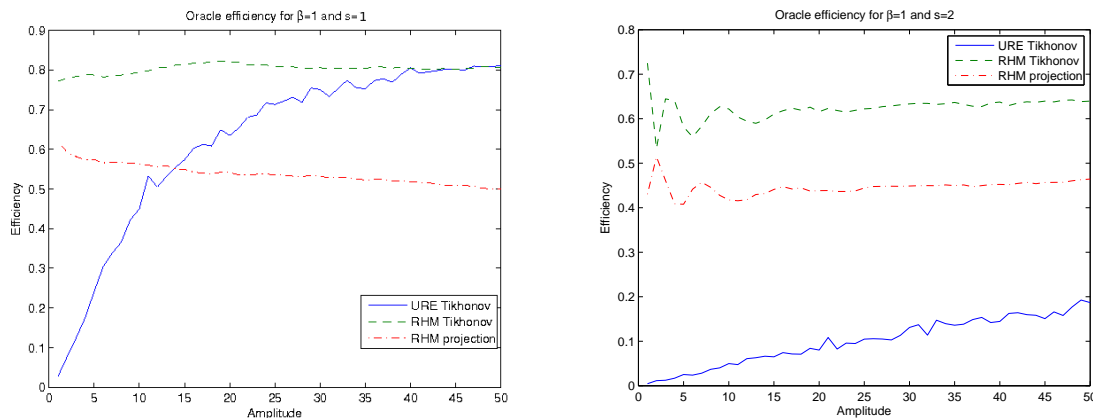


FIG. 4.4 – Comparison RHM-URE for  $\beta = 1$ .

First, remark that  $\hat{\theta}_T^*$  produces a better efficiency than  $\hat{\theta}_P^*$ . This can be explained by the results presented in Figure 4.2. The Tikhonov oracle is indeed rather close to the linear monotone oracle.

Then compare the performances of  $\hat{\theta}_P^*$  and  $\hat{\theta}_T$ . For small amplitudes, the RHM method significantly improves the performances of the URE algorithm. When the signal to noise ratio increases, i.e. for large amplitude and  $s=1$ , both algorithms present similar behavior. Numerical performances of  $\hat{\theta}_T$  for  $s = 2$  increase with  $\tau$  but remain quite poor.

#### 4.4.3 Conclusion

Therefore, it is possible to improve the performances of the traditional URE algorithm for a wide class of linear estimators. Moreover, the RHM method initiated by Cavalier and Golubev [17] can be enhanced by using more precise estimators like Tikhonov or Landweber iterative methods. Principle of risk hull minimization is not restricted to projection procedures. This generalization is mainly due to recent developments on ordered processes. Section 4.6 presents the main lines of this theory. It contains important results from Kneip [50] and Cao and Golubev [13] but also some lemmas useful for the proofs of Theorems 4.3.1-4.4.2.

The term  $U_0(\lambda(t))$  is approximated using Monte Carlo replications. Therefore, the penalty used in Section 4.2 is not exactly the same than in Theorems 4.3.1 and 4.4.1. This approximation is equivalent to a perturbation of  $\alpha$ . From proofs of Section 4.5, it is clear that small variation in  $\alpha$  does not affect the efficiency of  $\hat{\theta}^*$ . Therefore, numerical approximation of  $(1 + \alpha)U_0(\lambda(t))$  is pertinent from a theoretical point of view.

When the inverse problem becomes really ill-posed, one may expect that the RHM method behavior remains stable and that the URE procedure will fail. At the present



time, it is rather difficult to present accurate simulations for high degree of ill-posedness. It requires too much replications. Indeed, the grid  $T$  constructed in (4.4.6) is too sparse for large values of  $\beta$ . We propose only 100 possible values for  $t$  in  $[1; 100^{2\beta(1+2a)}]$ . Monte Carlo method is time consuming. Hence, it is rather difficult to deal with a greater grid.

Since Theorems 4.3.1-4.4.2 hold for  $T = \mathbb{R}^+$ , we decide to present numerical results for a grid as large as possible. This illustrates the stability of the RHM method. From a practical point of view, one deals instead with small grid  $[T_1; T_2]$ , expecting that it contains the oracle on  $\mathbb{R}^+$ . This choice has some influence on the quality of estimation, in particular for the URE method. Such an approach may not be really transparent from a theoretical point of view.

## 4.5 Proofs

### 4.5.1 Proof of Lemma 4.3.1

The proof follows the same lines of Cavalier and Golubev [17]. We shall sometimes omit some technical steps since they have already been developed.

Let  $\eta(t)$ ,  $t \geq 0$ , the stochastic process defined in (4.3.4). For all  $t \in T$ , introduce:

$$(4.5.1) \quad K(t) = \frac{\eta(t)}{\sqrt{2\sigma^2(t)}} \text{ and } u_1(t) = \sqrt{\log\left(\frac{\sigma^2(t)}{2\pi\epsilon^4}\right)}.$$

For all  $t \geq 0$ , the function  $x \mapsto \mathbb{E}_\theta K(t) \mathbf{1}_{\{K(t) \geq x\}}$  is monotone decreasing. In order to prove Lemma 4.3.1, it suffices to show that:

$$(4.5.2) \quad \mathbb{E}_\theta K(t) \mathbf{1}_{\{K(t) \geq u_1(t)\}} \geq \frac{\epsilon^2}{\sqrt{2\sigma^2(t)}},$$

at least for sufficiently large  $t$ . Using integration by part,

$$(4.5.3) \quad \mathbb{E}_\theta K(t) \mathbf{1}_{\{K(t) \geq u_1(t)\}} \geq u_1(t) P(K(t) \geq u_1(t)) + \int_{u_1(t)}^{u_1(t)+1} P(K(t) \geq x) dx.$$

First, study the characteristic function  $\Upsilon$  of the process  $K(t), t \geq 0$ . For all  $s \in \mathbb{R}$ , using (4.3.1):

$$|\Upsilon_t(s)| \triangleq |\mathbb{E} e^{isK(t)}| \leq \exp\left[-\frac{1}{4} \sum_{l=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{2s^2 \epsilon^4 \lambda_l^4(t) b_l^{-4}}{\sigma^2(t)}\right)\right] \leq \left(1 + \frac{C_1 s^2}{t^d}\right)^{-t^d}.$$

Setting  $x = \sqrt{t^d/C_1}$ , we obtain:

$$(4.5.4) \quad \int_{|s| \geq x} |\Upsilon_s(t)| ds = \int_{x \leq |s| \leq \sqrt{2C_1/t^d}} |\Upsilon_s(t)| ds + \int_{\sqrt{2C_1/t^d} \leq |s|} |\Upsilon_s(t)| ds \leq \exp(-Ct^d).$$

Now consider the case  $|s| \leq \sqrt{t^d/C_1}$ . Using a Taylor expansion:

$$\Upsilon_t(s) = \exp\left[-\frac{s^2}{2} + \sum_{l=3}^{M-1} \frac{(-i)^l 2^{l/2} R_l(t) s^l}{l} + O\left(\frac{C R_M(t) 2^{M/2} s^M}{M}\right)\right],$$

where  $M \in \mathbb{N}$  and for all  $l \in \mathbb{N}$ :

$$R_l(t) = (\sigma^2(t))^{-l/2} \epsilon^{2l} \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_p^{2l}(t) b_p^{-2l}.$$

The behavior of  $R_l(t)$ ,  $l \in \mathbb{N}$  is controlled by (4.3.3). Expending  $\Upsilon_t(s) \exp(s^2/2)$  into a Taylor series, construct the following approximation of  $\Upsilon_t(s)$ :

$$\Upsilon_t^M(s) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \left[1 + t^d \sum_{l=3}^{M-1} Q_M(l,t) \left(\frac{is}{\sqrt{t^d}}\right)^l\right],$$

where  $Q_M(l,t)$ ,  $l = 3 \dots M$  are function uniformly bounded in  $l$  and  $t$ . Therefore, the probability  $P(K(t) > x)$  can be approximated by:

$$(4.5.5) \quad P_t^M(x) = \phi(x) - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s=3}^{M-1} (-1)^s Q_M(s,k) k^{-s/2} \frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

where  $\phi(x)$  denotes the repartition function of a standard gaussian random variable at the point  $x$ . Using Parseval identity, (4.5.4) and (4.5.5), we prove that:

$$(4.5.6) \quad |P(K(t) > x) - P_t^M(x)| \leq \frac{C}{(t^d)^{M/2}},$$

for some positive constant  $C$ : see Cavalier and Golubev [17] for more detail. Then, using (4.5.1)-(4.5.6), integration by part and choosing  $M$  large enough:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}K(t) \mathbf{1}_{\{K(t) \geq u_1(t)\}} &\geq u_1(t) \phi(u_1(t)) + \int_{u_1(t)}^{+\infty} \phi(x) dx \\ &\quad - \int_{u_1(t)+1}^{+\infty} \phi(x) dx - (1 + u_1(t)) \max_{u_1(t) \leq x \leq u_1(t)+1} |P_t^M(x) - \phi(x)| - \frac{Cu_1(t)}{(t^d)^{M/2}}, \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u_1(t)^2/2} - C e^{-(u_1(t)+1)^2/2} - (1 + u_1(t)) \max_{u_1(t) \leq x \leq u_1(t)+1} |P_t^M(x) - \phi(x)| - \frac{Cu_1(t)}{(t^d)^{M/2}}, \\ &\geq \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\sigma^2(t)}} + o\left(\frac{\epsilon^2}{\sqrt{2\sigma^2(t)}}\right), \text{ as } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Indeed, (4.3.1) and (4.5.1) provide  $u_1(t) \simeq C\sqrt{\log(t)}$  for some positive constant  $C > 0$ . Hence, (4.5.1) is satisfied. This concludes proof of Lemma 1.  $\square$

### 4.5.2 Proof of Theorem 4.3.1

Remark that:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\theta \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \|\hat{\theta}_\lambda - \theta\|^2 - V_\alpha(\theta, \lambda) \right\} \\ &= \mathbb{E}_\theta \sup_{\lambda \in \Lambda} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k b_k^{-1} y_k - \theta_k)^2 - V_\alpha(\theta, \lambda) \right], \\ &= \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \bar{\lambda}_k)^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \bar{\lambda}_k^2 b_k^{-2} \xi_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (\bar{\lambda}_k - 1) \bar{\lambda}_k \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k - V_\alpha(\theta, \lambda) \right], \end{aligned}$$

with,

$$\bar{\lambda} = \lambda(\bar{t}) = \operatorname{argsup}_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \|\hat{\theta}_\lambda - \theta\|^2 - V_\alpha(\theta, \lambda) \right\}.$$

Use the following decomposition:

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} (\bar{\lambda}_k - 1) \bar{\lambda}_k \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k &= 2\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{\bar{\lambda}_k^2 - \bar{\lambda}_k\} \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k, \\ &= \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \bar{\lambda}_k^2 \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k + \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{\bar{\lambda}_k^2 - 2\bar{\lambda}_k\} \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k, \\ &= \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \bar{\lambda}_k^2 \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k + \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \bar{\lambda}_k)^2 \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k. \end{aligned}$$

Corollary 4.6.1 in Section 4.6 provides, for all  $\gamma > 0$ :

$$2\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} (\bar{\lambda}_k - 1) \bar{\lambda}_k \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k \leq \gamma \mathbb{E}_\theta R_\epsilon(\theta, \bar{\lambda}) + \gamma R_\epsilon(\theta, \lambda^0) + C \epsilon^2 \gamma^{-1} L_T \omega(\gamma^{-2} L_T),$$

for some positive constant  $C > 0$ . Therefore,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\theta \sup_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\hat{\theta}_\lambda - \theta\|^2 - V_\alpha(\theta, \lambda) \} \\ &\leq \mathbb{E}_\theta \sup_{\lambda \in \Lambda} \left[ (1 + \gamma) \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k^2) \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-2} \xi_k^2 + \gamma \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-2} \right. \\ (4.5.7) \quad &\quad \left. + C \gamma^{-1} \epsilon^2 L_T \omega(\gamma^{-2} L_T) + \gamma R(\theta, \lambda^0) - V_\alpha(\theta, \lambda) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E} \sup_{\lambda \in \Lambda} \left[ \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - (1 + \gamma^{-1})(1 + \alpha) U_0(\lambda) - \frac{C^* \epsilon^2}{\alpha} \right], \\ (4.5.8) \quad &\leq \mathbb{E} \sup_{\lambda \in \Lambda} \left[ \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - (1 + \alpha) U_0(\lambda) \right] - \frac{C^* \epsilon^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Let  $\sigma^2(t)$  and  $\eta(t), t > 0$  the quantities defined in (4.3.1) and (4.3.4), respectively. Recall that the function  $t \mapsto \sigma^2(t)$  is monotone non-decreasing since it denotes the variance of the ordered process  $\eta(t), t \geq 0$  up to some constant. Without loss of generality, we consider that  $T = ]0; +\infty[$  and  $\sigma^2(t) \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow +\infty$ . Let  $(t_s)_{s \in \mathbb{N}}$  be a grid in  $\mathbb{R}$  which will be chosen later. Using Lemma 4.3.1, it is easy to see that:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sup_{\lambda \in \Lambda} \left[ \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - (1 + \alpha) U_0(\lambda) \right] \\ &\leq \sum_{s=0}^{+\infty} \mathbb{E} \sup_{t \in [t_s, t_{s+1}]} \left[ \eta(t) - (1 + \alpha) \sqrt{2\sigma^2(t) \log(C \epsilon^{-4} \sigma^2(t))} \right]_+, \end{aligned}$$

for some positive constant  $C$ . For all  $x \in \mathbb{R}$ , the notation  $x_+$  denotes the positive part of

$x$ , i.e.  $x_+ = x \mathbf{1}_{\{x>0\}}$ . Let  $s \in \mathbb{N}$  be fixed:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{t \in [t_s, t_{s+1}]} \left[ \eta(t) - (1 + \alpha) \sqrt{2\sigma^2(t) \log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t))} \right]_+ \\
&= \mathbb{E} \sup_{t \in [t_s, t_{s+1}]} \left[ \eta(t_s) - \eta(t_s) + \eta(t) - (1 + \alpha) \sqrt{2\sigma^2(t) \log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t))} \right]_+ , \\
(4.5.9) \quad & \leq \mathbb{E} \left[ \eta(t_s) - (1 + \alpha) \sqrt{2\sigma^2(t_s) \log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t_s))} + \mathcal{E}(t_s) \right]_+ ,
\end{aligned}$$

where, for all  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$(4.5.10) \quad \mathcal{E}(t_s) = \sup_{t \in [t_s, t_{s+1}]} \{ \eta(t) - \eta(t_s) \} .$$

