Topologie générale

Simon MASNOU
masnou@math.univ-lyon1.fr

Version (provisoire) du 27/12/2014

Ce document, constitué à partir d'une prise de notes et d'une première transcription LaTeX dues à Guillaume Deltreil, que je remercie, ne prétend pas à l'originalité. Il est très fortement inspiré des ouvrages et notes de cours suivants :

- Topologie, H. Queffélec, Dunod.
- Topologie et analyse fonctionnelle, C. Wagschal, Hermann.
- Topologie générale, J. Dixmier, PUF.
- Analyse fonctionnelle : théorie et applications, H. Brézis, Masson.
- Topologie générale, notes de cours de L3, T. Fack, Université Lyon 1.
- Outils de base en analyse appliquée, notes de cours de M1, H. Le Dret, Univ. Paris 6
- Introduction à la topologie, notes de cours, Francis Nier et Dragos Iftimie, Université de Rennes 1.

Introduction

La topologie est un domaine fondamental de l'analyse. Lorsqu'on se donne un ensemble (de nombres, de fonctions, d'opérateurs, etc.), on a besoin de le munir d'une structure topologique qui va permettre d'étudier non seulement des notions de base comme le voisinage, la limite et la continuité, mais aussi des notions plus élaborées comme la densité, la séparabilité, la compacité, la connexité ou la complétude qui jouent un rôle essentiel en analyse et en géométrie.

Ce cours a pour vocation d'introduire les premières notions de topologie. Au sein de l'immense classe des espaces topologiques, nous étudierons plus particulièrement des espaces aux propriétés de plus en plus fortes : espaces métriques, espaces vectoriels normés, espaces de Banach, espaces de Hilbert, dont les relations d'inclusion sont illustrées ci-dessous.

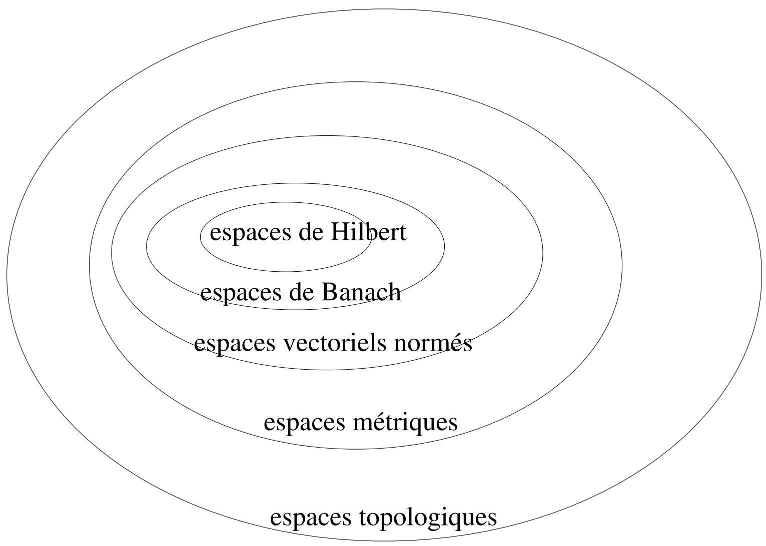

Table des matières

I Espaces topologiques, espaces métriques, espaces normés **7**
I.1 Espaces topologiques : définitions générales . . . 7
I.2 Espaces métriques – espaces normés . . . 10
I.2.a Distance . . . 10
I.2.b Norme, espaces normés . . . 11
I.2.c Topologie engendrée par les boules ouvertes d'un espace métrique . . . 12
I.2.d Ouverts et fermés dans un espace métrique . . . 13
I.3 Intérieur et adhérence . . . 15
I.4 Équivalence de métriques et de normes . . . 20
I.5 Topologie induite. Sous-espace topologique . . . 22

II Limites – Continuité **25**
II.1 Limite et valeurs d'adhérence d'une suite dans un espace topologique . . . 25
II.2 Limite d'une fonction . . . 28
II.3 Fonctions continues . . . 28
II.4 Homéomorphismes . . . 32
II.5 Application linéaire entre deux espaces normés . . . 34
II.6 Application bilinéaires continues . . . 36

III Espaces complets **39**
III.1 Suite de Cauchy . . . 39
III.2 Espaces complets . . . 40
III.3 Espaces de Banach . . . 43

IV Espaces compacts **47**
IV.1 Propriété de Borel-Lebesgue . . . 47
IV.2 Compacts métrisables . . . 50
IV.3 Parties compactes de $\mathbb{R}^n$ . . . 51
IV.4 Fonctions continues sur un compact . . . 52

V Connexité **55**
V.1 Définition . . . 55
V.2 Stabilité de la connexité . . . 56
V.3 Connexité par arcs . . . 57
V.4 Structure des connexes de $\mathbb{R}$ . . . 58

Chapitre I

Espaces topologiques, espaces métriques, espaces normés

I.1 Espaces topologiques : définitions générales

Définition (Topologie, ouverts d'une topologie) *Soit X un ensemble. On appelle* **topologie** *sur X une famille τ de parties de X, appelées* **ouverts**, *telles que*

(O_1) *$\varnothing$ et X sont des ouverts (i.e. $\varnothing, X \in \tau$)*

(O_2) *Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, i.e.* $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha \in \tau, \forall \{O_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\} \subset \tau.$

(O_3) *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, i.e.* $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau,\ \forall \{O_i,\ i = 1, ..., n\} \subset \tau.$

On dit alors que (X, τ) est un espace topologique.

Remarques :

1. (O_2) est la propriété de *stabilité par union quelconque* et (O_3) la propriété de *stabilité par intersection finie* ;
2. Par abus de langage, on écrira parfois "soit X un espace topologique" sans mentionner explicitement la topologie ;
3. Il est important de retenir qu'une topologie est une collection de parties de X, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble de toutes les parties de X.

Exemples :

1. On peut définir pour tout ensemble X deux exemples extrêmes de topologie :
   $\tau_g = \{\varnothing, X\}$ est la topologie grossière C'est la topologie la moins riche (on dit la moins fine) qu'on peut définir sur X, c'est-à-dire celle qui compte le moins d'ouverts.
   $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ (= ensemble des parties de X) est la topologie discrète. C'est la topologie la plus riche (la plus fine) qu'on peut définir sur X, c'est-à-dire celle qui compte le plus d'ouverts. En particulier, si $x \in X$ alors $\{x\}$ est un ouvert de la topologie discrète.
2. On voit facilement que l'ensemble $X = \{1, 2, 3\}$ peut être muni de quatre topologies :
   - la topologie grossière $\tau_g = \{\varnothing, \{1, 2, 3\}\}$;
   - la topologie discrète $\tau_d = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
   - et les deux topologies "intermédiaires" $\tau_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$ et $\tau_2 = \{\varnothing, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$ (on vérifie facilement que ce sont bien des topologies sur X).
3. Lorsque X est un ensemble de cardinal infini, on peut lui associer une infinité de topologies.

Théorème I.1.1 (Topologie engendrée par un ensemble de parties de X) *Soit X un ensemble et $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$. Il existe une plus petite topologie (pour l'inclusion) τ contenant Σ. On l'appelle topologie engendrée par Σ et on la note $\tau(\Sigma)$. De plus :*

(A) $\tau(\Sigma)$ est consituée des unions d'intersections finies d'éléments de Σ (avec la convention $\underset{\emptyset}{\cup} = \emptyset$, $\underset{\emptyset}{\cap} = X$).

(B) Si Σ est presque stable par intersection c'est à dire si

$$(A_1, A_2 \in \Sigma \text{ et } x \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow \exists\ A_3 \in \Sigma \text{ tel que } x \in A_3 \subset A_1 \cap A_2)$$

alors $\tau(\Sigma)$ est constituée de $\emptyset$, X et des unions d'éléments de Σ.

Preuve : Il existe au moins une topologie qui contient Σ : c'est la topologie discrète. En outre, on peut facilement vérifier que toute intersection de topologies est une topologie : en effet, si $\{\tau_i\}_{i\in I}$ est une collection quelconque de topologies contenant Σ alors :

1. $\emptyset, \Sigma \in \tau_i\ \forall i \Rightarrow \emptyset, \Sigma \in \bigcap_{i\in I} \tau_i$;
2. si $\{O_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\} \subset \bigcap_{i\in I} \tau_i$ alors $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha \in \bigcap_{i\in I} \tau_i$;
3. si $\{O_k,\ k = 1 \cdots n\} \subset \bigcap_{i\in I} \tau_i$ alors $\bigcap_{k=1}^{n} O_k \subset \bigcap_{i\in I} \tau_i$

On peut alors définir $\tau(\Sigma)$ comme l'intersection de toutes les topologies contenant Σ. C'est bien une topologie, elle contient Σ, et c'est la plus petite pour l'inclusion puisque toute autre topologie contenant Σ est utilisée pour définir $\tau(\Sigma)$.

Soit T la collection des unions d'intersections finies d'éléments de Σ (avec la convention $\bigcup\limits_{\emptyset} = \emptyset$, $\bigcap\limits_{\emptyset} = X$). T est une topologie car

1. si $A_1 = \bigcup_{\alpha\in \mathrm{A}} U_\alpha$ et $A_2 = \bigcup_{\beta\in \mathrm{B}} V_\beta$ avec $U_\alpha = \bigcap\limits_{i=1}^{N_\alpha} U_{\alpha_i}$ et $V_\beta = \bigcap\limits_{j=1}^{N_\beta} V_{\beta_j}$, alors
$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A},\beta\in\mathrm{B}} U_\alpha \cap V_\beta = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A},\beta\in\mathrm{B}} (\bigcap_{i=1}^{N_\alpha} U_{\alpha_i} \cap \bigcap_{j=1}^{N_\beta} V_{\beta_j})$$
qui est une union d'intersections finies. En itérant, on en déduit que T est stable par intersection finie.
2. La stabilité par union quelconque est triviale (une union d'unions d'intersections finies est une union d'intersection finies).
3. La convention garantit que $\emptyset, X \in T$.

On a bien sûr $\Sigma \subset T$. En outre, par définition de $\tau(\Sigma)$ et en raison de sa minimalité, on a $\Sigma \subset \tau(\Sigma) \subset T$. Or toute intersection finie d'éléments de Σ est dans $\tau(\Sigma)$ (puisque c'est une topologie) et toute union quelconque de ces intersections finies est encore dans $\tau(\Sigma)$

<u>Conclusion :</u> $T \subset \tau(\Sigma)$ et donc $\tau(\Sigma) = T$

Pour démontrer (B) on observe que d'après (A) tout élément $F \in \tau(\Sigma)$ s'écrit $F = \underset{i\in I}{\cup} \overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k}$ où $V_{i_k} \in \Sigma$

D'après la quasi-stabilité par intersection $\forall x \in \overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k}$, $\exists V_{i_x} \in \Sigma$ tel que $x \in V_{i_x} \subset \overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k}$. Comme

$$\overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k} = \bigcup_{x \in \overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k}} V_{i_x} \subset \overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k},$$

on a $\overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k} = \bigcup\limits_{x \in \overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k}} V_{i_x}$ d'où $F = \bigcup\limits_{i \in I} \bigcup\limits_{x \in \overset{N(i)}{\underset{k=1}{\cap}} V_{i_k}} V_{i_x}$. Tout élément de $\tau(\Sigma)$ peut donc s'écrire comme une union d'éléments de Σ. Réciproquement, il est clair que toute union d'éléments de Σ est un élément de $\tau(\Sigma)$ d'après (A). □

Remarques : 1. On a $\Sigma \subset \tau(\Sigma)$ donc les éléments de Σ sont des ouverts de $\tau(\Sigma)$;

2. On dit que Σ est une **base d'ouverts** de $(X, \tau(\Sigma))$, c'est-à-dire que tout ouvert de $\tau(\Sigma)$ peut s'écrire comme réunion d'intersections finies d'éléments de Σ (attention : la réunion peut-être quelconque). Lorsque Σ est stable par intersection, on a mieux : tout ouvert de $\tau(\Sigma)$ peut s'écrire comme réunion (quelconque) d'éléments de Σ.