Since the variables  $\eta(t_s)$  and  $\mathcal{E}(t_s)$  are not independent, the same method as Cavalier and Golubev [17] cannot be applied. Instead, remark that for all  $0 < \mu < 1$ , using (4.5.9),

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{t \in [t_s, t_{s+1}]} \left[ \eta(t) - (1 + \alpha) \sqrt{2\sigma^2(t) \log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t))} \right]_+ , \\
& \leq \int_{B_s}^{+\infty} P(\eta(t_s) + \mathcal{E}(t_s) \geq x) dx , \\
(4.5.11) \quad & \leq \int_{B_s}^{+\infty} P(\eta(t_s) \geq \mu x) dx + \int_{B_s}^{+\infty} P(\mathcal{E}(t_s) \geq (1 - \mu)x) dx \triangleq A_1 + A_2 ,
\end{aligned}$$

with,

$$(4.5.12) \quad B_s = (1 + \alpha) \sqrt{2\sigma^2(t_s) \log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t_s))} , \forall s \in \mathbb{N} .$$

We are first interested in the study of  $A_2$ . For all  $p > 0$ , using a Markov inequality,

$$\begin{aligned}
A_2 & \triangleq \int_{B_s}^{+\infty} P(\mathcal{E}(t_s) \geq (1 - \mu)x) dx = \int_{B_s}^{+\infty} P \left( \sup_{t \in [t_s, t_{s+1}]} \{ \eta(t) - \eta(t_s) \} \geq (1 - \mu)x \right) dx , \\
& \leq \frac{1}{(1 - \mu)^p} \int_{B_s}^{+\infty} \frac{\mathbb{E} \sup_{t \in [t_s, t_{s+1}]} |\eta(t) - \eta(t_s)|^p}{x^p} dx , \\
(4.5.13) \quad & = \frac{1}{(1 - \mu)^p} \mathbb{E} \sup_{t \in [t_s, t_{s+1}]} |\eta(t) - \eta(t_s)|^p \frac{1}{(p - 1)B_s^{p-1}} .
\end{aligned}$$

The process  $\eta(t)$ ,  $t > 0$  is ordered (see Section 4.6). By Lemma 4.6.1, there exists a positive constant  $C > 0$  independent of  $\epsilon$  and  $t$ , such that, for all  $p > 0$ :

$$(4.5.14) \quad \mathbb{E} \sup_{t \in [t_s, t_{s+1}]} |\eta(t) - \eta(t_s)|^p \leq C^p p^p (\sigma^2(t_{s+1}) - \sigma^2(t_s))^{p/2} .$$

Therefore, using (4.5.12)-(4.5.14), we obtain:

$$(4.5.15) \quad A_2 \leq \left( \frac{C}{(1 - \mu)(1 + \alpha)} \right)^p \frac{p^p}{p - 1} \frac{(\sigma^2(t_{s+1}) - \sigma^2(t_s))^{p/2}}{[\sigma^2(t_s) \log(C\sigma^2(t_s))]^{(p-1)/2}} .$$

Now, choose the grid  $(t_s)_{s \in \mathbb{N}}$  as follow:

$$(4.5.16) \quad \sigma^2(t_s) = \epsilon^4 \left(1 + \frac{1}{s^\nu}\right)^s, \quad \forall s \in \mathbb{N},$$

where  $\nu \in ]3/4, 1[$ . This choice is a trade off between an exponential grid similar to Cavalier and Golubev [17] and polynomial grids of Cao and Golubev [13]. Remark that:

$$(4.5.17) \quad \sigma^2(t_{s+1}) - \sigma^2(t_s) = \epsilon^4 \left(1 + \frac{1}{(s+1)^\nu}\right)^{s+1} - \epsilon^4 \left(1 + \frac{1}{s^\nu}\right)^s \leq \epsilon^4 \left(1 + \frac{1}{s^\nu}\right)^s \frac{1}{s^\nu}.$$

Moreover, for all  $s \in \mathbb{N}$ , using Taylor formula,

$$(4.5.18) \quad \log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t_s)) = s \left[ \log(C^{1/s}) + \log\left(1 + \frac{1}{s^\nu}\right) \right] \geq s \log\left(1 + \frac{1}{s^\nu}\right) \geq Cs^{1-\nu}.$$

Hence, (4.5.15)-(4.5.18) yield:

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \epsilon^2 \left[ \frac{C}{(1-\mu)(1+\alpha)} \right]^p \frac{p^p}{p-1} \frac{(s^{-\nu})^{p/2} (1+s^{-\nu})^{sp/2}}{(1+s^{-\nu})^{s(p-1)/2} (s^{1-\nu})^{(p-1)/2}}, \\ &= \epsilon^2 \left[ \frac{C}{(1-\mu)(1+\alpha)} \right]^p \frac{p^p}{p-1} \frac{(1+s^{-\nu})^{s/2}}{(s^\nu)^{p/2} (s^{1-\nu})^{(p-1)/2}}, \\ &= \epsilon^2 \left[ \frac{C}{(1-\mu)(1+\alpha)} \right]^p \frac{p^p}{p-1} s^{(1-\nu)/2} \times \frac{(1+s^{-\nu})^{s/2}}{s^{p/2}}. \end{aligned}$$

For all  $s \in \mathbb{N}$ , with simple algebra,

$$(1+s^{-\nu})^{s^\nu} = \exp\{s^\nu \log(1+s^{-\nu})\} \simeq \exp(s^\nu \times s^{-\nu}) = O(1), \text{ as } s \rightarrow +\infty.$$

Therefore:

$$(1+s^{-\nu})^{s/2} = \exp\left\{ \frac{s^{1-\nu}}{2} \log((1+s^{-\nu})^{s^\nu}) \right\} \leq Cs^{1-\nu},$$

for some positive constant  $C > 0$ . We eventually obtain:

$$(4.5.19) \quad A_2 \leq \epsilon^2 g(\mu, \alpha)^p \frac{s^{(1-\nu)/2}}{p-1} \times \frac{p^p}{\sqrt{s^p}} Cs^{1-\nu}, \text{ with } g(\mu, \alpha) = \left[ \frac{C}{(1-\mu)(1+\alpha)} \right].$$

Now, choose the parameter  $p$  in a properly way. For example, set  $p = s^{1/4}$ . Such a choice provides:

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \epsilon^2 s^{\frac{1-\nu}{2} - \frac{1}{4}} g(\mu, \alpha)^{s^{1/4}} \left( \frac{s^{1/4}}{s^{1/2}} \right)^{s^{1/4}} Cs^{1-\nu}, \\ &= \epsilon^2 s^{\frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}} g(\mu, \alpha)^{s^{1/4}} (s^{1/4})^{-s^{1/4}} Cs^{1-\nu}, \\ &= \epsilon^2 s^{\frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}} \exp\left\{ s^{1/4} \log(g(\mu, \alpha)) + s^{1-\nu} \log C - s^{1/4} \log(s^{1/4}) \right\}, \\ &= \epsilon^2 s^{\frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}} \exp\left\{ s^{1/4} \left[ \log(g(\mu, \alpha)) + s^{1-\nu-1/4} \log C - \frac{1}{4} \log(s) \right] \right\}. \end{aligned}$$

It is then easy to see that, provided  $\nu \in ]3/4, 1[$ ,

$$\log(g(\mu, \alpha)) + s^{1-\nu-1/4} \log C - \frac{1}{4} \log(s) < 0,$$

at least for  $s$  large enough. Therefore, for all  $\mu \in (0, 1)$ :

$$(4.5.20) \quad A_2 \leq \epsilon^2 C e^{-s^{1/4}} \text{ and } \sum_{s=1}^{+\infty} \int_{B_s}^{+\infty} P(\mathcal{E}(t_s) \geq (1-\mu)x) dx \leq C_1^* \epsilon^2,$$

where  $C_1^*$  is a positive constant independent of  $\epsilon$ .

We are now interested in the study of  $A_1$  in inequality (4.5.11). For all  $\delta > 0$ , using a Markov inequality:

$$(4.5.21) \quad \begin{aligned} A_1 &\triangleq \int_{B_s}^{+\infty} P(\eta(t_s) \geq \mu x) dx, \\ &= \int_{B_s}^{+\infty} P(\exp(\delta\eta(t_s)) \geq \exp(\delta\mu x)) dx, \\ &\leq \int_{B_s}^{+\infty} \frac{\mathbb{E} \exp\{\delta\eta(t_s)\}}{\exp\{\delta\mu x\}} dx = \frac{1}{\delta\mu} \mathbb{E} \exp\{\delta\eta(t_s)\} e^{-\delta\mu B_s}. \end{aligned}$$

Inequality (4.38) of Cavalier and Golubev [17] yields:

$$(4.5.22) \quad \mathbb{E} \exp\{\delta\eta(t_s)\} \leq \exp \left\{ \delta^2 \sigma^2(t_s) + 4\delta^3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\epsilon^6 \lambda_k(t_s)^6 b_k^{-6}}{(1 - 2\delta \lambda_k^2(t_s) b_k^{-2})_+} \right\}.$$

Setting,

$$(4.5.23) \quad \delta = \sqrt{\frac{\log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t_s))}{2\sigma^2(t_s)}},$$

we obtain,

$$\begin{aligned} A_1 &\leq C\mu^{-1} \sqrt{\frac{2\sigma^2(t_s)}{\log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t_s))}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t_s)) \right\} \times e^{-\mu(1+\alpha) \log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t_s))}, \\ &\leq C\mu^{-1} \epsilon^2 \sqrt{\frac{1}{\log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t_s))}} \exp \left\{ -[\mu(1+\alpha) - 1] \log(C\epsilon^{-4}\sigma^2(t_s)) \right\}. \end{aligned}$$

Indeed, using (4.3.1)-(4.3.3) and (4.5.23):

$$\delta^3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_k^6(t_s) b_k^{-6}}{(1 - 2\delta \lambda_k^2(t_s) b_k^{-2})_+} \rightarrow 0, \text{ as } s \rightarrow +\infty.$$

With (4.5.16) and (4.5.18), we eventually obtain:

$$(4.5.24) \quad \begin{aligned} \sum_{s=1}^{+\infty} \int_{B_s}^{+\infty} P(\eta(t_s) \geq \mu x) dx &\leq \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{C\epsilon^2}{s^{(1-\nu)/2}} \left[ e^{-s \log(1+s^{-\nu})} \right]^{\mu(1+\alpha)-1}, \\ &\leq \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{C\epsilon^2}{s^{(1-\nu)/2}} \exp\{-C(\mu(1+\alpha) - 1)s^{1-\nu}\} \leq \frac{C_2^* \epsilon^2}{\alpha}, \end{aligned}$$

setting for example  $\mu = (1 + \alpha/2)/(1 + \alpha)$ . Therefore,

$$(4.5.25) \quad \mathbb{E} \sup_{\lambda \in \Lambda} \left[ \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - (1 + \alpha) U_0(\lambda) \right] \leq \frac{C^* \epsilon^2}{\alpha}.$$

Theorem 4.3.1 is obtained using (4.5.8) and (4.5.25).  $\square$

### 4.5.3 Proof of Theorem 4.4.1

Let  $\mu > 0$ . By Theorem 4.3.1,  $V_\mu(\theta, \lambda)$  is a risk hull. Therefore,

$$(4.5.26) \quad \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \leq \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, \lambda^*).$$

Moreover, (4.4.3) provides that,  $\forall \lambda \in \Lambda$ ,

$$(4.5.27) \quad \mathbb{E}_\theta V_\alpha(y, \lambda^*) \leq \mathbb{E}_\theta V_\alpha(y, \lambda).$$

We will combine inequalities (4.5.26) and (4.5.27). First, rewrite  $V_\alpha(y, \lambda^*)$  in terms of  $V_\mu(\theta, \lambda^*)$ . By simple algebra:

$$(4.5.28) \quad \begin{aligned} V_\alpha(y, \lambda^*) &\triangleq \sum_{k=1}^{+\infty} \{(\lambda_k^*)^2 - 2\lambda_k^*\} (b_k^{-2} y_k^2 - \epsilon^2 b_k^{-2}) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2} + (1 + \alpha) U_0(\lambda^*), \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \{(1 - \lambda_k^*)^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2}\} + (1 + \mu) U_0(\lambda^*) + (\alpha - \mu) U_0(\lambda^*), \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \{(\lambda_k^*)^2 - 2\lambda_k^*\} \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \{(\lambda_k^*)^2 - 2\lambda_k^*\} \epsilon^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - \|\theta\|^2, \\ &= R_\mu(\theta, \lambda^*) + (\alpha - \mu) U_0(\lambda^*) - \|\theta\|^2 \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \{(\lambda_k^*)^2 - 2\lambda_k^*\} \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \{(\lambda_k^*)^2 - 2\lambda_k^*\} \epsilon^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1), \end{aligned}$$

where  $R_\mu(\theta, \lambda^*)$  is defined in (4.4.5). Using (4.5.27) and (4.5.28), for all  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$(4.5.29) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_\theta R_\mu(\theta, \lambda^*) &\leq \mathbb{E}_\theta V_\alpha(y, \lambda) - (\alpha - \mu) \mathbb{E}_\theta U_0(\lambda^*) + \|\theta\|^2 \\ &- 2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{(\lambda_k^*)^2 - 2\lambda_k^*\} \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k - \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{(\lambda_k^*)^2 - 2\lambda_k^*\} \epsilon^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1). \end{aligned}$$

It is then easy to see that, for all  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\mathbb{E}_\theta V_\alpha(y, \lambda) = R_\alpha(\theta, \lambda) - \|\theta\|^2.$$

This yields:

$$(4.5.30) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_\theta R_\mu(\theta, \lambda^*) &\leq R_\alpha(\theta, \lambda) - 2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{(\lambda_k^*)^2 - 2\lambda_k^*\} \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k \\ &\quad + \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \{2\lambda_k^* - (\lambda_k^*)^2\} \epsilon^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - (\alpha - \mu) U_0(\lambda^*) \right]. \end{aligned}$$

In order to complete the proof, we bound the two last terms of (4.5.30). First use Corollary 4.6.1 in Section 4.6. For all  $\gamma > 0$  and for all  $\lambda \in \Lambda$ :

$$(4.5.31) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{(\lambda_k^*)^2 - 2\lambda_k^*\} \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k = \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k^*)^2 \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k \\ & \geq -\gamma \mathbb{E}_\theta R_\epsilon(\theta, \lambda^*) - \gamma R_\epsilon(\theta, \lambda) - C\gamma^{-1} \epsilon^2 L_T \omega(\gamma^{-2} L_T) \end{aligned}$$

Therefore, using (4.5.29)-(4.5.31), we obtain:

$$(4.5.32) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta R_\mu(\theta, \lambda^*) \\ & \leq (1 + \gamma) R_\alpha(\theta, \lambda) + \gamma \mathbb{E}_\theta \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k^*)^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2} \right\} \\ & \quad + C\gamma^{-1} \epsilon^2 L_T \omega(\gamma^{-2} L_T) + \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \{2\lambda_k^* - (\lambda_k^*)^2\} \epsilon^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - (\alpha - \mu) U_0(\lambda^*) \right], \\ & = (1 + \gamma) R_\alpha(\theta, \lambda) + \gamma \mathbb{E}_\theta \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k^*)^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2} \xi_k^2 \right\} + C\gamma^{-1} \epsilon^2 L_T \omega(\gamma^{-2} L_T), \\ & \quad + \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \{2\lambda_k^* - (1 + \gamma)(\lambda_k^*)^2\} \epsilon^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - (\alpha - \mu) U_0(\lambda^*) \right]. \end{aligned}$$

Now, study the last term in the right-hand side of (4.5.32). It can be rearranged as follow:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \{2\lambda_k^* - (1 + \gamma)(\lambda_k^*)^2\} \epsilon^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - (\alpha - \mu) U_0(\lambda^*) \right], \\ & = \mathbb{E}_\theta \left[ \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \gamma)(\lambda_k^*)^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - (\alpha - \mu) U_0(\lambda^*) \right] \\ & \quad + 2\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{\lambda_k^* - (\lambda_k^*)^2\} \epsilon^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) = T_1 + T_2. \end{aligned}$$

We are first interested in  $T_1$ . The bound of this term represents the gain on the traditional URE method. Indeed, if the penalty is zero, only less precise majoration are available (see proof of Theorem 4.4.2). Remark that if the constant  $C_T$  is large, the term  $T_1$  will be negligible compared to  $T_2$ . The efficiency will not be enhanced by the RHM method. Here, using (4.5.25):

$$(4.5.33) \quad T_1 \triangleq (1 - \gamma) \mathbb{E}_\theta \left[ \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - \frac{(\alpha - \mu)}{1 - \gamma} U_0(\lambda^*) \right] \leq \frac{(1 - \gamma)^2 C \epsilon^2}{(\alpha - \mu + \gamma - 1)_+}.$$

Then study the stochastic term  $T_2$ :

$$(4.5.34) \quad T_2 \triangleq 2\epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^* b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) - 2\epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1).$$



For all  $\lambda \in \Lambda$  and  $B > 0$ , using Lemma 4.6.2 and the same technics of proof of Corollary 4.6.1 (see Section 4.6) and (4.6.9):

$$\begin{aligned}
& 2\epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^* b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) \\
& \leq C \log^2 S \times \mathbb{E}_\theta \sqrt{\epsilon^4 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t^*) b_k^{-4}} + \frac{1}{S} \sqrt{\mathbb{E}_\theta \epsilon^4 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t^*) b_k^{-4}}, \\
& \leq C \log^2 S \times \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sqrt{\sup_{k \in \mathbb{N}} (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t^*) b_k^{-2}} + C \epsilon^2 \sqrt{\mathbb{E}_\theta \sup_{k \in \mathbb{N}} (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2} \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t^*) b_k^{-2}}, \\
& \leq \frac{\gamma}{2} \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t^*) b_k^{-2} + C \epsilon^2 \gamma^{-1} \log S \times \mathbb{E}_\theta \sup_{k \in \mathbb{N}} (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2}, \\
(4.5.35) \quad & \leq \gamma \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t^*) b_k^{-2} + C \epsilon^2 \gamma^{-1} L_T \omega(\gamma^{-2} L_T).
\end{aligned}$$

Indeed, the process

$$\rho(t) = \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k(t) b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1), \quad t \geq 0,$$

is ordered. The same bound for the second term in the right hand side of (4.5.34) occurs since the process  $-\eta(t)$ ,  $t \geq 0$  is also ordered. Using (4.3.8), (4.5.7) and (4.5.32)-(4.5.35), we eventually find:

$$\begin{aligned}
(1 - c\gamma) \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, \lambda^*) & \leq (1 + \gamma)^2 R_\alpha(\theta, \lambda) + \gamma \mathbb{E}_\theta \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k^*)^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^*)^2 b_k^{-2} \xi_k^2 \right] \\
& \quad + C \gamma^{-1} \epsilon_T^2 \omega(\gamma^{-2} L_T) + \frac{C(1 - \gamma^2) \epsilon^2}{(\alpha - \mu + \gamma - 1)_+} + \frac{C \epsilon^2}{\mu}, \\
& \leq (1 + \gamma)^2 R_\alpha(\theta, \lambda) + C \gamma \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, \lambda^*) \\
(4.5.36) \quad & \quad + C \gamma^{-1} \epsilon^2 L_T \omega(\gamma^{-2} L_T) + \frac{C(1 - \gamma^2) \epsilon^2}{(\alpha - \mu + \gamma - 1)_+} + \frac{C \epsilon^2}{\mu},
\end{aligned}$$

for some  $c > 0$ . Combining inequalities (4.5.26), (4.5.36), choosing  $\gamma < \gamma_0$  for some  $\gamma_0$ , we eventually obtain:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \leq \mathbb{E}_\theta V_\mu(\theta, \lambda^*), \\
& \leq \left( \frac{(1 + \gamma)^2}{1 - c\gamma} \right) R_\alpha(\theta, \lambda) + \frac{C \epsilon^2}{\mu} + \frac{(1 - \gamma^2) C \epsilon^2}{(\alpha - \mu + \gamma - 1)_+} + C \gamma^{-1} \epsilon^2 L_T \omega(\gamma^{-2} L_T).
\end{aligned}$$

Set  $\mu = \gamma$  in order to conclude the proof. □

#### 4.5.4 Proof of Theorem 4.4.2

The proof essentially follows the same lines of Sections 5.2 and 5.3. Let  $\gamma > 0$  be fixed and  $W(\theta, \lambda)$  defined by:

$$(4.5.37) \quad W(\theta, \lambda(t)) = (1 + 2\gamma) \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} \right\} \\ + \tilde{C} \epsilon^2 \gamma^{-1} L_T \omega(\gamma^{-2} L_T) + \gamma R(\theta, \lambda_0),$$

where  $\tilde{C}$  denotes a positive constant independent of  $\epsilon$ . First remark that using (4.5.7):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \|\hat{\theta}_\lambda - \theta\|^2 - W(\theta, \lambda) \right\} \\ & \leq \mathbb{E}_\theta \sup_{\lambda \in \Lambda} \left[ (1 + \gamma) \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k)^2 \theta_k^2 + \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-2} \xi_k^2 + \gamma \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-2} \right. \\ & \quad \left. + C \gamma^{-1} \epsilon^2 \omega(\gamma^{-2} \log S) + \gamma R(\theta, \lambda^0) - W(\theta, \lambda) \right], \\ & = \mathbb{E}_\theta \sup_{t \in T} \left[ (1 + \gamma) \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t))^2 \theta_k^2 + \eta(t) + (1 + \gamma) \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(t) b_k^{-2} \right. \\ & \quad \left. + C \gamma^{-1} \epsilon^2 \omega(\gamma^{-2} \log S) + \gamma R(\theta, \lambda^0) - W(\theta, \lambda) \right], \end{aligned}$$

The process  $\eta(t), t \geq 0$  is ordered. Using (4.5.35):

$$\mathbb{E}_\theta \eta(\tilde{t}) \leq \gamma \epsilon^2 \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(\tilde{t}) b_k^{-2} + C \epsilon^2 \gamma^{-1} L_T \omega(\gamma^{-2} L_T),$$

for some positive constant  $C$  and  $\gamma > 0$ , with,

$$\lambda(\tilde{t}) = \operatorname{argsup}_{t \in T} \left\{ \|\hat{\theta}_\lambda - \theta\|^2 - W(\theta, \lambda) \right\}.$$

This inequality can easily be derived from Lemma 4.6.2 and proof of Corollary 4.6.1. Hence:

$$(4.5.38) \quad \mathbb{E}_\theta \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \|\hat{\theta}_\lambda - \theta\|^2 - W(\theta, \lambda) \right\} \\ \leq \mathbb{E}_\theta \sup_{\lambda \in \Lambda} \left[ (1 + \gamma) \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k^2) \theta_k^2 + (1 + 2\gamma) \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 b_k^{-2} \right. \\ \left. + C \gamma^{-1} \epsilon^2 L_T \omega(\gamma^{-2} L_T) + \gamma R(\theta, \lambda^0) - W(\theta, \lambda) \right] \leq 0.$$

Therefore,  $W(\theta, \lambda)$  can also be considered as a risk hull. Hence, the traditional URE procedure is in some sense a risk hull method. Nevertheless, the hull  $W(\theta, \lambda)$  is rather rough compared to  $V_\alpha(\theta, \lambda)$ . The variability of the problem is neglected.

Using the same principle as in (4.5.26)-(4.5.32) and (4.5.38), we get:

$$(4.5.39) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_\theta R(\theta, \lambda^*) & \leq (1 + \gamma) R(\theta, \lambda) + \gamma \mathbb{E}_\theta R(\theta, \lambda^*) + C \gamma^{-1} \epsilon^2 L_T \omega(\gamma^{-2} L_T) \\ & \quad + \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{2\lambda_k^* - (\lambda_k^*)^2\} \epsilon^2 b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1), \\ & \leq (1 + \gamma) R(\theta, \lambda) + 2\gamma \mathbb{E}_\theta R(\theta, \lambda^*) + C \gamma^{-1} \epsilon^2 L_T \omega(\gamma^{-2} L_T). \end{aligned}$$

Then use (4.5.39), (4.5.38) in order to conclude the proof.  $\square$

## 4.6 Ordered processes

The control of processes like, for instance:

$$(4.6.1) \quad \eta(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^2 \lambda_k^2(t) b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1), \quad t \geq 0 \quad \text{or} \quad \rho(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(t)) \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k, \quad t \geq 0,$$

is rather important in model selection. For all  $t > 0$ , the sequence  $(\lambda_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$  is assumed to be monotone decreasing. These processes are closely related to the behavior of linear estimators.

We will see in this section that they are embedded in a more general class: the ordered processes. These stochastic objects have been introduced in Kneip [50] and are intensively studied in Cao and Golubev [13]. In this section we recall the definition and present some results useful for the proofs of Theorems 4.3.1-4.4.2.

**Definition 4.6.1** *Let  $\zeta(t)$ ,  $t \geq 0$  a separable random process with  $\mathbb{E}\zeta(t) = 0$  and finite variance  $\Sigma^2(t)$ . It is called ordered if for all  $t_2 \geq t_1 \geq 0$ ,*

$$(4.6.2) \quad \Sigma^2(t_2) \geq \Sigma^2(t_1), \quad \text{and} \quad \mathbb{E}[\zeta(t_2) - \zeta(t_1)]^2 \leq \Sigma^2(t_2) - \Sigma^2(t_1).$$

The class of ordered processes is thus rather vast. In particular, it contains the well-known Wiener processes.

**Proposition 4.6.1** *The process  $\eta(t)$ ,  $t \geq 0$ , defined in (4.6.1) is ordered.*

PROOF. For all  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}\eta(t) = 0$  and:

$$\Sigma^2(t) \simeq \epsilon^4 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^4(t) b_k^{-4} = \sigma^2(t).$$

Assume that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_k(t) \rightarrow 1$  as  $t \rightarrow +\infty$  and let  $t_1 \leq t_2$  be fixed. Then  $\sigma^2(t_1) \leq \sigma^2(t_2)$  since, for all  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_k(t_1) \leq \lambda_k(t_2)$ . Moreover,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta(t_1)^2 &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^2 \lambda_k^2(t_1) b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) \right]^2 = \epsilon^4 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^4(t_1) b_k^{-4} \mathbb{E}(\xi_k^2 - 1)^2, \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^2 \lambda_k^2(t_1) b_k^{-2} \epsilon^2 \lambda_k^2(t_2) b_k^{-2} \mathbb{E}(\xi_k^2 - 1)^2, \\ (4.6.3) \quad &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^2 \lambda_k^2(t_1) b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) \right) \times \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^2 \lambda_k^2(t_2) b_k^{-2} (\xi_k^2 - 1) \right) \right] = \mathbb{E}[\eta(t_1)\eta(t_2)]. \end{aligned}$$

The property (4.6.2) is a consequence of (4.6.3). Therefore, the process  $\eta$  is ordered.  $\square$

### 4.6.1 Technical lemmas

The main characteristic of ordered processes is contained in the following lemma.

**Lemma 4.6.1** *Let  $\zeta(t)$ ,  $t \geq 0$  an ordered process and suppose that there exists  $\kappa > 0$  such that*

$$(4.6.4) \quad \varphi(\kappa) \triangleq \sup_{t_1, t_2} \mathbb{E} \exp \left\{ \kappa \frac{\zeta(t_1) - \zeta(t_2)}{\sqrt{\mathbb{E}[\zeta(t_1) - \zeta(t_2)]^2}} \right\} < +\infty.$$

Then, there exists a constant  $C$  depending on  $\kappa$  such that, for all  $S, T > 0$  and all  $p \geq 1$ ,

$$(4.6.5) \quad \mathbb{E} \sup_{s, t \in [S, T]} |\zeta(t) - \zeta(s)|^p \leq C^p p^p \sqrt{\Sigma^2(T) - \Sigma^2(S)}^p.$$

This result is an extension of Lemma 1 of Cao and Golubev [13]. They consider the particular case  $S = 0$ . This lemma is rather important. It may be useful in many situations. In particular, many processes encountered in the proofs of Theorems 4.3.1 and 4.4.1 are ordered and satisfy (4.6.4).

The proof follows essentially the same lines of Cao and Golubev [13]. Nevertheless, we retranscript here for reader convenience.

PROOF. The proof is based on a chaining argument. Let  $S, T > 0$  be fixed. For all  $n \in \mathbb{N}$ , define a sequence of points  $(t_k^n)_{k=0 \dots 2^n - 1}$  on  $[S, T]$  in the following way:

$$\Sigma^2(t_k^n) = \frac{k}{2^n} (\Sigma^2(T) - \Sigma^2(S)) + \Sigma^2(S), \quad k = 0 \dots 2^n - 1.$$

Call  $\mathcal{T}^n$  the set of these points, i.e.  $\mathcal{T}^n = (t_k^n)_{k=0 \dots 2^n - 1}$ . Given a point  $u \in \mathcal{T}^n$ , it is always possible to find a chain  $\tau_l(u) \in \mathcal{T}^l$  for  $l = 0 \dots n$  such that:

- $u = \tau_n(u)$ ,  $S = \tau_0(u)$ ,
- $|\Sigma^2(\tau_l(u)) - \Sigma^2(\tau_{l-1}(u))| \leq 2^{-l} (\Sigma^2(T) - \Sigma^2(S))$ .