Définition (Fermés d'une topologie) *Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie $F \subset X$ est fermée si son complémentaire $F^C = X \backslash F$ est ouvert.*

Remarque : • Dans toute topologie $\varnothing$ et X sont à la fois ouverts et fermés car $X \backslash \varnothing = X$ est ouvert donc $\varnothing$ est fermé et $X \backslash X = \varnothing$ est ouvert donc X est fermé.

• En général une topologie n'est pas stable par passage au complémentaire donc les fermés n'ont aucune raison d'être ouverts. Par exemple, sur l'ensemble $X = \{1, 2, 3\}$, la collection $\{\varnothing, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$ est une topologie mais le complémentaire de $\{1\}$ n'en fait pas partie.

Proposition I.1.2 *Les fermés d'une topologie vérifient les propriétés suivantes :*

(F_1) *$\varnothing$ et X sont fermés*

(F_2) *toute union finie de fermés est fermée*

(F_3) *toute intersection quelconque de fermés est fermée*

Preuve : (F_1) cf remarque précédente

(F_2) Si $F = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} F_i$ est une union de fermés alors $X \backslash \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} F_i = \overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} X \backslash F_i$ est une intersection finie d'ouverts donc un ouvert. Donc F est fermé.

(F_3) Si $F = \underset{\alpha \in \Lambda}{\cap} F_\alpha$ alors $X \backslash F = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} X \backslash F_\alpha}_{\text{union quelconque d'ouverts}}$ est ouvert donc F est fermé.

□

Remarque : On démontrera plus loin que les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts de la topologie naturelle sur $\mathbb{R}$ et que les intervalles fermés sont des fermés. On remarque que $\underset{n \geqslant 1}{\cap}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ qui est fermé donc on n'a effectivement pas stabilité par intersection non finie d'ouverts. De même $\bigcup_{x \in]-1;1[} \{x\}$ est une union quelconque de fermés qui coincïde avec l'ouvert $]-1;1[$ donc il n'y a pas en général stabilité des fermés par union quelconque.

Définition (Voisinage) *Soit X un espace topologique. On dit que $V \subset X$ est un voisinage de $x \in X$ s'il existe un ouvert $O \in \tau$ tel que $x \in O \subset V$. En d'autres termes, V est un voisinage de x s'il contient un ouvert contenant x. On note $\mathbb{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*

Proposition I.1.3 *$U \subset X$ est un ouvert si, et seulement si, il est un voisinage de chacun de ses points. Autrement dit :*

$$U \in \tau \Leftrightarrow \forall x \in U,\ U \in \mathbb{V}(x).$$

Preuve : $\Rightarrow$ Trivial en prenant O = U
$\Leftarrow \forall x \in U, U \in \mathbb{V}(x) \Rightarrow \exists O_x \in \tau$ tel que $x \in O_x \subset U$. On a $U = \bigcup_{x\in U}\{x\}$ et pour tout $x \in U$, $x \in O_x \subset U$. On en déduit que $U = \bigcup_{x\in U} O_x$ est une union d'ouverts ; c'est donc un ouvert. $\square$

A l'aide des propriétés des ouverts on démotre facilement la proposition suivante :

Proposition I.1.4 *Soit X un espace topologique*
(i) Chaque point $x \in X$ admet au moins un voisinage
(ii) Si $N \in \mathbb{V}(x)$ et $N \subset M$ alors $M \in \mathbb{V}(x)$
(iii) $N, M \in \mathbb{V}(x) \Rightarrow N \cap M \in \mathbb{V}(x)$
(iv) $\forall x \in X$ et $\forall N \in \mathbb{V}(x)$ alors $\exists W \in \mathbb{V}(x)$ tel que $\forall y \in W$, $N \in V(y)$

Remarque : Ces propriétés induisent, si on les voit comme des définitions, une manière alternative de définir une topologie grâce à la notion de filtre de voisinages (cf Dixmier, Wagschal).

Définition (Base de voisinages) *Soit (X, τ) un espace topologique et $x \in X$. On dit que $\mathbb{BV}(x) \subset \mathbb{V}(x)$ est une base de voisinages de x si tout voisinage V de x contient un élément W de $\mathbb{BV}(x)$. En d'autres termes*
$$\forall V \in \mathbb{V}(x) \;\; \exists W \in \mathbb{BV}(x) \;\; W \subset V.$$

Définition (Espace topologique séparé) *On dit qu'un espace topologique est séparé s'il vérifie la propriété de séparation de Hausdorff :*

$$x \neq y \Rightarrow \exists U, V \in \tau, \quad x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \varnothing$$

La topologie discrète est séparée (puisque si $x \neq y$, $\{x\}$ et $\{y\}$ sont deux ouverts disjoints qui les séparent). La topologie grossière ne l'est pas (puisque le seul ouvert non vide est l'espace X tout entier).
Les espaces topologiques non séparés sont rarement utilisés en analyse. La propriété de séparation permet notamment de garantir l'unicité d'une limite.

I.2 Espaces métriques – espaces normés

I.2.a Distance

Définition (Distance sur un ensemble) *On appelle distance (ou métrique) sur un ensemble E une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :*
Symétrie (D_1) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x, y \in E$
Séparation (D_2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
Inégalité triangulaire (D_3) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$ $\forall x, y, z \in E$
On dit que (E,d) est un espace métrique.

Remarque : d est nécessairement à valeurs dans $[0, +\infty[$ car
$$(D_3) \Rightarrow \underbrace{d(x,x)}_{= 0 \text{ par } (D_2)} \leqslant \underbrace{d(x,z) + d(z,x)}_{= 2\text{d(x,y) par } (D_1)} \text{ donc } d(x,z) \geqslant 0 \;\forall x, z$$

Exemples : 1. on vérifie facilement que l'application $x, y \in \mathbb{R} \mapsto \mid x - y \mid$ est une métrique sur $\mathbb{R}$.

2. dès qu'un ensemble peut être muni d'une métrique, il en admet forcément une infinité car si d est une métrique, λd avec $\lambda > 0$ est aussi une métrique.

3. on rappelle que sur $\mathbb{R}^N$ les applications suivantes sont des distances (cf TD)

$$X = (x_1, ..., x_N), Y = (y_1, ..., y_N) \mapsto || X - Y ||_p = (\sum_{i=1}^{N} \mid x_i - y_i \mid^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall p \geqslant 1$$

$$X = (x_1, ..., x_N), Y = (y_1, ..., y_N) \mapsto || X - Y ||_\infty = \max_{i \in \{1,...,\}} \mid x_i - y_i \mid$$

4. Soit E un ensemble non vide et $X = E^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de E. On pose p(x,y)=$\begin{cases} \min\{n, x_n \neq y_n\} \; si \; x \neq y \\ +\infty \; si \; x = y \end{cases}$

(*Avec le choix E =$\mathbb{R}$ et x=(*$\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{3}_{x_2}, \underbrace{8}_{x_3}, \underbrace{\pi}_{x_4}$*,-4,12,...), y=(*$\underbrace{0}_{y_1}, \underbrace{3}_{y_2}, \underbrace{8}_{y_3}, \underbrace{5}_{y_4}$*,2,...) on a par exemple* $p(x, y) = 4$).

On définit ensuite $d(x, y) = \frac{1}{p(x,y)}$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Alors on peut vérifier que (X,d) est un espace métrique (la preuve est laissée en exercice).

5. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable, i.e..
$E = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue $, \int_0^1 \mid f(x) \mid^2 dx < +\infty\}$
Alors $d(f, g) = (\displaystyle\int_0^1 \mid f(x) - g(x) \mid^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ est une métrique sur E (cf T.D.)

6. On définit la distance <u>triviale</u> (ou <u>discrète</u>) sur un ensemble E par

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$$

On dit que (E, d) est un un <u>espace discret</u>.

I.2.b Norme, espaces normés

Définition (Norme sur un espace vectoriel) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application.*

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : \; & E \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

vérifiant les axiomes suivants.

1) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *Inégalité triangulaire*

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé <u>espace vectoriel normé (ou espace normé)</u>.

Remarques : • $\| \cdot \|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car $0 = \|x - x\| \leqslant 2\|x\|$ d'après l'inégalité triangulaire.

- On a la formule importante :

$$\forall x, y, \qquad |\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\|.$$

En effet $\|x + (y - x)\| \leqslant \|x\| + \|y - x\|$ donc $\|y\| \leqslant \|x\| + \|y - x\|$ d'où $\|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\|$. En échangeant x et y on obtient $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$, d'où la conclusion.

Exemples : Voici quelques exemples d'espaces normés.

- $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{N} |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} |x_i|^2}$ et $\|x\|_\infty = \max\limits_{i\in'\{1,\ldots,N\}} \{x_i\}$ sont des normes sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$
- Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$= espace vectoriel des fonctions continues de [a,b] dans $\mathbb{R}$.
  $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ et, $\forall 1 \geqslant p \geqslant \infty$, $\|f\|_p = (\int_a^b \|f(x)\|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$ sont des normes sur $C([a, b], \mathbb{R})$.
- $c_0 = \{x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}, x_n \in \mathbb{R}, n \to +\infty \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$ est un espace vectoriel normé (e.v.n) pour la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$.
- $\ell_p = \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p) < +\infty\}$ est un e.v.n pour la norme $\|x\|_{\ell_p} = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

Vérifions maintenant qu'il existe une métrique naturelle sur un espace normé.

Proposition I.2.1 *Soit E un espace normé. L'application $d : (x, y) \in E \times E \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E. En outre, d vérifie les propriétés suivantes :*

- *$d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Invariance par translation)*
- *$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (Homogénéité).*

Preuve : On a $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$. On observe ensuite que $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Enfin, $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$ donc d est bien une distance. Par ailleurs, $d(x + z, y + z) = \|x + z - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$ et $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\| = \lambda d(x, y)$. □

I.2.c Topologie engendrée par les boules ouvertes d'un espace métrique

Nous introduisons à présent les notions de boules ouvertes et boules fermées dans un espace métrique, puis nous ferons le lien avec les ouverts et fermés vus précédemment.

Définition (Boules "ouvertes" et "fermées") *Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$.*
La boule "ouverte" de centre x et de rayon r est $B(x, r) = \{y \in E, d(x, y) < r\}$
La boule "fermée" de centre x et de rayon r est $\bar{B}(x, r) = \{y \in E, d(x, y) \leqslant r\}$.