Introduce the following notation:

$$\Delta_\zeta(t_1, t_2) = \frac{\zeta(t_1) - \zeta(t_2)}{\sqrt{\Sigma^2(t_1) - \Sigma^2(t_2)}}, \quad \forall t_1, t_2.$$

Since the process  $\zeta(t), t \geq 0$  is ordered, we obtain the following bound:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbb{E} \sup_{u, v \in \mathcal{T}^n} |\zeta(u) - \zeta(v)|^p \right]^{1/p} &\leq 2 \sum_{l=0}^{n-1} \left[ \mathbb{E} \sup_{u \in \mathcal{T}^{l+1}} |\zeta(\tau_{l+1}(u)) - \zeta(\tau_l(u))|^p \right]^{1/p}, \\ &\leq 2 \sum_{l=0}^{n-1} \left[ \mathbb{E} \sup_{u \in \mathcal{T}^{l+1}} |\Delta_\zeta(\tau_{l+1}(u), \tau_l(u))|^p \times \sqrt{\Sigma^2(\tau_{l+1}(u)) - \Sigma^2(\tau_l(u))}^p \right]^{1/p}, \\ &\leq 2 \sqrt{\Sigma^2(T) - \Sigma^2(S)} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-\frac{l}{2}} \left[ \mathbb{E} \sup_{u \in \mathcal{T}^{l+1}} |\Delta_\zeta(\tau_{l+1}(u), \tau_l(u))|^p \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

The goal is now to bound the sum in the previous inequality. For all  $p \geq 1$ , the function

$$L : x \rightarrow L(x) = \log^p(x + e^{p-1}),$$

is concave on  $[0; +\infty)$ . Therefore:

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbb{E} \sup_{u \in \mathcal{T}^{l+1}} |\Delta_\zeta(\tau_{l+1}(u), \tau_l(u))|^p \right]^{1/p} &= \left[ \mathbb{E} \sup_{u \in \mathcal{T}^{l+1}} |\log \exp \Delta_\zeta(\tau_{l+1}(u), \tau_l(u))|^p \right]^{1/p}, \\
&\leq \frac{1}{\kappa} \left[ \mathbb{E} \sup_{u \in \mathcal{T}^{l+1}} \left| \log^p \left\{ e^{\kappa \Delta_\zeta(\tau_{l+1}(u), \tau_l(u))} + e^{p-1} \right\} \right| \right]^{1/p}, \\
&\leq \frac{1}{\kappa} \left[ \mathbb{E} \left| \log^p \left\{ \sup_{u \in \mathcal{T}^{l+1}} e^{\kappa \Delta_\zeta(\tau_{l+1}(u), \tau_l(u))} + e^{p-1} \right\} \right| \right]^{1/p}, \\
&\leq \frac{1}{\kappa} \log \left[ \sum_{u \in \mathcal{T}^{l+1}} \mathbb{E} e^{\kappa \Delta_\zeta(\tau_{l+1}(u), \tau_l(u))} + e^{p-1} \right], \\
&= \frac{(l+1) \log(2) + p - 1 + \log(\varphi(\kappa))}{\kappa},
\end{aligned}$$

where  $\varphi(\kappa)$  is defined in (4.6.4). Therefore, we eventually obtain that:

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbb{E} \sup_{u, v \in \mathcal{T}^n} |\zeta(u) - \zeta(v)|^p \right]^{1/p} &\leq 2\sqrt{\Sigma^2(T) - \Sigma^2(S)} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l/2} \frac{Cl + Cp}{\kappa}, \\
&\leq 2C\sqrt{\Sigma^2(T) - \Sigma^2(S)} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l/2} (l + p), \\
&\leq Cp\sqrt{\Sigma^2(T) - \Sigma^2(S)},
\end{aligned}$$

where  $C$  denotes a positive constant independent of  $n$ . Using the separability of the process  $\zeta(t)$ ,  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
&\left[ \mathbb{E} \sup_{u, v \in \mathcal{T}^n} |\zeta(u) - \zeta(v)|^p \right]^{1/p} \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left[ \mathbb{E} \sup_{u, v \in \mathcal{T}^n} |\zeta(u) - \zeta(v)|^p \right]^{1/p} \leq Cp\sqrt{\Sigma^2(T) - \Sigma^2(S)}.
\end{aligned}$$

□

The following result is a consequence of the previous lemma.

**Lemma 4.6.2** *Let  $\zeta(t)$ ,  $t \geq 0$  be an ordered process satisfying (4.6.4) such that  $\zeta(0) = 0$  and  $t^*$  measurable with respect to  $\zeta$ . Then there exists a positive constant  $C$  depending on  $\kappa$  and  $\tau > 0$  such that for all  $K > 1$ :*

$$\mathbb{E}|\zeta(t^*)| \leq \log^2(K)\mathbb{E}\Sigma(t^*) + C\frac{\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}}{K}.$$

PROOF. First remark that:

$$\begin{aligned}
(4.6.6) \quad \mathbb{E}\zeta(t^*) &= \mathbb{E}\zeta(t^*)\mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \leq (\log K)^2 \Sigma(t^*)\}} + \mathbb{E}\zeta(t^*)\mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq (\log K)^2 \Sigma(t^*)\}}, \\
&\leq (\log K)^2 \mathbb{E}\Sigma(t^*) + \mathbb{E}\zeta(t^*)\mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq (\log K)^2 \Sigma(t^*)\}}.
\end{aligned}$$

We can assume without loss of generality that  $\Sigma(t) \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow +\infty$ . Let  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  the real sequence verifying:

$$(4.6.7) \quad \Sigma(t_k) = k^d \frac{\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}}{K}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

where  $d > 0$  will be chosen later. Using Lemma 4.6.1, it is then possible to see that:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \\ &= \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t^* < t_1\}} + \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}}, \\ &\leq \mathbb{E} \sup_{t < t_1} |\zeta(t)| + \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}}, \\ &\leq \Sigma(t_1) + \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}}, \\ &= \frac{\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}}{K} + \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}}. \end{aligned}$$

Let  $p \in \mathbb{N}$  such that  $1 < p < 2$ . Using a Hölder inequality:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t \in [t_k, t_{k+1}]\}}, \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[ \Sigma^p(t^*) \frac{\zeta(t^*)}{\Sigma^p(t^*)} \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t \in [t_k, t_{k+1}]\}} \right], \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} [\mathbb{E}\Sigma^{pr}(t^*)]^{1/r} \times \left[ \mathbb{E} \frac{|\zeta(t^*)|^s}{\Sigma^{ps}(t^*)} \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t \in [t_k, t_{k+1}]\}} \right]^{1/s}, \end{aligned}$$

where  $r$  and  $s$  are such that  $r^{-1} + s^{-1} = 1$ . In the following, set  $r = 2/p$  and  $s = 2/(2-p)$ . Such a choice leads to:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^p \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{\mathbb{E} \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\zeta(t)|^s}{\Sigma^{ps}(t_k)} \mathbf{1}_{\{\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\zeta(t)| \geq \log^2(K)\Sigma(t_k)\}} \right]^{1/s}. \end{aligned}$$

Let  $q > 0$  which will be chosen later. Using a Markov inequality and Lemma 4.6.1, we eventually obtain:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\zeta(t^*) \mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq (\log K)\Sigma(t^*)\}} \mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^p \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{\mathbb{E} \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\zeta(t)|^{s+q}}{\Sigma^{ps+q}(t_k)} \times \frac{1}{(\log K)^{2q}} \right]^{1/s}, \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^p \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{C(s+q)^{(s+q)\Sigma^{s+q}(t_{k+1})}}{\Sigma^{ps+q}(t_k)} \times \frac{1}{(\log K)^{2q}} \right]^{1/s}. \end{aligned}$$

Now, use (4.6.7) in order to obtain:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\zeta(t^*)\mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq (\log K)\Sigma(t^*)\}}\mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}} \\
& \leq \sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^p \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{C(s+q)^{(s+q)}(k+1)^{d(s+q)}\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^{s+q}K^{-(s+q)}}{k^{d(ps+q)}\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^{ps+q}K^{-(ps+q)}} \times \frac{1}{(\log K)^{2q}} \right]^{1/s}, \\
& \leq \sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^p \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{C(s+q)^{(s+q)}2^{d(s+q)}K^{s(p-1)}}{k^{ds(p-1)}\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^{s(p-1)}} \times \frac{1}{(\log K)^{2q}} \right]^{1/s}, \\
& = \frac{\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^p}{\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}^{p-1}} \times \frac{1}{K} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{d(p-1)}} \left[ \frac{C(s+q)^{(s+q)}2^{d(s+q)}K^{sp}}{(\log K)^{2q}} \right]^{1/s},
\end{aligned}$$

Setting for instance  $d = 2/(p-1)$ ,

$$\mathbb{E}\zeta(t^*)\mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}}\mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}} \leq C \frac{\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}}{K} \times \frac{q^{q/s}2^{dq}K^p}{(\log K)^{2q/s}}.$$

Recall that the parameter  $1 < p < 2$  is fixed. Set  $q = s \log K$ . Therefore:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\zeta(t^*)\mathbf{1}_{\{\zeta(t^*) \geq \log^2(K)\Sigma(t^*)\}}\mathbf{1}_{\{t^* > t_1\}} \\
& \leq C \frac{\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}}{K} \times \frac{K^p(\log K)^{\log K}2^{d \log K/s}}{(\log K)^{2 \log K}}, \\
& = C \frac{\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}}{K} \times \left( \frac{e^p 2^d}{\log K} \right)^{\log K} \leq C \frac{\sqrt{\mathbb{E}\Sigma^2(t^*)}}{K},
\end{aligned}$$

for some  $C > 0$  independant of  $K$ . This concludes the proof of Lemma 4.6.2.  $\square$

**Corollary 4.6.1** *Let  $\hat{t} > 0$  measurable w.r.t. the sequence  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  and  $t^0$  the oracle defined in (4.3.5). For all  $\gamma > 0$ , the following inequalities hold:*

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(\hat{t})\theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k \leq \gamma \mathbb{E}_\theta R_\epsilon(\theta, \hat{\lambda}) + \gamma R_\epsilon(\theta, \lambda_0) + C\epsilon^2 \gamma^{-1} \omega(\gamma^{-2}), \\
\text{(ii)} \quad & \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k(\hat{t}))^2 \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k \leq \gamma \mathbb{E}_\theta R_\epsilon(\theta, \hat{\lambda}) + \gamma R_\epsilon(\theta, \lambda_0) + C\epsilon^2 \gamma^{-1} \omega(\gamma^{-2}),
\end{aligned}$$

for some  $C > 0$  independant of  $\epsilon$ .

PROOF. In a first time introduce:

$$(4.6.8) \quad \Delta^\epsilon[\lambda] = \epsilon^2 \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^2 b_k^{-2}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

First prove inequality (i).

$$\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(\hat{t})\theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k = \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{\lambda_k^2(\hat{t}) - \lambda_k^2(t_0)\}\theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k.$$

The process:

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \{\lambda_k^2(t) - \lambda_k^2(t_0)\} \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k, \quad t > 0,$$

is ordered on  $[t_0; +\infty[$ . Moreover,  $\tilde{\rho}(t) = \rho(t^{-1})$ ,  $t \geq 0$  is also ordered on  $[t_0^{-1}; +\infty[$ . Both processes satisfy (4.6.4) for some  $\kappa > 0$ . Hence, using Lemma 4.6.2 with  $K = \sqrt{S}$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(\hat{t}) \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k \\ & \leq \log^2 S \mathbb{E}_\theta \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \{\lambda_k^2(t_0) - \lambda_k^2(\hat{t})\}^2 \theta_k^2 \epsilon^2 b_k^{-2}} + \frac{C}{\sqrt{S}} \sqrt{\mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \{\lambda_k^2(t_0) - \lambda_k^2(\hat{t})\}^2 \theta_k^2 \epsilon^2 b_k^{-2}}, \end{aligned}$$

where  $\lambda^0 = \lambda(t_0)$  is the oracle defined in (4.3.5) and  $C$  a positive constant independent of  $\epsilon$ . Then, remark that the following inequality holds:

$$\begin{aligned} \{\lambda_k^2(t_0) - \lambda_k^2(\hat{t})\}^2 &= [(1 - \lambda_k(\hat{t})) - (1 - \lambda_k(t_0))]^2 (\lambda_k(\hat{t}) + \lambda_k(t_0))^2, \\ &\leq 4 \left[ (1 - \lambda_k(\hat{t}))^2 + (1 - \lambda_k(t_0))^2 \right] [\lambda_k^2(t_0) + \lambda_k^2(\hat{t})]. \end{aligned}$$

For all  $\gamma > 0$ , using the elementary inequality  $2ab \leq \gamma a^2 + \gamma^{-1} b^2$ , we obtain:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2(\hat{t}) \theta_k \epsilon b_k^{-1} \xi_k \\ & \leq \gamma \mathbb{E}_\theta \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \hat{\lambda}_k)^2 \theta_k^2 + D \gamma^{-1} \log^2 S \mathbb{E}_\theta \Delta^\epsilon[\hat{\lambda}] + \gamma \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \lambda_k^0)^2 \theta_k^2 + D \gamma^{-1} \log^2 S \Delta^\epsilon[\lambda^0], \end{aligned}$$

for some positive constant  $D$ . With simple algebra, for all  $x > 0$  and  $\lambda \in \Lambda$ :

$$\begin{aligned} D \gamma^{-1} \log^2 S \Delta^\epsilon[\lambda] &\stackrel{\triangle}{=} D \gamma^{-1} \log^2 S \epsilon^2 \sup_k \lambda_k^2 b_k^{-2}, \\ (4.6.9) \quad &\leq D \gamma^{-1} \log^2 S x^{-1} \epsilon^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k b_k^{-2} + D \gamma^{-1} \log^2 S \epsilon^2 \omega(x), \end{aligned}$$

where the function  $\omega$  is introduced in (4.3.6) and computed for some particular examples in Section 3.2. Then set  $x = D \gamma^{-2} \log^2 S$  in order to obtain (i).