Remarques :

1. Dans $\mathbb{R}$, $B(x, r) =]x - r, x + r[$ et $\bar{B}(x, r) = [x - r, x + r]$.
2. Contrairement à ce que leur nom indique, les boules associées à une métrique ne sont pas nécessairement rondes ! Dans $\mathbb{R}^2$ les applications d_1 et d_∞ définies par $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ et $d_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ sont deux métriques. Leurs boules associées sont des carrés ! En effet $B_{d_1}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leqslant 1\}$ et $B_{d_\infty}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|, |y| \leqslant 1\}$.

Proposition I.2.2 *La collection des boules ouvertes $\Sigma = \{B(x, r), x \in E, r > 0\}$ est presque stable par intersection.*

Preuve : Soit $z \in B(x, r_1) \cap B(y, r_2)$. On a $B(z, r_1 - d(x, z)) \subset B(x, r_1)$, $B(z, r_2 - d(y, z)) \subset B(y, r_2)$ et donc $B(z, \min(r_1 - d(x, z), r_2 - d(y, z))) \subset B(x, r_1) \cap B(y, r_2)$. □

On déduit directement du théorème I.1.1 :

Théorème I.2.3 (Topologie naturelle d'un espace métrique) *La topologie engendrée par la collection des boules ouvertes d'un espace métrique (E,d) est constituée de $\emptyset$, X et des unions quelconques de boules ouvertes. En particulier toute boule ouverte est un ouvert.*

C'est la topologie naturellement associée à l'espace métrique car c'est la plus petite topologie contenant les boules ouvertes. Les boules ouvertes forment une base de cette topologie pour reprendre la terminologie que nous avons introduite à la suite du théorème I.1.1.

Définition (Espace topologique métrisable) *On dit qu'un espace topologique (X, τ) est métrisable s'il existe une métrique d sur X dont la topologie naturelle coïncide avec τ. Autrement dit les ouverts définis par d coïncident avec les ouverts de τ.*

Il faut bien comprendre la portée de cette définition. Il est toujours possible d'associer une distance à un ensemble : on peut par exemple prendre la distance discrète. En revanche, si on se donne un ensemble X et une topologie τ sur X alors il n'est pas automatique qu'on puisse trouver une distance naturellement associée à τ. Il existe des espaces topologiques non métrisables, par exemple l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$ muni de la topologie produit. Mais les exemples les plus courants d'espaces topologiques sont métrisables.

I.2.d Ouverts et fermés dans un espace métrique

Proposition I.2.4 *Soit (E,d) un espace métrique. Un ensemble $U \subset E$ est ouvert ssi $\forall x \in U, \exists\, r_x > 0$ tq $B(x, r_x) \subset U$*

Preuve : $\Rightarrow$ D'après le théorème I.2.3 qui précéde, $U = \cup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$ où $\{B_\alpha\}$ est une famille de boules ouvertes. Soit $x \in U, \exists \alpha$ tel que $x \in B_\alpha$. B_α peut s'écrire $B(a, r)$. Alors $B(x, \underbrace{r - d(a, x)}_{\text{noté } r_x}) \subset B(a, r) \subset U$.
$\Leftarrow$ On a $B(x, r_x) \subset U \Rightarrow \bigcup\limits_{x \in U} B(x, r_x) \subset U$ donc $U = \bigcup\limits_{x \in U} B(x, r_x)$. Il est ouvert d'après le théorème précédent. $\square$

Corollaire I.2.5 *La boule fermée $\bar{B}(x, r) = \{y,\ d(x, y) \leqslant r\}$ est un fermé.*

Preuve : Il suffit d'établir que son complémentaire est ouvert. Or $z \in (\bar{B}(x, r))^c$ est tel que $d(x, z) > r$. Donc $\forall a \in B(z, \frac{d(x,z)-r}{2})$ on a $d(a, x) > r$ (faire un dessin) d'où $B(z, \frac{d(x,z)-r}{2}) \subset (\bar{B}(x, r))^c$ ce qui montre que $(\bar{B}(x, r))^c$ est ouvert. $\square$

Exemple :

1. Dans $\mathbb{R}$, tout intervalle $]a, b[$ $(a < b)$ est un ouvert puisque $]a, b[= B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}))$. On peut aussi remarquer que $\forall z \in]a, b[, B(z, \min(z - a, b - z)) \subset]a, b[$
2. Dans $\mathbb{R}$, $[1, 2[$ n'est pas ouvert car $\forall r > 0,]1 - r, 1 + r[$ n'est jamais inclus dans $[1, 2[$ Or $1 \in [1, 2[$ donc la proposition précédente ne s'applique pas.
3. $] - 2, 3[\times]0, 1[$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie naturelle associée à la distance euclidienne.
4. $[-2, 3] \times]0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Corollaire I.2.6 *Si (E, d) est un espace métrique, $V \subset E$ est un voisinage de $x \in E$ si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tq $B(x, \epsilon) \subset V$.*

Remarque : Dans un espace topologique général, V est un voisinage de x s'il existe O ouvert tq $x \in O \subset V$. Dans un espace métrique on peut préciser l'ouvert : V est un voisinage de x s'il existe $\epsilon > 0$ tq $x \in B(x, \epsilon) \subset V$

Nous avons donné un exemple ci-dessus de produits d'intervalles ouverts. Plus généralement, comment définit-on les ouverts du produit de deux espaces métriques ? On rappelle que si E_1, E_2 sont deux ensembles alors $E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2),\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$.

Proposition I.2.7 (Métrique produit) *Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, on peut munir le produit $E_1 \times E_2$ de la distance naturelle définie par $\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.*

Remarque : Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une métrique. Plus généralement, on peut munir $E_1 \times E_2$ d'un infinité de métriques, parmi lesquelles par exemple $\delta_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |d_1(x_1, y_1)| + |d_2(x_2, y_2)|$ ou $\delta_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (|d_1(x_1, y_1)|^2 + |d_2(x_2, y_2)|^2)^{\frac{1}{2}}$. On a $\delta \leqslant \delta_1 \leqslant 2\delta$ et $\delta \leqslant \delta_2 \leqslant \delta\sqrt{2}$.

Proposition I.2.8 *La boule de centre (x_1, x_2) et de rayon r de $E_1 \times E_2$ muni de la métrique produit naturelle est le produit $B_{E_1}(x_1, r) \times B_{E_2}(x_2, r)$.*

Preuve : Si $\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) < r$ alors $y_1 \in B_E(x_1, r)$ et $y_2 \in B_E(x_2, r)$ d'où $B_{E_1 \times E_2}((x_1, x_2), r) \subset B_{E_1}(x_1, r) \times B_{E_2}(x_2, r)$ Réciproquement : Si (y_1, y_2) est tel que $d_1(x_1, x_2) < r$ et $d_2(x_1, x_2) < r$ alors $\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) < r$ d'où l'égalité $B_{E_1 \times E_2}((x_1, x_2), r) = B_{E_1}(x_1, r) \times B_{E_2}(x_2, r)$ □

Proposition I.2.9 (Produit d'ouverts) *Si U_1 et U_2 sont des ouverts de E_1 et E_2, respectivement, alors $U_1 \times U_2$ est un ouvert de $E_1 \times E_2$ muni de la métrique produit naturelle (on verra plus loin que c'est vrai pour toute autre métrique sur $U_1 \times U_2$). On appelle* **ouvert élémentaire** *un ensemble de la forme $U_1 \times U_2$ où U_1 est un ouvert de E_1 et U_2 est un ouvert de E_2. Tout ouvert $A \subset E_1 \times E_2$ peut s'écrire comme union d'ouverts élémentaires.*

Preuve : Soient U_1, U_2 sont des ouverts de E_1 et E_2, $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \Rightarrow \exists r$ tel que $B_{E_1}(x_1, r) \subset U_1$ et $B_{E_2}(x_2, r) \subset U_2$ d'où $B_{E_1 \times E_2}((x_1, x_2), r) = B_{E_1}(x_1, r) \times B_{E_2}(x_2, r) \subset U_1 \times U_2 \Rightarrow U_1 \times U_2$ ouverts.
Réciproquement, si V est un ouvert de $E_1 \times E_2$ alors $\forall (x_1, x_2) \in V, \exists r_{12}$ tq $\underbrace{B_{E_1, E_2}((x_1, x_2), r_{12})}_{= B_{E_1}(x_1, r_{12}) \times B_{E_2}(x_2, r_{12})} \subset V$ donc $V = \bigcup_{(x_1, x_2) \in V} B_{E_1}(x_1, r_{12}) \times B_{E_2}(x_2, r_{12})$ (union d'ouverts élémentaires). □

Remarque : Plus généralement on peut munir le produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ de n sous-espaces métriques $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ de la métrique $\delta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x_i, y_i)$
et une partie $V \subset \prod_{i=1}^{n} E_i$ est ouverte si, et seulement si, elle est réunion d'ouverts élémentaires de la forme $U_1 \times \ldots \times U_n$ où $\forall i$, U_i est un ouvert de E_i. De la même façon on peut munir le produit de n espaces normés $E_1 \times \ldots \times E_n$ de la norme. $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_{\prod_{i=1}^{n} E_i} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} ||x_i||_{E_i}$
On peut généraliser au produit dénombrable d'espaces normés (ou métriques) en choisissant une norme (métrique) adaptée.
On peut plus généralement définir une topologie pour le produit quelconque d'espaces topologiques ; comme on l'a vu, on obtient dans certains cas une topologie non métrisable.

Proposition I.2.10 *Un espace métrique est* *toujours séparé*

Preuve : En effet si $x, y \in E$ alors $B(x, \frac{d(x,y)}{3})$ et $B(y, \frac{d(x,y)}{3})$ sont deux ouverts contenant respectivement x et y, et vérifiant $B(x, \frac{d(x,y)}{3}) \cap B(y, \frac{d(x,y)}{3}) = \emptyset$. $\square$

La proposition suivante est très utile pour construire des suites convergentes dans un espace métrique.

Proposition I.2.11 *Si (E, d) est un espace métrique alors*

1. *Tout point $x \in E$ admet une base dénombrable de voisinages $\mathbb{BV}(x) = \{B(x, \frac{1}{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$;*
2. *$\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n+1}), x \in E, n \in \mathbb{N}\}$ est une base d'ouverts de (E, d).*

Preuve : Le premier point est une conséquence directe du corollaire I.2.6. Pour montrer le second, on sait déjà que tout ouvert de la topologie canoniquement associée à (E, d) est une union de boules ouvertes $B(x, r)$, $x \in E$, $r > 0$. Or $\forall y \in B(x, r)$, $\exists n_y \in \mathbb{N}$, $B(y, \frac{1}{n_y+1}) \subset B(x, r)$ donc

$$B(x, r) = \bigcup_{y \in B(x,r)} B(y, \frac{1}{n_y + 1}),$$

ce qui montre que $\mathcal{B}$ est bien une base d'ouverts de (X, d). $\square$

I.3 Intérieur et adhérence

Définition (Intérieur) *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On appelle intérieur de A et on note $\overset{\circ}{A}$ le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A, défini par*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ ouvert}}} U.$$

Si A ne contient aucun ouvert on a bien sûr $\overset{\circ}{A} = \emptyset$

Remarque : Cette définition est également une proposition : c'est la stabilité par union quelconque qui garantit que l'union de tous les ouverts contenus dans A est un ouvert contenu dans A. C'est évidemment le plus grand ouvert inclus dans A.

Remarque : $\forall U$ ouvert $\subset A$, on a bien sûr $U \subset \overset{\circ}{A} \subset A$.

Définition (Adhérence et points adhérents) *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant A défini par*

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ fermé}}} F$$

Les points de $\overline{A}$ sont appelés points adhérents de A.

Remarques :

1. $\overline{A}$ est bien un fermé par stabilité des fermés par intersection quelconque.
2. On a par définition $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$ et $\forall F$ fermé $\supset A$, $\overline{A} \subset F$

La proposition suivante fournit une caractérisation utile de l'adhérence :

Proposition I.3.1 *On a l'équivalence*

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall U \quad \textit{ouvert contenant } x,\ U \cap A \neq \varnothing$$

et, par conséquent,

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{tout voisinage de } x \textit{ rencontre } A.$$

Preuve : $\Rightarrow$ Soit x $\in \overline{A}$. Supposons qu'il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $U \cap A = \varnothing$. Alors $X \backslash U$ est un fermé qui recouvre A et qui ne contient pas x. Or, on a par minimalité, $\overline{A} \subset X \backslash U$. Comme $x \in \overline{A}$ et $x \notin X \backslash U$, on aboutit à une contradiction.

$\Leftarrow$ Si $\forall$ U ouvert contenant x on a $U \cap A \neq \varnothing$ mais si $x \notin \overline{A}$ alors $x \in X \backslash \overline{A}$ qui est ouvert donc $\exists V$ ouvert tq $x \in V \subset X \backslash \overline{A}$ et $V \cap A = \varnothing$. Contradiction. □

De la même façon, on a la caractérisation suivante :

Proposition I.3.2 *On a l'équivalence*

$$x \in \overset{\circ}{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists U \quad \textit{ouvert}\ ,\ x \in U \subset A$$

c'est-à-dire

$$x \in \overset{\circ}{A} \quad \Longleftrightarrow \quad A \textit{ est un voisinage de } x$$

Preuve : $\Rightarrow$ si $x \in \overset{\circ}{A}$ alors x appartient à un ouvert inclus dans A, donc $A \in \mathbb{V}(x)$.

$\Leftarrow$ si A est un voisinage de x alors il existe un ouvert contenant A et inclus dans A donc, par maximalité de l'intérieur, $x \in \overset{\circ}{A}$. □

Les définitions de l'adhérence et de l'intérieur peuvent être facilement précisées dans le cas des espaces métriques :

Proposition I.3.3 *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors*

1) $x \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow \exists \epsilon > 0$ *tq* $B(x, \epsilon) \subset A$

2) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $B(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$

Preuve : $\forall A \subset E$

1) $\Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{A}$ est ouvert donc $\exists \epsilon > 0$ *tq* $B(x, \epsilon) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$

$\Leftarrow$ S'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset A$ alors $B(x, \epsilon)$ est un ouvert inclus dans A, donc dans $\overset{\circ}{A}$, d'où $x \in \overset{\circ}{A}$.

2) $\Rightarrow$ Si $x \in \overline{A}$ tout voisinage de x rencontre A donc en particulier $B(x, r)$ rencontre A pour tout $r > 0$.

$\Leftarrow$ Soit V un voisinage quelconque de x. Il existe $r > 0$ tq $B(x, r) \subset V$. Par hypothèse $B(x, r)$ rencontre A donc V rencontre A d'où $x \in \overline{A}$. □

Définition (Frontière) *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. La frontière de A est l'ensemble $\partial A = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$.*

Proposition I.3.4 *La frontière est l'ensemble des points dont tout voisinage rencontre à la fois A et $X \backslash A$.*

Preuve : Tout voisinage de $x \in \partial A$ rencontre A car $x \in \overline{A}$, et rencontre $X \backslash A$ car $x \notin \overset{\circ}{A}$. En effet $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists$ U ouvert tq $x \in U \subset A$ donc $x \notin \overset{\circ}{A} \Rightarrow \forall$ U ouvert contenant x, $U \not\subset A$ c.à.d. $U \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$. □

On a la traduction immédiate dans un espace métrique :

Corollaire I.3.5 *Si (E, d) est un espace métrique et $A \subset E$ alors*

$$x \in \partial A \Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing \quad \text{et} \quad B(x,r) \cap (X \backslash A) \neq \varnothing.$$

Exemples :

1. Si $A = [1,2[$ dans $\mathbb{R}$, alors $\overset{\circ}{A} =]1,2[$, $\overline{A} = [1,2]$ et $\partial A = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A} = \{1,2\}$.
2. Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 4\} = \overline{B}(0,2)$, alors $\overset{\circ}{A} = B(0,2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+y^2} < 2\}$ et $\overline{A} = A$.
3. Si $A = [-2,3] \times]0,1[$ alors $\overset{\circ}{A} =]-2,3[\times]0,1[$ et $\overline{A} = [-2,3] \times [0,1]$.
4. ⚠On a toujours $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$ car $\overline{B}(x,r)$ est un fermé contenant $B(x,r)$. En revanche l'inclusion peut être stricte : si E est un ensemble comportant au moins deux éléments et muni de la distance discrète et si $a \in E$, alors $\bar{B}(a,1) = E$, $B(a,1) = \{a\}$ et $\overline{B(a,1)} = \{a\}$.

Définition (Distance à un ensemble) *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). On définit la distance à A par*

$$d(x, A) = \inf\{d(x,a), a \in A\}$$

Proposition I.3.6 *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E,d). Alors :*

i) $\forall x, y \in E, |d_A(x) - d_A(y)| \leqslant d(x,y)$ *i.e. la fonction $x \in E \mapsto d_A(x) \in \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne donc en particulier continue.*

ii) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d_A(x) = 0$

Preuve : i) Soit $a \in A$ et $x, y \in E$

$$d_A(x) - d(x,y) \leqslant d(x,a) - d(x,y) \leqslant d(y,a) \tag{I.1}$$

On échange le rôle de x,y pour en déduire que

$$d_A(y) - d(y,x) \leqslant d(x,a) \tag{I.2}$$

(I.1) est vraie $\forall$ a d'où $d_A(x) - d(x,y) \leqslant \inf\limits_{a \in A} d(y,a) = d_A(y)$.
De même (I.2) $\Rightarrow d_A(y) - d(x,y) \leqslant d_A(x)$ d'où $|d_A(x) - d_A(y)| \leqslant d(x,y)$

ii) $\Rightarrow$ Soit $x \in \overline{A}$. D'après la proposition I.3.3 $\forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap A \neq \varnothing$. Soit $a \in B(x,\epsilon) \cap A$, $d(x,a) < \epsilon$ donc $d_A(x) < \epsilon$. C'est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $d_A(x) = 0$.
$\Leftarrow$ si $d_A(x) = 0$ alors $\inf_{a \in A} d(x,a) = 0$ donc $\forall \epsilon > 0, \exists a_\epsilon \in A$ tq $d(x, a_\epsilon) < \epsilon$ d'où $a_\epsilon \in B(x,\epsilon) \cap A$. C'est vrai $\forall \epsilon > 0$ donc d'après la proposition I.3.3 $x \in \overline{A}$. □

Proposition I.3.7 *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. Alors :*

1) $\mathring{X} = X$.
2) $\mathring{A} \subset A$.
3) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
4) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Preuve :

1. car X est ouvert.
2. par définition.
3. car $\mathring{A}$ est ouvert.
4. Soit V= $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$. $V \subset A \cap B$ donc $V \subset A$ et $V \subset B$. V est ouvert donc $V \subset \mathring{A} \subset A$ et $V \subset \mathring{B} \subset B$ d'où $V \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. En outre, $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert nécessairement inclus dans V qui est le plus grand ouvert inclus dans $A \cap B$. On en déduit l'égalité. $\square$

Remarque : On a toujours $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}})$. En effet $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$ donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B$. Or $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est ouvert donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}})$. L'égalité n'a pas toujours lieu : si $A =]0,1]$ et $B = [1,2[$ alors $\mathring{A} =]0,1[$, $\mathring{B} =]1,2[$ donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0,1[\cup]1,2[$. En revanche $A \cup B =]0,2[= (\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}})$.

Proposition I.3.8 *Soit X un espace topologique et $A \subset X$*

1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.
2) $A \subset \overline{A}$.
3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Preuve :

1. car $\varnothing$ est fermé
2. par définition.
3. car $\overline{A}$ est fermé.
4. $\forall P \subset X$, $(\overline{P})^C = (\overset{\circ}{P^C})$. En effet le complémentaire du plus petit fermé contenant P est le plus grand ouvert inclus dans P^C. De même $\left(\mathring{P}\right)^C = \overline{(P^C)}$. On en déduit que $\left(\overline{A \cup B}\right)^C = (\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}})^C = \overset{\circ}{\widehat{A^C \cap B^C}}$. D'après la proposition I.3.7 $\overset{\circ}{\widehat{A^C \cap B^C}} = (\overset{\circ}{A^C}) \cap (\overset{\circ}{B^C}) = \overline{(A)}^C \cap \overline{(B)}^C = (\overline{A} \cup \overline{B})^C$ d'où $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. $\square$

Remarque : L'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ est toujours vraie mais elle peut être stricte dans certains cas. Par exemple $[0,1[\cap]1,2] = \varnothing$ mais $[0,1] \cap [1,2] = \{1\}$.

Définition (Points isolés, points d'accumulation, points adhérents) *Soit X un espace topologique et $A \subset X$.*

- *Un point* $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ *est un* **point isolé** *de A s'il existe $V \in \mathbb{V}(x)$ tel que $V \cap A = \{x\}$;*
- *Un point* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *est* **adhérent** *à A si $x \in \overline{A}$;*

- *Un point* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *est un* **point d'accumulation** *de* A *si* $x \in \overline{A \backslash \{x\}}$, *c'est-à-dire*

$$\forall V \in \mathbb{V}(x),\ \exists a \in A,\ a \neq x \text{ et } a \in V.$$

Un point d'accumulation de A *est donc un point adhérent à* A *qui n'est pas un point isolé de* A.

Dans un espace métrique on peut, pour simplifier, utiliser des boules pour voisinages :

Définition (Points isolés, d'accumulation et adhérents dans un espace métrique) *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $A \subset E$.

- *Un point* $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ *est un* **point isolé** *de* A *s'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que* $B(x, \epsilon) \cap A = \{x\}$;
- *Un point* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *est* **adhérent** *à* A *si* $x \in \overline{A}$, *c'est-à-dire* $\forall \epsilon > 0$, $B(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$;
- *Un point* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *est un* **point d'accumulation** *de* A *si* $x \in \overline{A \backslash \{x\}}$, *c'est-à-dire*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists a \in A \cap B(x, \epsilon) \text{ et } a \neq x.$$

Exemples :
1. Si $A = \{0\} \cup]1, 4]$, 0 est un point isolé de A, $\overline{A} = \{0\} \cup [1, 4]$, les points d'accumulation de A constituent l'ensemble $[1, 4]$, $\overset{\circ}{A} =]1, 4[$ et $\partial A = \{0, 1, 4\}$.
2. Si $B = \{0\}$, 0 est point isolé de B, $\overline{B} = \{0\}$, B ne possède pas de points d'accumulation et $\overset{\circ}{B} = \varnothing$.