The proof of (ii) exactly follows the same lines. It uses in particular Corollary 1 and inequality (34) of Cavalier et al. [16].

□

## 4.6.2 Additional results

From the different results presented previously, it is clear that ordered processes may play an important role in model selection. We present in this section some additional



results that may be useful for further investigations. These results generalize Lemma 2 of Cao and Golubev [13].

**Lemma 4.6.3** *Let  $\zeta(t)$ ,  $t \geq 0$  an ordered process satisfying (4.6.4) and  $\zeta(0) = 0$ . For all  $p > 1$ , there exists a constant  $C = C(p)$  such that for all  $\gamma > 0$ :*

$$\mathbb{E} \sup_{t \geq 0} [\zeta(t) - \gamma \Sigma^p(t)]_+ \leq \frac{C(p)}{\gamma}.$$

PROOF. Once a time, we can assume without loss of generality that  $\Sigma(t) \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow +\infty$ . Let  $(t_k(\gamma))_{k \in \mathbb{N}}$  the sequence defined by:

$$\Sigma(t_k(\gamma)) = \frac{k}{\gamma}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

For all  $p > 1$ , the function  $f : x \mapsto f(x) = x^p \mathbf{1}_{x > x_0}$  is monotone on  $\mathbb{R}^+$ . Hence,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{t \geq 0} [\zeta(t) - \gamma \Sigma^p(t)]_+ \\ & \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \sup_{t \in [t_k(\gamma), t_{k+1}(\gamma)[} [\zeta(t) - \gamma \Sigma^p(t)]_+, \\ & \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \sup_{t \in [t_k(\gamma), t_{k+1}(\gamma)[} \zeta(t) \mathbf{1}_{\{\zeta(t) \geq \gamma \Sigma^p(t)\}}, \\ & \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \sup_{t \in [t_k(\gamma), t_{k+1}(\gamma)[} \zeta(t) \mathbf{1}_{\{\sup_{t \in [t_k(\gamma), t_{k+1}(\gamma)[} \zeta(t) \geq \gamma \Sigma^p(t_k(\gamma))\}}, \\ (4.6.10) \quad & \mathbb{E}_\theta \sup_{0 \leq t \leq t_1(\gamma)} |\zeta(t)| + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E} \sup_{t \in [t_k(\gamma), t_{k+1}(\gamma)[} \zeta(t) \mathbf{1}_{\{\sup_{t \in [t_k(\gamma), t_{k+1}(\gamma)[} \zeta(t) \geq \gamma \Sigma^p(t_k(\gamma))\}}. \end{aligned}$$

First, using Lemma 4.6.1:

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq t_1(\gamma)} |\zeta(t)| \leq C \sigma(t_1(\gamma)) = \frac{C}{\gamma}.$$

In order to bound the sum in the right hand side of (4.6.10), use a Markov inequality:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E} \sup_{t \in [t_k(\gamma), t_{k+1}(\gamma)[} \zeta(t) \mathbf{1}_{\{\sup_{t \in [t_k(\gamma), t_{k+1}(\gamma)[} \zeta(t) \geq \gamma \Sigma^p(t_k(\gamma))\}} \\ & \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E} \sup_{t \in [0, t_{k+1}(\gamma)]} |\zeta(t)|^{1+q}}{(\gamma \Sigma^p(t_k(\gamma)))^q} \leq C \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Sigma^{1+q}(t_{k+1}(\gamma))}{\gamma^q \Sigma^{pq}(t_k(\gamma))}. \end{aligned}$$

Hence, we eventually obtain:

$$\mathbb{E} \sup_t [\zeta(t) - \gamma \Sigma^p(t)]_+ \leq \frac{C}{\gamma} + C \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)^{1+q}}{\gamma^{1+2q}} \times \frac{\gamma^q}{k^{pq}} \leq \frac{C}{\gamma} + \frac{C}{\gamma^{1+q}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{pq-1-q}}.$$

In order to conclude the proof, choose  $q$  verifying:

$$pq - 1 - q > 1 \Leftrightarrow q > \frac{2}{p-1}.$$

□

The following lemma permits to control the variability of an ordered process from a given point  $S$ .

**Lemma 4.6.4** *Let  $\zeta(t)$ ,  $t \geq 0$  an ordered process satisfying (4.6.4) and  $\zeta(0) = 0$ . For all  $p > 1$ , there exists a constant  $C = C(p)$  such that for all  $\gamma > 0$ :*

$$\mathbb{E} \sup_{t \geq 0} [\zeta(t + S) - \zeta(t) - \gamma(\Sigma^2(t + S) - \Sigma^2(t))]_+^p \leq \frac{C(p)}{\gamma^p}.$$

PROOF. The proof follows exactly the same lines as in the previous lemma, up to some minor change. In particular, the sequence  $(t_k(\alpha))_{k \in \mathbb{N}}$  is chosen so that:

$$\Sigma^2(t_k(\gamma) + S) - \Sigma^2(S) = \frac{k^2}{\gamma^2}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

□

# Conclusion et perspectives

Les problèmes inverses font l'objet d'une étude statistique intensive. A ce jour, de nombreuses questions restent ouvertes, certaines d'entre elles étant étroitement liées aux thématiques étudiées dans cette thèse. Nous proposons dans ce qui suit quelques pistes de recherche possibles.

## Représentation d'un problème inverse

Nous avons pu voir dans les Chapitres 1 et 2 que le choix d'un jeu de bases (ou plus généralement d'un support) permettant la régularisation d'un problème inverse était relativement délicat. D'un côté, il est nécessaire de trouver une représentation convenable pour la fonction étudiée, c'est-à-dire permettant de l'approximer avec un minimum de coefficients. Par ailleurs, il faut s'assurer que l'opérateur puisse être convenablement représenté. Le compromis idéal n'existe certainement pas, bien que de nombreux auteurs aient proposé des solutions intéressantes.

Le choix d'une représentation est souvent motivé par la connaissance a priori de certaines caractéristiques fondamentales concernant la fonction  $f$ : discontinuité, périodicité pour un problème d'intégration fractionnaire (cf Annexe B), etc... En pratique, ce type d'information n'est bien sûr pas connu à l'avance. Il serait donc intéressant de sélectionner, à partir des observations, la représentation la plus adéquate. Ceci revient en quelque sorte à utiliser un formalisme aléatoire. Ce type d'approche a déjà été étudié dans le cas direct par Donoho and Johnstone [26]. Ces derniers proposent de se procurer une "bibliothèque" de bases et de choisir parmi celles-ci la plus adéquate à partir des observations. Il serait intéressant de développer une approche similaire pour l'étude de problèmes inverses. On pourrait alors imaginer pouvoir choisir aléatoirement un formalisme parmi la SVD, la WVD,... ou tout autre représentation existante.

## Opérateur bruité

Les travaux de Efromovich and Koltchinskii [29], Cavalier and Hengartner [19] ou encore Hoffmann and Reiß [40] ont montré que la régularisation d'un problème inverse avec un opérateur inconnu était tout-à-fait réalisable. Les Chapitres 2 et 3 viennent confirmer ce fait. Cependant, certaines simulations numériques présentées dans le Chapitre 3 mettent

en avant quelques limitations liées à l'utilisation d'un opérateur bruité.

En premier lieu, il apparaît clairement que l'estimation est affectée quand le terme  $\epsilon^2 \sigma^{-2} \|\theta\|^2$  prend de grandes valeurs. En ajoutant du bruit dans l'opérateur, on crée en fait une perturbation supplémentaire. Ceci explique en partie les résultats obtenus dans cette thèse. Il serait donc utile de chercher à savoir si cette erreur est incontournable (par l'intermédiaire d'une borne inférieure) ou s'il est possible de développer une approche permettant de s'affranchir, au moins en partie, de cette perturbation.

Par ailleurs, l'approche retenue jusqu'à présent est très asymptotique. La régularisation est relativement limitée pour de grandes valeurs de  $\sigma$  et ne permet pas d'estimer un nombre suffisant de coefficients. Il serait donc intéressant de chercher à améliorer l'estimation de la suite  $(b_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ . En effet, l'approximation proposée par Cavalier and Hengartner [19] consiste à utiliser une sorte d'estimation par projection, le nombre d'observations retenues étant choisi à l'aide d'un seuillage (très) dur:

$$\hat{b}_k^{-1} = \begin{cases} x_k^{-1}, & k \leq M, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour:

$$M = \inf\{k : |x_k| \leq \sigma \log \sigma^{-1}\}.$$

D'un point de vue asymptotique (c'est-à-dire pour de petites valeurs de  $\sigma$ ), ce critère convient tout à fait. Estimer  $(b_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$  est en quelque sorte plus "facile" que la suite  $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Quand le problème est très mal-posé et que  $\sigma$  prend de grandes valeurs, la quantité  $M$  s'avère souvent bien trop petite. Ceci est en partie illustré par les simulations du Chapitre 3. Intuitivement, si on propose une estimation plus précise de la suite  $(b_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ , on devrait pouvoir estimer plus de coefficients. Il serait ainsi intéressant de se tourner vers des estimateurs du type:

$$\hat{b}_k^{-1} = \mu_k x_k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Un choix possible pour  $\mu_k$  (avec un parallèle intéressant avec l'estimateur de James-Stein) serait:

$$\mu_k = \left(1 - \frac{\sigma^2 \log^2(\sigma^{-1})}{x_k^2}\right)_+, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ceci revient donc à utiliser une approche non-linéaire pour l'estimation de la suite de valeurs propres. Ce type d'estimateur pourrait également produire des résultats intéressants pour des problèmes où la suite de valeurs propres décroît de manière très irrégulière.

## Enveloppe du risque

Le concept de l'enveloppe du risque initié par Cavalier and Golubev [17] a apporté un tout nouveau point de vue pour la thématique de la "sélection de modèle". En premier lieu, il permet une meilleure compréhension du modèle statistique du bruit blanc gaussien, largement utilisé pour la modélisation des problèmes inverses. En mettant en avant la variabilité de ce dernier, inhérente à tout processus stochastique, il a été possible de développer des pénalités prenant en compte les spécificités de ce modèle. Cette approche a été reprise dans le Chapitre 4 et étendue à une large gamme d'estimateurs. Par ailleurs,

Cavalier and Golubev [17] ont montré que la méthode traditionnelle d'estimation du risque sans biais (et par là même ses variantes pénalisées) pouvait être vue comme découlant de la minimisation d'une enveloppe.

Ce concept a de grandes chances de pouvoir s'exporter à des modèles statistiques connexes. On pourrait penser par exemple à la régression à l'aide de splines, l'estimation de densité, etc... Il serait en particulier intéressant de considérer la régularisation de problèmes inverses dans le modèle continu, étudiés par exemple par Bissantz et al. [9]. Il est vraisemblable que le concept de l'enveloppe du risque puisse être étendu à ce point de vue.

Soit  $\Phi_t$ ,  $t \geq 0$  une méthode de régularisation. Pour toute fonction  $f \in H$ , la perte de l'estimateur associé est donnée par:

$$l(f, \Phi_t) = \|(\Phi_t(A^*A)A^*A - I)f\|^2 + \epsilon^2 \|\Phi_t(A^*A)A^*\xi\|^2.$$

Il serait donc tout naturel de s'orienter vers une enveloppe du type:

$$V_\alpha(f, \Phi_t) = \|(\Phi_t(A^*A)A^*A - I)f\|^2 + \epsilon^2 \mathbb{E} \|\Phi_t(A^*A)A^*\xi\|^2 + (1 + \alpha)U_0(\Phi_t).$$

Dans la mesure où:

$$\mathbb{E} \|\Phi_t(A^*A)A^*\xi\|^2 = \text{Tr}(\Phi_t(A^*A)A^*A\Phi_t(A^*A)^*),$$

la construction d'une enveloppe reprenant les grands principes de l'approche SVD devrait être possible.

### **Tikhonov et recuit simulé**

Le Chapitre 4 propose une nouvelle approche pour le choix du paramètre de Tikhonov à partir de la méthode RHM. Cette approche est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle dépendant uniquement des observations. Utilisant une grille sur  $\mathbb{R}^+$ , cette méthode propose un paramètre très proche de l'oracle sur cette même grille. Cependant, nous avons pu voir que cette dernière était souvent trop petite, en particulier quand le problème est très mal-posé. Il serait donc intéressant de pouvoir travailler avec de plus grandes grilles et ainsi se rapprocher un peu plus de l'oracle "absolu". Ceci n'est pas faisable avec la méthode actuelle, l'étape de minimisation étant bornée par le temps de calcul. Dès lors, il faudrait réfléchir à un moyen de diminuer ce dernier.

Pour parvenir à cet objectif, l'algorithme de Recuit-Simulé semble être un bon candidat. Il faudrait simplement s'intéresser au nombre d'itérations nécessaire et à la valeur de la "température" en fonction des caractéristiques de notre critère permettant de garantir une qualité d'estimation satisfaisante.



## Annexe A

# WVD et estimateur de Stein par blocs pénalisé

Dans Cavalier and Tsybakov [21], les performances minimax de l'estimateur de Stein par blocs pénalisé sont étudiées sur des ellipsoïdes dans  $L^2$ , et ce dans le cadre SVD. Nous avons vu qu'il était possible d'étendre cette méthode et ces résultats à des représentations matricielles (cf Chapitre 2).

Cet estimateur peut également être utilisé conjointement à une décomposition ondelettes-vaguelettes (WVD). En particulier, ce dernier atteint la vitesse minimax de convergence, à un terme logarithmique près, sur des espaces de Besov.

On travaillera par la suite avec  $H = K = L^2(0,1)$ . Soient  $\mathbb{Z}_j = \{1, \dots, 2^j\}$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , et  $(\psi_{jk})_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_j}$  une base d'ondelettes. Toute fonction  $f \in H$  peut être représentée sous la forme:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{2^j} \theta_{kl} \psi_{kl}, \text{ avec } \theta_{kl} = \langle f, \psi_{kl} \rangle.$$

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_j$ , posons  $i = 2^j + k - 1$ ,  $\theta_i = \theta_{kl}$  et  $\psi_i = \psi_{kl}$ . Il est alors possible d'écrire:

$$(A.0.1) \quad f = \sum_{i=1}^{+\infty} \theta_i \psi_i.$$

Nous utiliserons l'une ou l'autre de ces expressions suivant le contexte. Par la suite, on s'intéresse aux espaces de Besov. Ces espaces fonctionnels sont définis par:

$$\Theta = \mathcal{B}_{p,q}^s(Q) = \left\{ \theta = (\theta_{jk})_{jk} : \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{jq(s+1/2-1/p)} \left( \sum_{k=1}^{2^j} |\theta_{jk}|^p \right)^{q/p} \leq Q \right\},$$

pour  $Q > 0$ ,  $1 \leq p, q < \infty$  et  $s+1/2-1/p > 0$ . Les fonctions contenues dans ce type d'espace sont typiquement très irrégulières, voire discontinues. Il est donc intéressant d'étudier les performances d'une méthode donnée sur de tels espaces dans la mesure où l'estimation est "difficile". En particulier, il est démontré que pour  $p$  et  $q$  plus petits que 2, les performances

des méthodes linéaires en  $Y$  sont largement en deçà de celles des estimateurs non-linéaires. L'estimateur de Stein par blocs pénalisé est non-linéaire, bien qu'il soit construit à partir de méthodes linéaires. Nous allons voir que les performances de cette procédure sont les mêmes que celles des méthodes utilisant le principe du seuillage (cf Section 1.4.4), couramment utilisées dans la littérature ondelettes.