Définition (Partie dense) *On dit que* $A \subset X$ *est dense dans* X *si* $\overline{A} = X$.

Proposition I.3.9 *A dense dans X* $\Leftrightarrow$ *A rencontre tout ouvert non vide de X*

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la proposition I.3.1. □

Définition (Espace topologique séparable) *Un espace topologique X est séparable s'il possède une partie dénombrable et dense i.e. s'il existe* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *tq* $\overline{\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}} = X$.

Remarque : Ne pas confondre "séparable" et "séparé" qui, bien qu'issus du même radical, désignent deux notions très différentes.
X séparable = X contient une partie dénombrable et dense

X séparé = $\forall x \neq y \in X, \exists U, V$ ouverts $\subset X$ tq $\begin{cases} x \in U \\ y \in V \\ U \cap V = \varnothing \end{cases}$

L'anglais fait mieux la distinction puisqu'on y parle de *separable space* (espace séparable) et de *Hausdorff space* (espace séparé, c'est-à-dire vérifiant la propriété de séparation de Hausdorff).

Proposition I.3.10 *Soit* (E, d) *un espace métrique* <u>*séparable*</u>. *Alors il existe une* <u>*famille dénombrable*</u> *de boules ouvertes* $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que tout ouvert de* (E, d) *est la réunion d'une sous-famille de* $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Preuve : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans (E, d), O un ouvert de (E, d) et $x \in O$. $\exists B(x, r) \subset O$ car O est ouvert. On choisit $m \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{1}{m} < \frac{r}{2}$ puis n tq $d(x, a_n) < \frac{1}{m}$ (c'est possible car $E = \{\overline{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ donc $d_{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}}(x) = 0$). Si $d(a_n, y) < \frac{1}{m}$, on a $d(x, y) \leqslant d(x, a_n) + d(a_n, y) < \frac{2}{m} < r$ donc $x \in B(a_n, \frac{1}{m}) \subset B(x, r)$. Comme $O = \bigcup_{x \in O}\{x\}$ et comme pour chaque $x \in O$ on peut trouver $(n_x, m_x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $x \in B(a_{n_x}, \frac{1}{m_x}) \subset O$ on en déduit que

$$O = \bigcup_{x \in O} B(a_{n_x}, \frac{1}{m_x})$$

Les couples (n_x, m_x) étant choisi dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il est clair que O est une union dénombrable de boules $B(a_n, \frac{1}{m})$. La proposition est ainsi démontrée en choisissant comme famille la collection dénombrable de boules $\{B(a_n, \frac{1}{m}),\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}^*\}$. □

Corollaire I.3.11 *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'intervalles ouverts. $\forall O$ ouvert $\in\subset \mathbb{R}$, $O = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}]a_n, b_n[$. Plus généralement, tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ peut s'écrire sous la forme $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(a_n, r_n)$ et on peut même choisir les centres a_n dans $\mathbb{Q}^N$.*

I.4 Équivalence de métriques et de normes

On a vu qu'on peut définir dans un espace métrique une infinité de métriques quand on en connaît une. En effet si (E, d) est un espace métrique alors $(E, \lambda d)$ l'est aussi pour tout $\lambda > 0$. L'exemple suivant montre une façon moins triviale de définir une autre distance à partir d'une distance d.

Exemple : Si (E, d) est une espace métrique, alors $\delta = \frac{d}{1+d}$ est aussi une métrique sur E et elle est bornée. En effet :

- $\delta(x, y) = \delta(y, x) \forall x, y \in E$ car $d(x, y) = d(y, x)$
- $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y, z,\ \delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) + \delta(z, y)$. La fonction $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ est croissante sur R^+. En outre $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Posons $g(x) = f(a + x) - f(a) - f(x)$ avec $a, x \geqslant 0$. Alors $g'(x) = f'(a + x) - f'(x) \leqslant 0$ donc g est décroissante. Or $g(0) = 0$ donc $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. On en déduit que la fonction f est sous-additive, c'est-à-dire $f(a + x) \leqslant f(a) + f(x)$, lorsque $a, x \geqslant 0$. Posons à présent $a = d(x, y)$, $b = d(x, z)$ et $c = d(y, z)$. On a $a \leqslant b + c$. La croissance de f et sa sous-additivité impliquent $f(a) \leqslant f(b + c) \leqslant f(b) + f(c)$ d'où l'inégalité triangulaire pour δ.
- On a bien sûr $0 \leqslant \delta(x, y) \leqslant 1$ donc δ est bornée.

Définition (Métriques topologiquement équivalentes) *Soient d_1, d_2 deux métriques sur un ensemble E. On dit que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si les topologies associées coïncident (c'est-à-dire si les ouverts sont les mêmes).*

Exemple : Il est facile d'exhiber des exemples de métriques non équivalentes. Sur $\mathbb{R}$, la métrique usuelle et la métrique discrète ne sont pas topologiquement équivalentes. Rappelons d'abord que la topologie associée à la métrique discrète d_d est la topologie discrète car $\forall r < 1, B_{d_d}(x, r) = \{x\}$ puisque $\{y, d_d(x, y) < 1\} = \{x\}$. On observe ensuite que le singleton $\{1\}$ est un ouvert pour la topologie discrète mais pas pour la topologie usuelle.

Proposition I.4.1 *d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes $\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists r, s > 0$ tq $B_{d_1}(x, s) \subset B_{d_2}(x, r)$ et $B_{d_2}(x, s) \subset B_{d_1}(x, r)$.*

Preuve : $\Rightarrow$ Tout ouvert pour d_1 est aussi ouvert pour d_2 donc $B_{d_2}(x, r)$ est ouvert pour d_1, donc $\exists s_1$ tq $B_{d_1}(x, s_1) \subset B_{d_2}(x, r)$. De même $\Rightarrow B_{d_1}(x, r)$ est ouvert pour d_2 donc $\exists s_2$ tq $B_{d_2}(x, s_2) \subset B_{d_1}(x, r)$. On en déduit le résultat en prenant $s = \min(s_1, s_2)$.
$\Leftarrow$ Il faut d'abord vérifier que la double inclusion se généralise par homothétie. Il suffit d'observer que les boules ouvertes B_{d_1} forment une base de la topologie associée à d_1 donc, par la relation d'inclusion, une base de la topologie associée à d_2. Par conséquent les topologies coïncident. $\square$

Définition (Distances quasi-isométriques (ou Lipschitz-équivalentes, ou fortement équivalentes)) *On dit que d_1 et d_2 sont quasi-isométriques (ou Lipschitz-équivalentes, ou fortement équivalentes) s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tq*

$$\forall x, y, \ \alpha d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \beta d_1(x,y) \tag{I.3}$$

Proposition I.4.2 .
d_1, d_2 quasi-isométriques $\Rightarrow d_1, d_2$ topologiquement équivalentes mais la réciproque est fausse.

Preuve : .
Si d_1 et d_2 sont quasi-isométriques alors $\exists \alpha, \beta > 0$ tel que $\forall x, y, \alpha d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \beta d_1(x,y)$ donc $B_{d_1}(x, \frac{r}{\beta}) \subset B_{d_2}(x,r)$ car $d_1(x,y) < \frac{r}{\beta}$ implique $\beta d_1(x,y) < r$ donc $d_2(x,y) < r$. En outre, $B_{d_2}(x, \alpha r) \subset B_{d_1}(x,r)$ car $d_2(x,y) < \alpha r$ implique $\alpha d_1(x,y) < \alpha r$ d'où $d_1(x,y) < r$. En prenant $s = \min\{\frac{r}{\beta}, \alpha\}$, on a bien, $B_{d_1}(x,s) \subset B_{d_2}(x,r)$ et $B_{d_2}(x,s) \subset B_{d_1}(x,r)$. □

On va décrire ci-dessous un contre-exemple à la réciproque.

Exemple : .
Soit (E,d) un espace métrique. On a vu que $\tilde{d} = \frac{d}{1+d}$ est aussi une métrique sur E. Nous allons montrer que $\tilde{d}$ et d sont topologiquement équivalentes mais pas quasi-isométriques en général, $\forall x, y, 1 + d(x,y) \geqslant 1$ donc $\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leqslant d(x,y)$ ce qui implique $B_d(x,r) \subset B_{\tilde{d}}(x,r)$. Soit $y \in B_{\tilde{d}}(x,s)$, c'est-à-dire $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < s$ donc $(1-s)d(x,y) < s$. Si $0 < s < 1$ on a $d(x,y) < \frac{s}{1-s}$ donc $B_{\tilde{d}}(x,s) \subset B_d(x, \frac{s}{1-s})$. Soit $r > 0$ alors $\frac{s}{1-s} = r$ si $s = \frac{r}{1+r}$ donc $B_{\tilde{d}}(x, \frac{r}{1+r}) \subset B_d(x,r)$. On en déduit que d et $\tilde{d}$ sont topologiquement équivalentes. Elles ne sont en revanche pas quasi-isométriques en général. Il suffit pour s'en convaincre de poser $E = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ et $\tilde{d}(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Alors $0 \leqslant \tilde{d}(x,y) \leqslant 1$ mais $\sup\limits_{x,y \in \mathbb{R}} d(x,y) = +\infty$ donc $\nexists \beta > 0$ tel que $d(x,y) \leqslant \beta \tilde{d}(x,y)$.

Définition (Équivalence de normes) *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que N_1 et N_2 sont (fortement) équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que*

$$\forall x \in E, \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x) \tag{I.4}$$

Remarque : Il est fréquent de parler de normes équivalentes sans préciser qu'il s'agit d'équivalence forte.

Exemple : Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

En effet $\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{N} |x_i| \leqslant N\|x\|_\infty$ et $\sum\limits_{i=1}^{N} |x_i| \geqslant \|x\|_\infty$

On a donc

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty \tag{I.5}$$

$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{N} |x_i|)^{\frac{1}{2}} \leqslant (N\|x\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{N}\|x\|_\infty$
$\|x\|_2 \geqslant \|x\|_\infty$ donc

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{N}\|x\|_\infty \tag{I.6}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{N}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{N}\|x\|_1 \tag{I.7}$$

Exemple : .
Sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$ (espace vectoriel des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

$f_n(x) = \begin{cases} -n^2x + n \text{ si x} \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 \text{ sur } [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

$\|f_n\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = n$
$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{1}{2}$
$\|f_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
Il n'existe <u>aucun</u> $\alpha > 0$ tq

$$\alpha\|f_n\|_\infty \geqslant \|f_n\|_1 \forall n \tag{I.8}$$

Les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$.

On a en revanche le résultat important qui suit dans le cas particulier de la dimension finie :

Théorème I.4.3 *Dans un espace vectoriel de dimension finie <u>toutes les normes sont équivalentes</u>.*

Preuve : Ce résultat important sera démontré plus loin dans le cours. □

I.5 Topologie induite. Sous-espace topologique

La définition suivante est également une proposition.

Définition (Topologie induite) *Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$.*
On considère la collection d'ensembles $\tau_A = \{w \cap A, w \in \tau\}$ = <u>ensemble des traces sur A des ouverts de τ</u>. Alors τ_A est une topologie sur A. On l'appelle <u>topologie induite sur A par τ</u>. On dit que (A, τ_A) est un sous-espace topologique de (X, τ).

Exemple :
- la topologie induite sur $\mathbb{Z}$ par la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est la <u>topologie discrète</u> car $\forall n \in \mathbb{Z}, \{n\} = \underbrace{\mathbb{Z} \cap \underbrace{]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}}}_{\text{ouvert de la topologie induite sur } \mathbb{Z}}$.
  Les singletons sont des ouverts de la topologie induite sur $\mathbb{Z}$ donc celle-ci est bien la topologie discrète sur $\mathbb{Z}$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, soit $A = [0,1] \times]1,2[$. A n'est ni ouvert, ni fermé pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$. En revanche A est ouvert pour sa topologie induite puisque A $\in \tau_A$ (il est à la fois ouvert et fermé).

Preuve : Montrons que τ_A est bien une topologie sur A.

(O_1) $\emptyset$ et X $\in \tau$ donc $\emptyset \cap A = \emptyset \in \tau_A$ et X $\cap A = A \in \tau_A$.

(O_2) Soient $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ un ensemble quelconque d'éléments de τ_A. Par définition $\forall i, \exists w_i \in \tau$ tq :

$$\Omega_i = \omega_i \cap A \tag{I.9}$$

$$\underset{i}{\cup}\,\Omega_i = \underset{i}{\cup}(\omega_i \cap A) = \underbrace{(\underset{i}{\cup}\omega_i) \cap A}_{\text{ouvert de } \tau \text{ par stabilité}} \tag{I.10}$$

donc $\underset{i}{\cup}\Omega_i$ est un ouvert de τ_A.

(O_3) Soit $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ un ensemble fini d'éléments de τ_A.

$$\overset{n}{\underset{k=1}{\cap}}\,\Omega_k = \overset{n}{\underset{k=1}{\cap}}(\omega_k \cap A) \text{ où } \omega_k \in \tau \tag{I.11}$$

$$\overset{n}{\underset{k=1}{\cap}}\,\Omega_k = \underbrace{(\overset{n}{\underset{k=1}{\cap}}\omega_k)}_{\text{ouvert de } \tau \text{ par stabilité}} \cap A \tag{I.12}$$

donc $\overset{n}{\underset{k=1}{\cap}}\Omega_k$ est un ouvert de τ_A. □

Proposition I.5.1 *Soit (X, τ) un espace topologique, $A \subset X$ et τ_A la topologie induite par τ sur A. Alors*

a) (X, τ) séparé $\Rightarrow$ (A, τ_A) est séparé.

b) Les fermés de (A, τ_A) sont les intersections de A avec les fermés de (X, τ). On note $\mathcal{F}_A$ la collection des fermés de A.

c) Les voisinages de $a \in A$ pour τ_A sont les intersections avec A des voisinages de $a \in \tau$

d) Si $B \subset A$ l'adhérence de B pour τ_A est la trace sur A de l'adhérence de B pour τ c'est-à-dire

$$\overline{B}^{\tau_A} = (\overline{B}^{\tau}) \cap A$$

e) A est un ouvert de $\tau \Leftrightarrow \forall O \in \tau_A, O \in \tau$.

f) (Transitivité). Si $A \subset B$ alors les topologies induites sur A par τ et τ_B sont les mêmes.

Preuve : a) Il suffit de remarquer si $x \neq y \in A$ alors, τ étant séparée, il existe deux ouverts U, V de τ tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. En considérant les deux ouverts de τ_A $U \cap A$ et $V \cap A$ on conclut que (A, τ_A) vérifie la propriété de séparation de Hausdorff.

b) Montrons d'abord qu'un fermé de τ_A est la trace sur A d'un fermé de τ. Soit F un fermé de A pour τ_A (en particulier $F \subset A$). Alors $A\backslash F \in \tau_A$ donc $\exists \omega \in \tau$ tel que $A\backslash F = \omega \cap A$. On en déduit que $F = (X\backslash\omega) \cap A$ et on peut conclure en observant que $X\backslash\omega$ est un fermé de τ.

Montrons à présent que la trace sur A d'un fermé de τ est un fermé de τ_A. Si V est un fermé de τ alors $X\backslash V$ est un ouvert de τ donc $(X\backslash V) \cap A$ est un ouvert de A donc $A\backslash((X\backslash V) \cap A)$ est un fermé de A. Or $A\backslash((X\backslash V) \cap A) = A\backslash(X\backslash V) = A \cap V$ donc A $\cap$ V est un fermé de A.

c) Soit $a \in A$ et $\omega \in V_\tau(a)$ donc $\exists O \in \tau$ tel que $a \in O \subset \omega$. Comme $a \in A$, on a $a \in O \cap A \subset \omega \cap A$. $O \cap A \in \tau_A$ par définition de la topologie induite donc $\omega \cap A \in V_{\tau_A}(a)$.
<u>Réciproquement</u>, soit $a \in A$ et $V \in V_{\tau_A}(a)$. Par définition, $V \subset A$ et il existe $O \in \tau_A$ tel que $a \in O \subset V$. Soit $\Omega \in \tau$ tel que $O = \Omega \cap A$. Alors $\Omega \cup V$ est une partie de X contenant un ouvert de τ (i.e. Ω) contenant a. Donc $\Omega \cup V \in \mathbb{V}_\tau(a)$ et comme $\Omega \cap A \subset V$ on a bien $V = (\Omega \cup V) \cap A$.

d) Soit $B \subset A$. Alors $\overline{B}^{\tau_A}$ est le plus petit fermé de τ_A contenant B et, si $\mathcal{F}$(B) est l'ensemble des fermés de τ_A contenant B, on a $\overline{B}^{\tau_A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(B)} F$
Or $\forall F \in \mathcal{F}(B), \exists V_F$ fermé de τ tq $F = V_F \cap A$ et $V_f \supset B$. On a donc

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}(B)} F = \bigcap_{\text{V fermé de } \tau, V \supset B} (V \cap A) = (\underbrace{\bigcap_{\text{V fermé de } \tau, V \supset B} V}_{=\overline{B}^\tau}) \cap A.$$

e) On a $\tau_A = \{\omega \cap A | \omega \in \tau\}$. La topologie induite par τ_B sur A est $\{(\omega \cap B) \cap A$ où $\omega \in \tau\}$. Or $A \subset B$ donc $\{(\omega \cap B) \cap A, \omega \in \tau\} = \tau_A$. □

Chapitre II

Limites – Continuité

II.1 Limite et valeurs d'adhérence d'une suite dans un espace topologique

Définition (Limite d'une suite dans un espace topologique) *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace topologique (X,τ). On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si*

$$\forall V \in \mathbb{V}(\ell),\ \ \exists n_0,\ \ \forall n \geqslant n_0, x_n \in V.$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ et on dit que ℓ est la limite de (x_n)

Proposition II.1.1 (Limite d'une suite dans un espace métrique) *Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.*

$$\begin{aligned} \lim x_n = \ell \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_0\ tq\ \forall n \geqslant n_0, x_n \in B(\ell,\epsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_0\ tq\ \forall n \geqslant n_0, d(x_n,\ell) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} d(x_n,\ell) = 0 \end{aligned}$$

Preuve : $\lim x_n = \ell \Rightarrow \forall V \in \mathbb{V}(\ell), \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in V$. En particulier avec le choix $V = B(\ell,\epsilon)$ qui est bien un voisinage de ℓ. On a donc montré que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, x_n \in B(\ell,\epsilon)$. Réciproquement, soit $V \in \mathbb{V}(\ell)$. V est un voisinage de ℓ donc $\exists \epsilon > 0$ tel que $B(\ell,\epsilon) \subset V$ et $\exists n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $x_n \in B(\ell,\epsilon) \subset V$ donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$. On a prouvé la première équivalence.
La seconde équivalence découle du fait que $x_n \in B(\ell,\epsilon) \Leftrightarrow d(x_n,\ell) < \epsilon$.
La troisième équivalence est la traduction de la convergence vers 0 de la suite réelle $(d(x_n,\ell))_{n\in\mathbb{N}}$.
$\square$

Remarque : La notion de limite dans un espace topologique n'est réellement pertinente que pour les espaces séparés.
Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie grossière $\{\emptyset,\mathbb{R}\}$ toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite n'importe quel réel car $\forall y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(y) = \{\mathbb{R}\}$ donc n'importe quelle suite réelle a tous ses éléments dans l'unique voisinage de y.

Les espaces métriques sont beaucoup plus intéressants puisqu'ils sont toujours séparés, comme on l'a déjà vu.

Proposition II.1.2 (Unicité de la limite dans un espace séparé) *Soit (X,E) un espace topologique séparé. Si (x_n) converge vers ℓ et ℓ' alors $\ell = \ell'$.*

Preuve : Supposons $\ell \neq \ell'$. L'espace étant séparé, $\exists V \in \mathbb{V}(\ell)$ et $\exists W \in \mathbb{V}(\ell')$ tq $V \cap W = \emptyset$. On a $\lim x_n = \ell \Rightarrow \exists n_1$ tel que $\forall n \geqslant n_1, x_n \in V$ et $\lim x_n = \ell' \Rightarrow \exists n_2$ tel que $\forall n \geqslant n_2, x_n \in W$. Contradiction dès que $n \geqslant \max(n_1, n_2)$ car $V \cap W = \emptyset$. □

Proposition II.1.3 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence d'une partie d'un espace métrique) *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. L'adhérence $\overline{A}$ de A est égale à l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes d'éléments de A, c'est à dire*

$$\overline{A} = \{x \in E, \exists (a_n) \in A, \lim_{n \to +\infty} a_n = x\}.$$

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x = \lim_{n \to +\infty} a_n$ avec $a_n \in A\ \forall n$. On a donc $\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, a_n \in B(x, \epsilon)$ donc $\forall V \in \mathbb{V}(x) \exists a_n \in A$ tq $a_n \in V$ donc $x \in \overline{A}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $x \in \overline{A}$ alors $\forall n > 0\ A \cap B(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$. On choisit un élément de $A \cap B(x, \frac{1}{n})$ qu'on note a_n. On a $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$. On effectue ce choix pour tout $n > 0$. La suite (a_n) ainsi construite vérifie $d(x, a_n) < \frac{1}{n}, \forall n > 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} d(x, a_n) = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} a_n = x$. Par construction on a bien $a_n \in A\ \forall n$. □

Corollaire II.1.4 *Dans un espace métrique (E,d) une partie A⊂ E est fermée si, et seulement si, elle contient la limite de chacune de ses suites convergentes.*

Preuve : .
$\boxed{\Rightarrow}$ A fermé ⇒ A = $\overline{A}$ puis on applique la proposition précédente.
$\boxed{\Leftarrow}$ $\{x \in E, \exists (a_n) \subset A \lim a_n = x\} = \overline{A}$ d'après la propriété précédente. Par hypothèse, $\{x \in E, \exists (a_n) \subset A \lim a_n = x\} \subset A$ donc $A = \overline{A}$ puisqu'on a toujours $A \subset \overline{A}$. □

Définition (Valeur d'adhérence d'une suite dans un espace topologique) *Soit X un espace topologique. On dit que $\ell \in X$ est valeur d'adhérence de la suite $(a_n) \subset X$ si*

$$\forall V \in \mathbb{V}(\ell), \forall n_0, \exists n \geqslant n_0 \ tq \ x_n \in V$$

En d'autres termes tout voisinage de ℓ contient une infinité de termes de la suite.