A l'aide de la WVD introduite dans le Chapitre 1 (cf Section 1.3.2), chaque fonction  $f$  appartenant à  $\mathcal{B}_{p,q}^s(Q)$  peut-être exprimée sous la forme:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_j} \theta_{jk} \psi_{jk} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_j} \kappa_j^{-1} \langle Af, u_{jk} \rangle \psi_{jk}.$$

A partir des observations  $Y = Af + \epsilon \xi$ , on peut construire des estimateurs du type:

$$\hat{f} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_j} \lambda_{jk} \kappa_j^{-1} \langle Y, u_{jk} \rangle \psi_{jk},$$

où  $(\lambda_{jk})_{jk}$  est un filtre. Souvent, ce dernier dépend seulement du niveau de résolution  $j$ . En utilisant les propriétés du bruit blanc Gaussien,

$$(A.0.2) \quad \mathbb{E}_\theta \|\hat{f} - f\|^2 \leq R(\theta, \lambda) \triangleq \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_j} (1 - \lambda_{jk})^2 \theta_{jk}^2 + \epsilon^2 \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_j} \lambda_{jk}^2 \kappa_j^{-2}.$$

Nous supposons par la suite que  $\kappa_j^{-1} \simeq 2^{j\beta}$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . Cette hypothèse revient en quelque sorte à demander un comportement polynomial de degré  $\beta$  pour la suite de valeurs propres  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Nous utiliserons souvent la suite  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  définie par:

$$(A.0.3) \quad e_i = \kappa_j, \forall i \in \{2^j, \dots, 2^{j+1} - 1\}, j \in \mathbb{N}.$$

Avec ces notations, il est possible d'exprimer  $R(\theta, \lambda)$  sous la forme:

$$R(\theta, \lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} (1 - \lambda_i)^2 \theta_i^2 + \epsilon^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 e_i^{-2},$$

en posant  $\theta_i = \theta_{jk}$ ,  $\lambda_i = \lambda_{jk}$  pour  $j \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^j$  et  $i = 2^j + k - 1$ .

Pour la construction de l'estimateur  $\theta^*$ , nous utiliserons des blocs dépendant uniquement du niveau de bruit  $\epsilon$ . Pour tout entier  $l$ , la longueur  $T_l$  de chaque bloc  $I_l$  est:

$$(A.0.4) \quad T_l = \lceil C^* \log \epsilon^{-1} \Lambda(\epsilon^{-1}) \rceil, \text{ pour } \Lambda(\epsilon^{-1}) = \log(2 + \epsilon^{-1}).$$

La pénalité associée est  $\varphi_j = \Lambda(\epsilon^{-1})^{-1/2}$ . Il est alors possible sous ces conditions de démontrer que les hypothèses A1 et A2 de Cavalier and Tsybakov [22] sont vérifiées. Soit  $\theta^*$  l'estimateur de Stein par bloc pénalisé associé. A l'aide de la Proposition 1 de ce même article, on obtient:

$$(A.0.5) \quad \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 \leq C \left( \inf_{\lambda \in \Lambda^*} R(\lambda, \theta) + \epsilon^2 \right),$$



où  $\Lambda^*$  représente l'ensemble des filtres constants par blocs sur  $(I_l)_{l=1\dots J}$  et  $C$  est une constante positive indépendante de  $\epsilon$ .

Afin d'étudier le comportement du risque quadratique de  $\theta^*$ , introduisons:

$$K_\epsilon = \epsilon^{-\frac{2}{2s+2\beta+1}} (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log \epsilon^{-1})^{\frac{2-p}{p(2s+2\beta+1)}},$$

et  $J_\omega$  tel que  $2^{J_\omega} \leq K_\epsilon < 2^{J_\omega+1}$ . Intuitivement,  $K_\epsilon$  correspond à la longueur de bande optimale pour un estimateur par projection sur l'espace  $\mathcal{B}_{p,q}^s(Q)$ . Le terme  $J_\omega$  représente le niveau de résolution associé. Définissons également  $J_b = \min\{l : K_{l-1} > 2^{J_\omega}\}$ : c'est le rang du premier bloc contenu dans le niveau  $J_\omega$ . En utilisant (A.0.5),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 &\leq c \left( \epsilon^2 \sum_{l=1}^{J_b} \sum_{k \in I_l} e_k^{-2} + \sum_{l=J_b}^J \frac{\sigma_l^2 \|\theta\|_{(j)}^2}{\sigma_l^2 + \|\theta\|_{(j)}^2} + \sum_{k>N} \theta_k^2 + \epsilon^2 \right), \\ (A.0.6) \quad &\stackrel{\triangle}{=} A_\epsilon + B_\epsilon + C_\epsilon + c\epsilon^2, \end{aligned}$$

pour  $\|\theta\|_{(j)}^2 = \sum_{k \in I_j} \theta_k^2$  et  $\sigma_j^2 = \epsilon^2 \sum_{k \in I_j} e_k^{-2}$ . Nous allons majorer séparément les trois termes  $A_\epsilon$ ,  $B_\epsilon$  et  $C_\epsilon$ .

**Majoration de  $A_\epsilon$ .** En utilisant (A.0.3), le terme  $A_\epsilon$  peut être écrit sous la forme:

$$A_\epsilon = \epsilon^2 \sum_{l=1}^{J_b} \sum_{k \in I_l} e_k^{-2} = \epsilon^2 \sum_{k=1}^{K_{J_b-1}} e_k^{-2}$$

Par définition,  $K_{J_b-1} \in \{2^{J_\omega}, \dots, 2^{J_\omega+1} - 1\}$  (au pire pour  $\epsilon$  suffisamment petit). Dans ce cas, le degré du problème inverse étant  $\beta$ ,  $e_k^{-2} \leq c2^{2J_\omega\beta}$  pour tout  $k \in \{1, \dots, K_{J_b-1}\}$ . On obtient ainsi que:

$$A_\epsilon \leq C\epsilon^2 \sum_{k=1}^{K_{J_b-1}} 2^{2J_\omega\beta} \leq C\epsilon^2 K_{J_b-1} \times 2^{2J_\omega\beta},$$

cette dernière inégalité menant à la majoration:

$$(A.0.7) \quad A_\epsilon \leq C\epsilon^2 2^{J_\omega(2\beta+1)} \leq C\epsilon^2 K_\epsilon^{2\beta+1} \simeq \epsilon^{\frac{4s}{2\beta+2s+1}} (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log \epsilon^{-1})^{(2\beta+1)\frac{2-p}{p(2s+2\beta+1)}}.$$

**Majoration de  $B_\epsilon$ .** La majoration de ce dernier constitue la principale difficulté. Tout d'abord, remarquons que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ :

$$\sigma_j^2 \|\theta\|_{(j)}^2 = \sigma_j^{2-p} \|\theta\|_{(j)}^p \times \sigma_j^p \|\theta\|_{(j)}^{2-p} \leq \sigma_j^{2-p} \|\theta\|_{(j)}^p (\sigma_j^2 + \|\theta\|_{(j)}^2).$$

Ainsi,

$$B_\epsilon = \sum_{l=J_b}^J \frac{\sigma_l^2 \|\theta\|_{(l)}^2}{\sigma_l^2 + \|\theta\|_{(l)}^2} \leq \sum_{l=J_b}^J \sigma_l^{2-p} \|\theta\|_{(l)}^p.$$

Or, la suite  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  étant croissante,

$$\sigma_l^2 = \epsilon^2 \sum_{k \in I_l} e_k^{-2} \leq C\epsilon^2 (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log \epsilon^{-1}) e_{K_{l-1}}^{-2}.$$

Puisque  $p < 2$ , on obtient ainsi, en utilisant l'inégalité de Jensen, que:

$$\begin{aligned} B_\epsilon &\leq C\epsilon^{2-p} (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log \epsilon^{-1})^{1-p/2} \times \sum_{l=J_b}^J e_{K_{l-1}}^{(2-p)} \|\theta\|_{(l)}^p, \\ &\leq C\epsilon^{2-p} (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log(\epsilon^{-1}))^{1-p/2} \times \sum_{l=J_b}^J e_{K_{l-1}}^{(2-p)} \sum_{k=K_{l-1}}^{K_l} |\theta_k|^p, \\ &= g(\epsilon) \sum_{l=J_b}^J e_{K_{l-1}}^{(2-p)} \sum_{k=K_{l-1}}^{K_l} |\theta_k|^p, \text{ pour } g(\epsilon) = C\epsilon^{2-p} (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log(\epsilon^{-1}))^{1-p/2}. \end{aligned}$$

Soit  $l > J_b$  fixé. Il existe  $j_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $K_l \in \{2^{j_1}, \dots, 2^{j_1} - 1\}$ . Première possibilité:  $K_{l-1} \in \{2^{j_1}, \dots, 2^{j_1} - 1\}$ . Dans ce cas, par définition,  $e_{K_l} = e_k$  pour tout  $k \in \{K_{l-1}, K_l - 1\}$ . Si maintenant  $K_{l-1} < 2^{j_1}$ ,  $e_{K_{l-1}}^{-1} = \kappa_{j_1}^{-1} \simeq 2^{j_1\beta}$  et donc logiquement,  $e_{K_{l-1}}^{-1} \leq 2^{2\beta} e_{K_{l-1}}^{-1}$ . Finalement:

$$B_\epsilon \leq g(\epsilon) \sum_{l=J_b}^J \sum_{k=K_{l-1}}^{K_l} e_k^{(2-p)} |\theta_k|^p \leq g(\epsilon) \sum_{k=2^{J_\omega}}^{+\infty} e_k^{(2-p)} |\theta_k|^p.$$

En repassant à la configuration dyadique:

$$(A.0.8) \quad B_\epsilon \leq g(\epsilon) \sum_{j=J_\omega}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^j} |\theta_{jk}|^p \kappa_j^{-(2-p)}.$$

On va maintenant s'intéresser à la majoration de la somme dans (A.0.8). Pour tout entier  $j$ , le problème inverse étant de degré  $\beta$ ,  $\kappa_j^{-2} \simeq 2^{2j\beta}$ . Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on obtient donc que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^j} |\theta_{jk}|^p \kappa_j^{-(2-p)} &\leq 2^{j\beta(2-p)} \sum_{k=1}^{2^j} |\theta_{jk}|^p, \\ &\leq Q^{p/q} 2^{-pj(s+1/2-1/p)} 2^{j\beta(2-p)}, \\ &= Q^{p/q} 2^{-j[p(s+1/2-1/p)-\beta(2-p)]}. \end{aligned}$$

On obtient finalement que:

$$B_\epsilon \leq g(\epsilon) 2^{-J_\omega[p(s+1/2-1/p)-\beta(2-p)]} = g(\epsilon) K_\epsilon^{-[p(s+1/2-1/p)-\beta(2-p)]}.$$

Avec les choix de  $K_\epsilon$  et  $g(\epsilon)$ :

$$\begin{aligned} B_\epsilon &\leq C\epsilon^{2-p} (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log \epsilon^{-1})^{1-p/2} \times \epsilon^{\frac{2}{2s+2\beta+1}[p(s+1/2-1/p)-\beta(2-p)]} \\ &\quad \times (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log \epsilon^{-1})^{-\frac{2-p}{p(2s+2\beta+1)}[p(s+1/2-1/p)-\beta(2-p)]}, \\ &\leq C\epsilon^{\frac{4s}{2s+2\beta+1}} \times (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log \epsilon^{-1})^{\frac{(2-p)(2\beta+1)}{p(2s+2\beta+1)}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les majorations obtenues pour  $A_\epsilon$  et  $B_\epsilon$  sont exactement du même ordre à un terme logarithmique près.

**Majoration de  $C_\epsilon$ .** Afin de pouvoir conclure, il reste à majorer le troisième terme  $C_\epsilon$ . Cette opération a déjà été effectuée dans Cavalier and Tsybakov [22]. Il existe un entier  $j_1$  tel que  $2^{j_1} \sim N > \epsilon^{-2-\gamma}$ , pour  $\gamma > 0$ . On peut alors écrire que:

$$\begin{aligned} \sum_{i>N} \theta_i^2 &\leq \sum_{j=j_1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^j} |\theta_{jk}|^2 \leq \max_{j \geq j_1} |\theta_{jk}|^{2-p} \sum_{j=j_1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^j} |\theta_{jk}|^p \leq C 2^{-2j_1(s+1/2-1/p)}, \\ &\leq C \epsilon^{2(2+\gamma)(s+1/2-1/p)} = o(\epsilon^{\frac{4s}{2s+2\beta+1}}), \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

à partir du moment où  $s \geq 1/p - \gamma/2(\gamma + 1)$ . Clairement, le terme  $C_\epsilon$  est négligeable. Le résultat démontré dans cette annexe est résumé dans le théorème suivant.

**Théorème A.0.1** *Soit  $\theta^*$  l'estimateur de Stein par blocs pénalisé associé aux blocs définis dans (A.0.4) et  $\varphi_j = \Lambda(\epsilon^{-1})^{-1/2}$ . Supposons qu'il existe  $\beta$  tel que  $(\kappa_j^{-1})_{j \in \mathbb{N}} \sim (2^{j\beta})_{j \in \mathbb{N}}$ . Dans ce cas:*

$$(A.0.9) \quad \sup_{\theta \in \mathcal{B}_{p,q}^s(Q)} \mathbb{E}_\theta \|\theta^* - \theta\|^2 = O\left(\epsilon^{\frac{4s}{2s+2\beta+1}} (\Lambda(\epsilon^{-1}) \log(\epsilon^{-1}))^{\frac{2-p}{p(2s+1)}}\right), \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0,$$

pour tout  $s, p, q$  tels que  $1 \leq p < 2$ ,  $1 \leq q \leq +\infty$ ,  $s \geq 1/p - \gamma/(2(\gamma + 2))$  et  $Q > 0$ .

L'estimateur de Stein par blocs pénalisé atteint donc la vitesse minimax de convergence sur des espaces de Besov.



## Annexe B

# Intégration fractionnaire: représentation matricielle

Le but de cette annexe est de détailler les calculs pour l'opérateur d'intégration fractionnaire présenté dans le Chapitre 2. Rappelons que l'on considère les observations:

$$(B.0.1) \quad Y = D^{-\beta} f + \epsilon \xi,$$

où  $0 < \beta < 1/2$ ,  $D^{-\beta}$  est un opérateur d'intégration fractionnaire et  $\xi$  un bruit blanc Gaussien. Pour l'opérateur  $D^{-\beta}$ , nous utiliserons la définition suivante:

$$D^{-\beta} f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(t) dt, \forall f \in L^2(0,1).$$

Nous supposons par la suite que la fonction  $f$  est contenue dans un espace de Sobolev  $W(\alpha, Q)$  défini par:

$$W(\alpha, Q) = \left\{ \int_0^1 (f^{(\alpha)}(t))^2 dt \leq Q \right\},$$

pour  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  et  $Q > 0$ . Une fonction périodique appartenant à  $W(\alpha, Q)$  est très bien représentée dans la base trigonométrique réelle au sens où la décroissance de ses coefficients est polynomiale d'ordre  $\alpha$ . Il serait donc intéressant de pouvoir proposer un estimateur s'appuyant sur ce type de base et permettant de régulariser le problème (B.0.1). L'objet de la présente annexe est d'étudier le comportement de l'opérateur  $D^{-\beta}$  pour ce type de représentation.

**Remarque:** Quand la fonction cible  $f$  n'est pas périodique, la base trigonométrique usuelle ne convient plus du tout pour représenter convenablement le problème. Il est alors nécessaire de se tourner vers des représentations alternatives. Une solution possible consiste à utiliser des bases dites de "splines" définies par:

$$\phi_k(t) = \begin{cases} A_k(\cos(\rho_k t) + r_k(t)), & k \text{ pair}, \\ B_k(\sin(\rho_k t) + r_k(t)), & k \text{ impair}, \end{cases}$$

pour,

$$(B.0.2) \quad \rho_k = k\pi(1 + o(1)), \quad k \rightarrow +\infty,$$

$A_k^2 \rightarrow 2$ ,  $B_k^2 \rightarrow 2$  quand  $k \rightarrow +\infty$  et

$$|r_k^{(j)}(t)| \leq c_j \rho_k^j (e^{-\rho_k dt} + e^{-\rho_k d(1-t)}), \quad j \in \mathbb{N},$$

où  $c_j$  et  $d$  sont des constantes dépendant uniquement de  $\beta$ .

La représentation de l'opérateur  $A$  est plus ou moins conservée en utilisant ce type de représentation. En effet, pour de grandes valeurs de  $k$ ,  $\phi_k \simeq \sqrt{2} \cos(2\pi kt)$  ( $\sqrt{2} \sin(2\pi kt)$ ) pour respectivement  $k$  pair et impair. Pour de "grandes fréquences", on utilise donc en quelque sorte les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  pour représenter cette dernière. Ceci semble logique puisque d'éventuels effets de bord (dus à la non-périodicité de la fonction) vont affecter principalement les basses fréquences. Pour ces dernières, il est donc nécessaire de "modifier" la base trigonométrique usuelle aux bords de l'intervalle  $[0,1]$ . C'est le rôle des termes  $r_k(\cdot)$ .

Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux propriétés de la matrice de l'opérateur d'intégration fractionnaire pour la base trigonométrique usuelle. Ceci entraîne un petit paradoxe dans la mesure où nous utilisons la version non-périodique de l'intégration fractionnaire tout en étudiant des fonctions périodiques. Une étude plus poussée dans le cas non-périodique et utilisant des bases de splines serait très intéressante mais reste très difficile d'un point de vue technique.

## B.1 Structure de la matrice inverse

Soit  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la base trigonométrique usuelle définie par:

$$\phi_1(t) \equiv 1, \quad \phi_{2k}(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi kt), \quad \phi_{2k+1}(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi kt), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in [0,1].$$

Le but de cette annexe est, en partie, de montrer que la matrice de l'opérateur  $A$  associée à la base  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est "quasi-diagonale" au sens des hypothèses du Chapitre 2. On désignera par  $A^{-1} = (b_{kl})_{k,l \in \mathbb{N}}$  la matrice de représentation de l'opérateur inverse  $A^{-1}$ . Soient  $k, l \in \mathbb{N}$ . Par définition:

$$b_{kl} = \langle D^\beta \psi_l, \phi_k \rangle = \langle D \Psi_l, \phi_k \rangle,$$

où  $\Psi_l = D^{-(1-\beta)} \psi_l$  et  $D$  est l'opérateur différentiel usuel. Pour tout  $x \in [0,1]$ ,

$$\Psi_l(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} \psi_l(t) dt.$$

A l'aide d'une intégration par parties:

$$\begin{aligned} b_{kl} &= \langle D \Psi_l, \phi_k \rangle, \\ &= \int_0^1 \Psi_l'(t) \phi_k(t) dt, \\ &= [\Psi_l(t) \phi_k(t)]_0^1 - \int_0^1 \Psi_l(t) \phi_k'(t) dt, \\ &= \phi(1) \Psi_l(1) - \langle \Psi_l, D \phi_k \rangle, \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} \psi_l(t) \phi_k(1) dt - \langle \psi_l, (D^{-(1-\beta)})^* D \phi_k \rangle, \end{aligned}$$

où  $(D^{-(1-\beta)})^*$  est l'opérateur conjugué de  $D^{-(1-\beta)}$ . Ainsi, pour tout  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $b_{kl} = \langle \psi_l, \Phi_k \rangle$ , pour

$$\Phi_k(t) = \frac{(1-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \phi_k(1) - (D^{-(1-\beta)})^* D \phi_k(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Avec ces notations:

$$(B.1.1) \quad \sum_{l=1}^{+\infty} b_{kl}^2 = \sum_{l=1}^{+\infty} \langle \Phi_k, \psi_l \rangle^2 = \int_0^1 \Phi_k^2(t) dt = (k\pi)^{2\beta} + O(k^{4\beta/3}), \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

Cette égalité est obtenue en utilisant les mêmes méthodes que dans Cavalier [15]. Remarquons que l'hypothèse A1 du Chapitre 2 est vérifiée pour la matrice  $A^{-1}$  d'après (B.1.1).

D'après (B.1.1), la somme des entrées au carré de la matrice inverse  $A^{-1}$  sur une ligne  $k$  est de l'ordre de  $k^{2\beta}$ . Il en est de même pour la représentation SVD. Nous allons maintenant démontrer que les principaux termes de cette matrice sont concentrés dans la diagonale. En particulier, nous allons voir que:

$$\sum_{l=1, l \neq k}^{+\infty} b_{kl}^2 \triangleq \sum_{l=1}^{+\infty} b_{kl}^2 - b_{kk}^2 = o(1) \sum_{l=1}^{+\infty} b_{kl}^2, \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

Pour tout entier  $k$ , posons  $\rho_k = k\pi$  et  $\delta_k = \rho_k^{-2/3}$ . La fonction  $t \mapsto \Phi_k(t)$  peut être décomposée sous la forme:

$$\begin{aligned} \Phi_k(t) &= \frac{(1-t)^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} \phi_k(1) + (D^{-(1-\beta)})^* \phi'_k(t) \{ \mathbf{1}_{[0, \delta_k[}(t) + \mathbf{1}_{[\delta_k, 1-\delta_k[}(t) + \mathbf{1}_{[1-\delta_k, 1[}(t) \}, \\ &= \varphi_1^k(t) + \varphi_2^k(t) + \varphi_3^k(t) + \varphi_4^k(t), \end{aligned}$$

et ainsi,

$$(B.1.2) \quad b_{kk}^2 = \left[ \langle \varphi_1^k, \psi_k \rangle + \langle \varphi_2^k, \psi_k \rangle + \langle \varphi_3^k, \psi_k \rangle + \langle \varphi_4^k, \psi_k \rangle \right]^2.$$

Nous allons nous intéresser aux valeurs de ces quatre produits scalaires. Dans un premier temps, remarquons que:

$$(B.1.3) \quad |\langle \varphi_1^k, \psi_k \rangle| \leq \sqrt{\sum_{l=1}^{+\infty} \langle \varphi_1^k, \psi_l \rangle^2} = \sqrt{\int_0^1 \frac{(1-t)^{-2\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \phi_k^2(1) dt} = O(1), \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

De la même manière:

$$(B.1.4) \quad |\langle \varphi_2^k, \psi_l \rangle| \leq \sqrt{\int_0^{\delta_k} [(D^{-(1-\beta)})^* \phi'_k(t)]^2 dt} = O(\delta_k^{1/2} \rho_k^\beta), \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

En effet, l'équation (28) de Cavalier [15] montre que

$$(D^{-(1-\beta)})^* \phi'_k(t) = O(\rho_k^\beta), \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty,$$

pour  $0 \leq t \leq \delta_k$ . Pour le tout dernier produit scalaire de (B.1.2), le même principe s'applique à nouveau:

$$(B.1.5) \quad |\langle \varphi_4^k, \psi_l \rangle| \leq \sqrt{\int_{1-\delta_k}^1 [(D^{-(1-\beta)})^* \phi'_k(t)]^2 dt} = O(\delta_k^{2-\beta} \rho_k), \text{ quand } k \rightarrow +\infty,$$

puisque  $\delta_k = \rho_k^{-2/3}$ . On a ici utilisé le fait que:

$$(B.1.6) \quad (D^{-(1-\beta)})^* \phi'_k(t) = O(\delta_k^{1-\beta} \rho_k).$$

Ces trois termes n'interviennent donc que très peu dans (B.1.2).

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , nous allons maintenant nous intéresser au produit scalaire  $\langle \varphi_3^k, \psi_l \rangle$ . La structure de la matrice de représentation est en quelque sorte complètement caractérisée par ce dernier. Par la suite, afin de simplifier les calculs, nous nous placerons dans le cas  $k$  impair. Les résultats restent valables pour  $k$  pair mais ne seront pas démontrés ici. Par définition:

$$\langle \varphi_3^k, \psi_k \rangle = \int_{\delta_k}^{1-\delta_k} (D^{-(1-\beta)})^* \phi'_k(t) \psi_k(t) dt.$$

D'après les inégalités (22), (26) et (27) de Cavalier [15]:

$$(B.1.7) \quad (D^{-(1-\beta)})^* \phi'_k(t) = \sqrt{2} \rho_k^\beta \sin\left(\rho_k t + (1-\beta)\frac{\pi}{2}\right) + O((1-t)^{-\beta} \rho_k^{-1}),$$

pour  $\delta_k < t < 1 - \delta_k$ . Soit  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  l'ensemble défini par  $\psi_1(t) \equiv 1$ ,

$$\psi_{2k}(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi kt + (1-\beta)\pi/2), \quad \psi_{2k+1}(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi kt + (1-\beta)\pi/2),$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0,1]$ . L'ensemble  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définit une base de  $L^2(0,1)$ . Il est possible de montrer, à l'aide de relations trigonométriques élémentaires, que ce dernier est orthonormé. De plus, toute fonction  $g \in L^2(0,1)$  peut être écrite sous la forme d'une combinaison des éléments de  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . En effet, il existe par définition deux suites  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2\pi kx), \quad \forall x \in [0,1].$$

Il est alors possible d'écrire que:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos\left(2\pi kx + (1-\beta)\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin\left(2\pi kx + (1-\beta)\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall x \in [0,1],$$

pour

$$c_k = a_k \cos\left((1-\beta)\frac{\pi}{2}\right) - b_k \sin\left((1-\beta)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{et } d_k = a_k \sin\left((1-\beta)\frac{\pi}{2}\right) + b_k \cos\left((1-\beta)\frac{\pi}{2}\right).$$



Avec ce choix de bases, et à l'aide de formules trigonométriques élémentaires, il est possible de démontrer que:

$$(B.1.8) \quad \sqrt{2}\rho_k^\beta \int_{\delta_k}^{1-\delta_k} \sin\left(\rho_k t + (1-\beta)\frac{\pi}{2}\right) \psi_k(t) dt = (1-2\delta_k)\rho_k^\beta + O(\rho_k^{\beta-1}), \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

D'après (B.1.3) et (B.1.4)-(B.1.8), quand  $k \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} b_{kk} &= \rho_k^\beta + O(\rho_k^{\beta-1}) + O(\delta\rho_k^\beta) + O(\delta^{2-\beta}\rho_k), \\ &= \rho_k^\beta + O(\rho_k^{\beta-2\beta}) + O(\rho_k^{-1/3+2\beta/3}), \\ &= \rho_k^\beta(1 + O(\rho_k^{-(\beta+1)/3})). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\sum_{l=1, l \neq k}^{+\infty} b_{kl}^2 = O(\rho_k^{(4\beta-2)/3}) + O(\rho_k^{4\beta/3}) = O(\rho_k^{4\beta/3}).$$

Ainsi, les principaux termes de la matrice  $A^{-1}$  sont concentrés dans la diagonale.

## B.2 Vérification des hypothèses du Chapitre 2

Nous allons à présent montrer que l'hypothèse A2 du Chapitre 2 est vérifiée pour la matrice inverse  $A^{-1}$ . Soit  $(T_j)_{j=1\dots J}$  la famille de blocs définie par:

$$T_j = [C^* S(\epsilon^{-1}) \log^{1+\tau} \epsilon^{-1}], \forall j \in \{1, \dots, J\},$$

pour  $C^*$  et  $\tau$  constantes positives indépendantes de  $\epsilon$  et  $S(\epsilon^{-1}) = \log \log \epsilon^{-1}$ . D'après les calculs de la section précédente:

$$\frac{\sum_{l=1, l \neq k}^{+\infty} b_{kl}^2}{\sum_{l=1}^{+\infty} b_{kl}^2} = O(k^{-2\beta/3}), \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

Soit  $j \in \{n_\epsilon, \dots, J\}$  pour  $n_\epsilon = \lceil \log^2 \epsilon^{-1} \rceil$ . Il est alors possible de remarquer que:

$$\begin{aligned} \frac{T_j \sum_{l=1, l \neq k}^{+\infty} b_{kl}^2}{\sum_{l=1}^{+\infty} b_{kl}^2} &\leq \frac{T_j K_j^{4\beta/3}}{K_{j-1}^{2\beta}} \\ &\leq \frac{S(\epsilon^{-1}) \log^{1+\tau} \epsilon^{-1} \times j^{4\beta/3} \log^{(1+\tau)4\beta/3} \epsilon^{-1}}{(j-1)^{2\beta} \log^{(1+\tau)2\beta} \epsilon^{-1}} \leq \frac{S(\epsilon^{-1}) \log^{(1+\tau)\beta/3} \epsilon^{-1}}{j^{2\beta/3}}. \end{aligned}$$

Puisque  $j > n_\epsilon$ , le dernier terme de l'inégalité précédente tend vers 0 quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . L'hypothèse A2 du Chapitre 2 est satisfaite pour la matrice  $A^{-1}$ .