Définition (Traduction dans un espace métrique) *Soit (E,d) un espace métrique. On dit que $\ell \in E$ est valeur d'adhérence de (x_n) si $\forall \epsilon > 0, \forall n_0, \exists n \geqslant n_0, x_n \in B(\ell, \epsilon)$ c-à-d $d(x_n, \ell) < \epsilon$.*

Remarque : Il faut bien faire la différence avec la définition de la limite. Pour une valeur d'adhérence, on demande que pour tout $\epsilon > 0$ et **pour tout** n_0 on puisse trouver **au moins un** $n \geqslant n_0$ tel que $x_n \in B(\ell, \epsilon)$. Pour une limite, il faut que pour tout $\epsilon > 0$, il existe **au moins un** n_0 tel que **pour tout** $n \geqslant n_0$ on ait $x_n \in B(\ell, \epsilon)$.

Exemple : 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$. En effet, $\forall \epsilon > 0, \forall n, (-1)^{2n} \in B(1, \epsilon)$ et $(-1)^{2n+1} \in B(-1, \epsilon)$.

Proposition II.1.5 *Soit X un espace topologique. Si $(x_n) \to \ell$ alors ℓ est valeur d'adhérence de la suite. En outre, si X est séparé, ℓ est l'unique valeur d'adhérence de la suite.*

Preuve : $\ell = \lim x_n \Rightarrow \forall V \in \mathbb{V}(\ell), \exists N, \forall n \geqslant N, x_n \in V$ donc $\forall n_0$ on peut trouver $n \geqslant \max(N, n_0)$ tq $x \in V$ donc ℓ est valeur d'adhérence de (x_n).
Supposons à présent que X soit séparé et que (x_n) admette une autre valeur d'adhérence $\ell' \neq \ell$ (on continue à supposer que $\lim x_n = \ell$). $\exists V \in \mathbb{V}(\ell)$ et $W \in \mathbb{V}(\ell)$ tq $V \cap W = \varnothing$ et $\forall n_0, \exists n \geqslant n_0$ tel que $x_n \in W$ car ℓ' valeur d'adhérence donc $\forall n_0, \exists n \geqslant n_0$ tq $x_n \notin V$ ce qui contredit $\lim x_n = \ell$. $\square$

Définition (Suite extraite) *On dit que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application, strictement croissante : $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $y_n = x_{\phi(n)}$.*
De façon <u>équivalente</u> on dit que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite strictement croissante d'entiers $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ tels que $y_k = x_{n_k}$ (ce qui équivaut à définir $y_n = x_{\phi(k)}$ avec $\phi(k) = n_k$).

Exemple : Les suites $y_n = 2n$ et $z_n = -(2n+1)$ sont extraites de la suite $x_n = ((-1)^n)_n$ car $y_n = x_{2n}, (\phi(n) = 2n)$ et $z_n = x_{2n+1}, (\phi(n) = 2n+1)$.

Proposition II.1.6 (Caractérisation de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite dans un espace topologique) *Soit X un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. L'ensemble de ses valeurs d'adhérence est le fermé*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_m, m \geqslant n\}}.$$

Preuve : $\mathcal{A}$ est un fermé car c'est une intersection de fermés. $y \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall n, y \in \overline{\{x_m, m \geqslant n\}} \Leftrightarrow \forall n, \forall V \in \mathbb{V}(\ell) \exists m \geqslant n$ tq $x_n \in V \Leftrightarrow y$ est valeur d'adhérence de (x_n). $\square$

Remarque : Cette proposition montre bien qu'il ne faut pas confondre les valeurs d'adhérence <u>de la suite</u> (x_n) avec les points adhérents <u>à l'ensemble</u> $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ (qui est $\overline{\{x_n, n \in \mathbb{N}\}}$). Par exemple la suite (x_n) définie par $x_n = \frac{1}{n}, n > 0$ converge vers 0. 0 est la seule valeur d'adhérence de la suite d'après la proposition II.1.5 mais $\overline{\{x_n, n \in \mathbb{N}\}} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.

Il ne faut pas non plus confondre valeur d'adhérence de (x_n) et point d'accumulation de $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$: si $x_n = 0, \forall n$ alors 0 est limite de la suite, donc valeur d'adhérence, mais l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$ n'admet pas de point d'accumulation.

Proposition II.1.7
1. *Soit X un espace topologique et (x_n) une suite d'éléments de X. Si $(y_k) = (x_{n_k})$ est extraite de (x_n) et converge vers $\ell \in X$ alors ℓ est valeur d'adhérence de (x_n). Autrement dit, dans un espace topologique quelconque, les limites de suites extraites sont valeurs d'adhérence de la suite initiale.*
2. *Réciproquement, si (E, d) est un <u>espace métrique</u> et si ℓ est valeur d'adhérence de (x_n) alors $\exists (y_n)$ extraite de (x_n) qui converge vers ℓ. Autrement dit, dans un espace métrique, toute valeur d'adhérence est limite d'une suite extraite.*

Remarque : Pour prouver la propriété (2), il faut pouvoir <u>construire</u> une sous-suite convergeant vers ℓ. Ce n'est a priori pas possible dans n'importe quel espace topologique. C'est en revanche possible dans les espaces topologiques à base dénombrable de voisinages, c'est-à-dire tels que $\forall x \in X$ il existe une famille dénombrable d'ouverts $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ (dépendant de x) tq $\forall V \in \mathbb{V}(x), \exists n, A_n \subset V$. Comme on l'a vu, les espaces métriques ont cette propriété puisque $\forall x$ on peut choisir $A_n = B(x, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : (1) Soit $V \in \mathbb{V}(\ell)$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. On a $\lim y_k = \ell$ donc $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant k_0, y_k \in V$. Par définition $y_k = x_{n_k}$ et on peut trouver $k_1 \geqslant k_0$ tel que $n_{k_1} \geqslant n_0$ donc $x_{n_{k_1}} \in V$. La construction est possible pour tout $V \in \mathbb{V}(\ell)$ et pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ ce qui montre bien que, pour tout $V \in \mathbb{V}(\ell)$ et pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n_{k_1} \geqslant n_0$ tel que $x_{n_{k_1}} \in V$, donc ℓ est valeur d'adhérence de (x_n).

(2) Soit ℓ valeur d'adhérence de (x_n). Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists m_n \geqslant n$ tel que $d(x_{m_n}, \ell) < \frac{1}{n}$. La suite (x_{m_n}) est bien une suite extraite de (x_n) qui converge vers ℓ.

II.2 Limite d'une fonction

Définition *Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une fonction et $x_0 \in X$. On dit que $f(x)$ tend vers une limite $y_0 \in Y$ quand $x \to x_0$, et on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, s'il existe pour tout voisinage W de y_0 un voisinage V de x_0 tq $x \in V \Rightarrow f(x) \in W$ c'est-à-dire $f(V) \subset W$.*

Autrement dit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall W \in \mathbb{V}(y_0), \exists V \in \mathbb{V}(x_0),\ f(V) \subset W.$$

Remarque : Si Y est séparé, la limite est unique.

Proposition II.2.1 *Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques, $f : E \to F$ une fonction et $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$

(ii) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), y_0) < \epsilon$

(iii) Pour toute suite $(a_n)_n$ convergeant vers x_0 dans (E, d) la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y_0 dans (F, δ).

Preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$ découle de la définition en notant $W = B_\delta(y_0, \epsilon)$ et $V = B_d(x_0, \eta)$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit (a_n) une suite d'éléments de E tq $d(a_n, x_0) \to 0$. Soit $\epsilon > 0, \exists N$ tq $\forall n \geqslant N$, $d(a_n, x_0) < \eta_\epsilon$ (possible car $d(a_n, x_0) \to 0$) donc $\forall n \geqslant N, \delta(f(x_n), y_0) < \epsilon$. On peut le faire pour tout ϵ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = y_0$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ On va raisonner par l'absurde et supposer que $f(x)$ ne tend pas nécessairement vers y_0 quand x tend vers x_0, donc qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall n > 0$, $\exists a_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$ vérifiant $\delta(f(a_n), y_0) \geqslant \epsilon$. La suite (a_n) ainsi construite vérifie $d(a_n, x_0) \to 0$ mais $\delta(f(a_n), y_0) \geqslant \epsilon$ donc a_n converge vers x_0 mais $f(a_n)$ ne converge pas vers y_0. Contradiction. □

II.3 Fonctions continues

Définition (Fonctions continues entre deux espaces topologiques) *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. En d'autres termes $\forall W \in \mathbb{V}(f(x_0)), \exists V \in \mathbb{V}(x_0)$ tq $x \in V \Rightarrow f(x) \in W$ c'est-à-dire $f(V) \subset W$. De façon équivalente, on dit que f est continue en x_0 si $\forall W \in \mathbb{V}(f(x_0)), f^{-1}(W) \in \mathbb{V}(x_0)$.*

On dit que f est continue sur X si elle est continue en tout point de X. On note $\mathrm{C}(X, Y)$ *ou* $\mathrm{C}^0(X, Y)$ *l'espace des fonctions continues de X dans Y.*

Le théorème suivant est fondamental et joue un grand rôle dans la preuve de nombreux résultats en analyse. On rappelle que si $f : X \to Y$ et $A \subset Y$ alors

$$f^{-1}(A) = \{x \in X, \ f(x) \in A\}.$$

Théorème II.3.1 *Soient X,Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$. On a les équivalences suivantes :*

$$f \text{ continue sur } X$$
$$\Leftrightarrow$$
L'image réciproque d'un ouvert de Y est un ouvert de X
(i.e. $\forall O$ ouvert $\subset Y$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X)
$$\Leftrightarrow$$
L'image réciproque d'un fermé de X est un fermé de X
(i.e. $\forall F$ fermé $\subset Y$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.)

Remarque : Cette propriété est utilisée dans certains ouvrages comme <u>définition de la continuité</u> (d'où découlent les autres propriétés que nous avons vues).

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est continue. Soit W un ouvert de Y et $x_0 \in f^{-1}(W)$.
On a $f(x_0) \in W$ donc $W \in \mathbb{V}(f(x_0))$ et, par continuité de f en x_0, $\exists V \in \mathbb{V}(x_0)$ tel que $f(V) \subset W$ d'où $V \subset f^{-1}(W)$ donc $f^{-1}(W) \in \mathbb{V}(x_0)$. $f^{-1}(W)$ est un voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0)$, montrons que f est continue en x_0. On considère un ouvert ω de $\mathbb{V}(y_0)$. Par hypothèse $V = f^{-1}(\omega)$ est ouvert et contient x_0. On a donc $V \in \mathbb{V}(x_0)$ et $f(V) \subset \omega$ donc f est continue en x_0 puisque le raisonnement s'applique pour tout ouvert $\omega \in \mathbb{V}(y_0)$. C'est vrai $\forall x_0 \in X$ donc f est continue sur X.

Pour montrer la seconde équivalence, on se ramène à la première en remarquant que

$$\forall B \subset Y, f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$$

En effet $x \in (f^{-1}(B))^c \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B^c)$. □

La preuve du théorème repose sur des arguments locaux et permet d'en déduire en corollaire l'équivalence suivante (bien noter la dernière assertion qui découle du passage au complémentaire dans la preuve)

f continue en $x_0 \in X$
$$\Leftrightarrow$$
L'image réciproque d'un ouvert de Y contenant $f(x_0)$ est un ouvert de X contenant x_0
$$\Leftrightarrow$$
L'image réciproque d'un fermé de Y *ne contenant pas* $f(x_0)$ est un fermé de X *ne contenant pas* x_0.