Vérifier ces mêmes hypothèses pour la suite de matrices  $(A_m^{-1})_{m \in \mathbb{N}}$  s'avère bien plus difficile. Cependant, comme indiqué dans le Chapitre 2, toute matrice de représentation sous la forme  $A = D(I + V)$  pour  $D$  diagonale et  $V$  compacte semble être un bon candidat pour vérifier ces hypothèses, à partir du moment où ces dernières sont satisfaites par  $A^{-1}$ . En effet, il est alors possible d'utiliser des propriétés de convergence permettant d'étendre le comportement de  $A^{-1}$  à celui de la suite  $(A_m^{-1})_{m \in \mathbb{N}}$ .



# Bibliographie

- [1] Y. Baraud. Model selection for regression on a fixed design. *Probability Theory and Related Fields*, 117 (2000). pp. 467-493.
- [2] Y. Baraud. Model selection for regression on a random design. *ESAIM Probab. Statist.*, 6 (2002). pp. 127-146.
- [3] A. Barron, L. Birgé, and P. Massart. Risk bounds for model selection via penalization. *Probability Theory and Related Fields*, 113 (1999). pp. 301-413.
- [4] J. Baumeister. *Stable solution of inverse problems*. Advanced lectures in mathematics. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1987.
- [5] E.N. Belitser and B.Ya. Levit. On minimax filtering on ellipsoids. *Math. Meth. Statist.*, 4 (1995), pp. 259-273.
- [6] A. Böttcher. *Infinite matrices and projection methods*. Lectures on operator Theory and its Applications, AMS, 1996.
- [7] L. Birgé and P. Massart. Gaussian model selection. *J. Eur. Math. Soc.*, 3 (2001). pp. 203-268.
- [8] N. Bissantz, T. Hohage, and A. Munk. Consistency and rates of convergence of nonlinear Tikhonov regularization with random noise. *Inverse Problems*, 20 (2004), pp. 1773-1789.
- [9] N. Bissantz, T. Hohage, A. Munk, and F. Ryumgaard. Convergence rates of general regularization methods for statistical inverse problems and applications. Preprint.
- [10] E. Candès. Modern statistical estimation via oracle inequalities. *Acta numerica*, 15 (2006), pp. 257-325.
- [11] E. Candès and D.L. Donoho. Curvelets: A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges. *Curves and surfaces*, Vanderbilt University Press, (2002), pp. 105-120.
- [12] E. Candès and D.L. Donoho. Recovering edges in ill-posed inverse problems: optimality of curvelet frames. *Annals of Statistics*, 30 (2002), pp. 784-842.
- [13] Y. Cao and Y. Golubev. On adaptive regression by splines. *Mathematical Methods of Statistics*, 15 (2006), pp. 398-414.
- [14] I. Castillo and J-M. Loubes. Estimation of the law of random shifts deformation. Preprint.
- [15] L. Cavalier. Estimation in a problem of fractional integration. *Inverse Problems*, 20 (2004), pp. 1445-1454.
- [16] L. Cavalier, G.K. Golubev, D. Picard, and A.B. Tsybakov. Oracle inequalities for inverse problems. *Annals of Statistics*, 30 (2002), pp. 843-874.

- 
- [17] L. Cavalier and Y. Golubev. Risk hull method and regularization by projections of ill-posed inverse problems. *Annals of Statistics*, 34 (2006). pp. 1653-1677.
- [18] L. Cavalier, Y. Golubev, O. Lepski, and A. Tsybakov. Block thresholding and sharp adaptive estimation in severely inverse problems. *Theory of Probability and its Applications*, 48 (2004). pp. 426-446.
- [19] L. Cavalier and N.W. Hengartner. Adaptive estimation for inverse problems with noisy operators. *Inverse Problems*, 21 (2005), pp. 1345-1361.
- [20] L. Cavalier and M. Raimondo. Wavelet deconvolution with noisy eigen-values. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 55 (2007), pp. 2414-2424.
- [21] L. Cavalier and A.B. Tsybakov. Sharp adaptation for inverse problems with random noise. *Probability Theory and Related Fields*, 123 (2002), pp. 323-354.
- [22] L. Cavalier and A.B. Tsybakov. Penalized blockwise Stein's method, monotone oracles and sharp adaptive estimation. *Mathematical methods of Statistics*, 3 (2001), pp. 247-282.
- [23] A. Cohen, M. Hoffmann, and M. Reiß. Adaptive wavelet galerkin methods for linear inverse problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42 (2004). pp. 1479-1501.
- [24] D.L. Donoho. Nonlinear solutions of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition. *Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2 (1995), pp. 101-126.
- [25] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Annals of Statistics*, 26 (1998), pp. 425-455.
- [26] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319 (1994), pp. 1317-1322.
- [27] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81 (1994), pp. 879-921.
- [28] S. Efromovich. Robust and efficient recovery of a signal passed through a filter and then contaminated by non-gaussian noise. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 43 (1997), pp. 1184-1191.
- [29] S. Efromovich and V. Koltchinskii. On inverse problems with unknown operators. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 47 (2001), pp. 2876-2893.
- [30] H.W. Engl. On the choice of the regularization parameter for iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems. *Journal of approximation theory*, 49 (1987), pp. 55-63.
- [31] H.W. Engl, M. Hank, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [32] M.S. Ermakov. Minimax estimation of the solution of an ill-posed convolution type problem. *Problems of Information Transmission*, 25 (1989), pp. 191-200.
- [33] J. Fan. On the optimal rates of convergence for nonparametric deconvolutions problems. *Annals of Statistics*, 19 (1991), pp. 1257-1272.
- [34] A. Goldenshluger and S.V. Pereverzev. Adaptive estimation of linear functionals in Hilbert scales from indirect white noise observations. *Probab. Theory Relat. Fields*, 118 (2000), pp. 169-186.
- [35] G.K. Golubev and R.Z. Khasminskii. Statistical approach to some inverse boundary

- problems for partial differential equations. *Problems of Information Transmission*, 35 (1999), pp. 51-66.
- [36] Yu. Golubev. The principle of penalized empirical risk in severely ill-posed problems. *Theory Probab. and Appl.*, 130 (2004). pp. 18-38.
- [37] W. Hackbusch. *Integral equations. Theory and numerical treatment*. ISNM 120. Birkhauser Verlag, Basel, 1995.
- [38] M. Hanke. Accelerated Lanweber iterations for the solution of ill-posed equations. *Numerische mathematik*, 60 (1991). pp. 341-373.
- [39] T. Hida. *Brownian motion*. Springer-Verlag, New-York, 1980.
- [40] M. Hoffmann and M. Reiß. Nonlinear estimation for linear inverse problems with error in the operator. 2005. To appear in *Annals of Statistics*.
- [41] I.A. Ibragimov and Y.A. Rosanov. *Gaussian random processes*. 1978.
- [42] Q. Jin and Z. Hou. On the choice of the regularization parameter for ordinary and iterated Tikhonov regularization of non-linear ill-posed problems. *Inverse Problems*, 13 (1997), pp. 815-827.
- [43] I.M. Johnstone. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems: adaptivity results. *Statistica Sinica*, 9 (1999), pp. 51-83.
- [44] I.M. Johnstone, G. Kerkyacharian, D. Picard, and M. Raimondo. Wavelet deconvolution in a periodic setting. *J. R. Statist. Soc. B*, 66, part 3 (2004), pp. 547-573.
- [45] I.M. Johnstone and B.W. Silverman. Speed of estimation in positron emission tomography and related inverse problems. *Annals of Statistics*, 18 (1990), pp. 251-280.
- [46] I.M. Johnstone and B.W. Silverman. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 59 (1997), pp. 319-345.
- [47] G. Kerkyacharian, P. Petrushev, D. Picard, and T. Willer. Need-vd: a second-generation wavelet algorithm for estimation in inverse problems. Preprint.
- [48] G. Kerkyacharian and D. Picard. Minimax or maxisets? *Bernoulli*, 8, (2002), pp. 219-253.
- [49] E. Klann, P. Maß, and R. Ramlau. Tikhonov regularization with wavelet shrinkage for linear inverse problems. Preprint.
- [50] A. Kneip. Ordered linear smoother. *Annals of Statistics*, 22 (1994). pp. 835-866.
- [51] R. Kress. *Linear integral equations*. Applied Mathematical sciences, vol 82. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [52] J.M Loubes and C. Ludena. Penalized estimators for non-linear inverse problems. Preprint.
- [53] B. Mair and F.H. Ruymgaart. Statistical inverse estimation in Hilbert scales. *SIAM J. Appl. Math.*, 56 (1996), pp. 1424-1444.
- [54] C. Marteau. Regularization of inverse problems with unknown operator. *Mathematical Methods of Statistics*, 15 (2006), pp. 415-443.
- [55] C. Marteau. On the stability of the risk hull method for projection estimator. 2007. Soumis.
- [56] C. Marteau. Risk hull method for general families of estimators. 2007. Preprint.
- [57] P. Mathé and S.V. Pereverzev. Discretization strategy for linear ill-posed problems in variable Hilbert scales. *Inverse Problems*, 19 (2003), pp. 1263-1277.

- 
- [58] P. Mathé and S.V. Pereverzev. Optimal discretization of inverse problems in Hilbert scales. Regularization and self-regularization of projection methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38 (2001). pp. 1333-2021.
- [59] A. Mesbah and M. Mokhtari. *Apprendre et maîtriser MATLAB, version 4,5 et Simulink*. Springer-Verlag, 1997.
- [60] A. Nemirovski. *Topics in Non-Parametric Statistics*. Lectures on Probability Theory and Statistics. Ecole d'été de Probabilités de St.Flour XXVIII, 1998.
- [61] M. Nussbaum. Spline smoothing in regression models and asymptotical efficiency in  $l_2$ . *Annals of Statistics*, 13 (1985), pp. 984-997.
- [62] P. Rigollet. Adaptive density estimation using stein's blockwise method. *Bernoulli*, 12 (2006), pp. 351-370.
- [63] D.N. Ghosh Roy and L.S. Couchman. *Inverse problems and inverse scattering of plane waves*. Academic press San Diego, 2002.
- [64] C.M. Stein. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Annals of Statistics*, 9 (1981), pp. 1135-1151.
- [65] A.B. Tsybakov. *Introduction à l'estimation non-paramétrique*. Springer-Verlag, 2004.
- [66] A.B. Tsybakov. On the best rate of adaptative estimation in some inverse problems. *C.R Acad. Sci. Paris, ser. 1.*, 330 (2000), pp. 835-840.
- [67] T. Willer. *Estimation non-paramétrique et problèmes inverses*. Thèse de l'Université Paris VII - Denis Diderot, 2006.
- [68] A. Zygmund. *Trigonometric series vol I,II 2nd edn*. New York: Cambridge University Press, 1959.



**RÉSUMÉ:** Cette thèse s'intéresse aux problèmes inverses dans un cadre statistique. A partir des observations  $Y = Af + \epsilon\xi$ , le but est d'approximer aussi fidèlement que possible la fonction  $f$  où  $A$  représente un opérateur compact,  $\epsilon > 0$  le niveau de bruit et  $\xi$  un bruit blanc gaussien. Etant données une procédure  $f^*$  et une collection d'estimateurs  $\Lambda$ , une inégalité oracle permet de comparer, sans aucune hypothèse sur la fonction cible  $f$  et d'un point de vue non-asymptotique, les performances de  $f^*$  à celles du meilleur estimateur dans  $\Lambda$  connaissant  $f$ . Dans l'optique d'obtenir de telles inégalités, cette thèse s'articule autour de deux objectifs: une meilleure compréhension des problèmes inverses lorsque l'opérateur est mal-connu et l'extension de l'algorithme de minimisation de l'enveloppe du risque (RHM) à un domaine d'application plus large.

La connaissance complète de l'opérateur  $A$  est en effet une hypothèse implicite dans la plupart des méthodes existantes. Il est cependant raisonnable de penser que ce dernier puisse être en partie, voire totalement inconnu. Dans un premier temps, nous généralisons donc la méthode de Stein par blocs pénalisée ainsi que l'algorithme RHM à cette situation. Ce dernier, initié par L. Cavalier et Y. Golubev, améliore considérablement les performances de la traditionnelle méthode d'estimation du risque sans biais. Cependant, cette nouvelle procédure ne concerne que les estimateurs par projection. En pratique, ces derniers sont souvent moins performants que les estimateurs de Tikhonov ou les procédures itératives, dans un certain sens beaucoup plus fines. Dans la dernière partie, nous étendons donc l'utilisation de l'enveloppe du risque à une gamme beaucoup plus large d'estimateurs.

**ABSTRACT:** We consider in this thesis the statistical linear inverse problem  $Y = Af + \epsilon\xi$  where  $A$  denotes a compact operator,  $\epsilon$  a noise level and  $\xi$  a Gaussian white noise. The unknown function  $f$  has to be recovered from the indirect measurement  $Y$ . Given a family  $\Lambda$ , an oracle inequality compares the performances of an adaptive estimator  $f^*$  to the best one in  $\Lambda$ . Such an inequality is non-asymptotic and no specific informations on  $f$  are required. In this thesis, we propose different oracle inequalities in order to provide both a better understanding of regularization with a noisy operator and a generalization of the risk hull minimization (RHM) algorithm.

For most of the existing methods, the operator  $A$  is assumed to be exactly known. This assumption is of major importance and may not be satisfied in many situations. In a first time, we extend the penalized blockwise Stein's rule and the risk hull minimization algorithm performances to this situation. The RHM method has been initiated by L. Cavalier et Y. Golubev. It significantly improves the performances of the traditional unbiased risk estimation procedure. However, this algorithm only concerns projection estimation which is rather rough. There exist several regularization approaches with better performances. We may mention for instance the Tikhonov estimators or the Landweber iterative procedure. Hence, generalization of the RHM algorithm to a wide family of linear estimators may produce interesting results. This is the aim of the last part of this thesis.