Attention cependant à la dernière équivalence : on ne peut pas en général en déduire, si f n'est pas globalement continue, que l'image réciproque d'un fermé contenant $f(x_0)$ est un fermé de X contenant x_0. Il suffit de considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 sur $\mathbb{R}^-_*$ et 1 sur $\mathbb{R}^+$. Alors, si $x_0 = -\frac{1}{2}$ le singleton $\{0\}$ est bien un fermé de Y contenant $f(x_0)$ mais $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^-_*$ n'est pas fermé.

Remarque : ⚠Les équivalences qui précèdent font intervenir f^{-1}. En général, l'image d'un ouvert de X par f n'est pas un ouvert de Y même si f est continue, comme le montre l'exemple ci-dessous. Il en va de même pour l'image d'un fermé qui n'est pas nécessairement un fermé.

Exemples :
- $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$. $\mathbb{R}$ est ouvert mais $[0, +\infty[$ ne l'est pas.
- $f(x) = \arctan(x)$, f est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Définition (Application ouverte) *On dit que $f : X \to Y$ est une application ouverte si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y.*

On dit que f est une application fermée si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

On peut facilement déduire du théorème précédent les propriétés suivantes :

Proposition II.3.2 *f continue $\Leftrightarrow f^{-1}$ ouverte $\Leftrightarrow f^{-1}$ fermée.*
f ouverte et f^{-1} fonction $\Leftrightarrow f^{-1}$ continue.

Remarque : On rappelle qu'une application $f : X \to Y$ est une relation associant tout point de X à un *unique* point de Y. Une fonction associe tout point de X à *au plus* un point de Y et son domaine de définition est précisément l'ensemble des éléments de X qui ont une image par f. Pour éviter les lourdeurs, nous n'utiliserons pas explicitement le domaine de définition dans les énoncés car les preuves sont analogues.

Proposition II.3.3 *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$. Alors :*

(a) *Si f est continue en x_0 et g continue en $y_0 = f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0*
(b) *Si f est continue et Y est séparé alors $f^{-1}(\{y\})$ est fermé $\forall y \in Y$*
(c) *f continue $\Leftrightarrow \forall A \subset X, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$*
(d) *Si f est continue en ℓ alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$*

Preuve : .
On rappelle que f est continue en x_0 si $\forall W \in \mathbb{V}(f(x_0)), \exists V \subset \mathbb{V}(x_0)$ tq $f(V) \subset W$

(a) Soit Ω un voisinage de $g \circ f(x_0)$, $\exists W \in \mathbb{V}(y_0)$ et $V \in \mathbb{V}(x_0)$ tel que $g(W) \subset \Omega$ et $f(V) \subset W$ donc $g \circ f(V) \subset \Omega$
(b) Conséquence du théorème précédent et du fait que $\{y\}$ est fermé car Y est séparé (en effet, soit $A = Y \backslash \{y\}$ et $x \in A$. Comme Y est séparé, il existe $V \in \mathbb{V}(x)$ et $W \in \mathbb{V}(y)$ tels que $V \cap W = \varnothing$. En particulier $y \notin V$ donc $V \subset A$. On a montré que tout point x de A possède un voisinage inclus dans A, donc A est ouvert, d'où $\{y\}$ est fermé).
(c) $\boxed{\Rightarrow}$ $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ qui est fermé si f est continue donc $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ d'où $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit F un fermé de Y et $A = f^{-1}(F)$ (donc $F = f(A)$). Par hypothèse, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{F} = F = f(A)$ donc $f(\overline{A}) \subset f(A)$. Il en résulte que $\overline{A} \subset A$ d'où $A = \overline{A}$ et A est fermé. L'image réciproque par f de tout fermé étant fermé, on déduit du théorème précédent que f est continue.
(d) $\forall W \in \mathbb{V}(f(\ell)), \exists V \in \mathbb{V}(\ell)$ tq $\forall n \geqslant N, x_n \in V$ donc $f(x_n) \in W$. On a démontré que $\forall W \in \mathbb{V}(f(\ell)), \exists N, \forall n \geqslant N, f(x_n) \in W$ donc $f(x_n) \to f(\ell)$. □

Dans un espace métrique, la dernière propriété est en fait une équivalence.

Proposition II.3.4 (Continuité d'une application entre deux espaces métriques) *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$. On a les équivalences suivantes :*

$$f \text{ continue en } x \in E \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \ \forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0,\ f(B_d(x,r)) \subset f(B_\delta(f(x),\epsilon)) \qquad (*) \\ (2)\ \ \forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \forall y \in E,\ d(x,y) < r \Rightarrow \delta(f(x),f(y)) < \epsilon \\ (3)\ \ \text{Pour toute suite } (x_n) \text{ convergeant vers } x \text{ on a } f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \end{cases}$$

Preuve : .

(1) $\boxed{\Rightarrow}$ $B_\delta(f(x),\epsilon) \in \mathbb{V}(f(x))$ donc la continuité de f implique qu'il existe $V \in \mathbb{V}(x)$ tq $f(V) \subset B_\delta(f(x),\epsilon)$. Or V étant un voisinage de x, $\exists r > 0$ tq $B_d(x,r) \subset V$
d'où $f(B_d(x,r)) \subset B_\delta(f(x),\epsilon)$
$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall W \in \mathbb{V}(f(x)), \exists \epsilon > 0$ tq $B_\delta(f(x),\epsilon) \subset W$ donc $\exists r > 0$ tq $f(B_d(x,r)) \subset W$ ce qui implique la continuité de f car $B_d(x,r) \in \mathbb{V}(x)$

(2) L'équivalence est immédiate à partir de la précédente car

$$y \in B_d(x,r) \Leftrightarrow d(x,y) < r.$$

(3) $\boxed{\Rightarrow}$ vu à la proposition II.3.3.
$\boxed{\Leftarrow}$ découle de la proposition II.2.1. □

Définition (Convergence simple d'une suite de fonctions) *Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y. On dit que f_n converge* <u>*simplement*</u> *vers f si $\forall x \in X, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.*

Définition (Convergence uniforme d'une suite de fonctions à valeurs dans un espace métrique) *Soit X un espace topologique et (E,d) un espace métrique. On dit qu'une suite de fonctions (f_n) de X dans E converge* <u>*uniformément*</u> *vers une fonction $f : X \to E$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geqslant N,\ \underline{\forall x \in X},\ d(f_n(x),f(x)) < \epsilon.$$

Théorème II.3.5 *Si une suite de fonctions continues (f_n) d'un espace topologique X dans un espace métrique (E,d) converge uniformément vers $f : X \to E$ alors f est continue sur X.*

Preuve : C'est une conséquence du résultat suivant appliqué en tout point de X. □

Proposition II.3.6 *Soit X un espace topologique, $x \in X$, (E,d) un espace métrique et $f : X \to E$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une fonction $g_n : X \to E$ continue en x et telle que*

$$\forall y \in X, \qquad d(f(y),g_n(y)) < \frac{1}{n}.$$

Alors f est continue en x.

Preuve : Soit $r > 0$. On cherche un voisinage V de x tq $f(V) \subset B_d(f(x),r)$. Prenons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{r}{3}$ et choisissons g_n vérifiant la condition $d(f(y),g_n(y)) < \frac{1}{n}$ $\forall y \in X$. Puisque g_n est continue en x, $\exists V \in \mathbb{V}(x)$ tq $g_n(V) \subset B(g_n(x),\frac{1}{n})$. Pour tout $y \in V$ on a $d(f(x),f(y)) \leqslant \underbrace{d(f(x),g_n(x))}_{<\frac{1}{n}} + \underbrace{d(g_n(x),g_n(y))}_{<\frac{1}{n} \text{ car } g_n(V)\subset B(g_n(x),\frac{1}{n})} + \underbrace{d(g_n(y),f(y))}_{<\frac{1}{n}} \leqslant \frac{3}{n} < r$ donc $f(V) \subset B_d(f(x),r)$. On en déduit que f est continue en x.

Il est facile d'en déduire la preuve du théorème II.3.6 : sous les hypothèses du théorème, puisque (f_n) converge uniformément vers f on a que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$ et pour tout $y \in X$ on a $d(f(y), f_k(y)) < \frac{1}{n}$. Il suffit alors de choisir $k_n \geqslant N$ et de définir $g_n = f_{k_n}$. On peut alors appliquer la proposition précédente à tout point $x \in X$ et en déduire que f est continue en tout $x \in X$. □

Définition (Topologie de la convergence uniforme) *Soit X un espace topologique et (E, d) un espace métrique. On note $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E. Alors on peut munir $\mathcal{F}_b(X, E)$ de la métrique uniforme d_∞ définie par*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

Il est facile de vérifier qu'on a bien une métrique. Soit $a \in X$. Alors pour tout $x \in X$,

$$d(f(x), g(x) \leqslant d(f(x), f(a)) + d(f(a), g(a)) + d(g(a), g(x))$$

Les premier et troisième termes sont uniformément bornés quand x parcourt X puisqu'on a supposé que f et g étaient bornés. Le terme du milieu est constant. Donc $d_\infty(f, g)$ est bien défini. Les propriétés de symétrie, séparation et inégalité triangulaire sont ensuite très simples à montrer. Elles découlent des propriétés de la métrique d.

Définition (Continuité uniforme d'une fonction entre deux espaces métriques)
On dit que $f : (E, d) \to (F, \delta)$ est uniformément continue sur E si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \forall (x, y) \in E \times E,\ \ d(x, y) < r \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < r.$$

Remarque : Dans cette définition, r est indépendant de l'endroit où on se place. C'est la différence fondamentale avec la continuité simple.

Définition (Fonction lipschitzienne entre deux espaces métriques)
On dit que $f : (E, d) \to (F, \delta)$ est k–lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k) si

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \ \delta(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$$

On dit alors

Proposition II.3.7 *Soit $f : (E, d) \to (F, \delta)$. On a les implications suivantes :*
f k-lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.

Preuve : Par hypothèse : $\forall x, y \in E, \delta(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$
On a l'uniforme continuité en appliquant la définition avec $r = \frac{\epsilon}{n}$ □

II.4 Homéomorphismes

Il est facile de voir qu'étant donné une application continue et bijective f, l'application réciproque f^{-1} n'est pas nécessairement continue.

Exemple :

$$f : \underset{n}{\mathbb{N}} \underset{\mapsto}{\longrightarrow} \underset{\frac{n}{1+n^2}}{\mathbb{R}}$$

La topologie naturelle sur $\mathbb{N}$ est la topologie discrète (induite par la topologie de $\mathbb{R}$) donc toute partie de $\mathbb{N}$ est ouverte.
f est donc continue (l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert).
Soit $a = \frac{n}{1+n^2}$
$an^2 - n + a = 0$
$\Delta = 1 - 4a^2$ donc f^{-1} et bien définie sur $[0, \frac{1}{2}]$
mais $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{1+n^2} = 0 = f(0)$ donc f^{-1} n'est pas continue
$f^{-1}(f(n)) = n \nrightarrow f^{-1}(f(0)) = 0$

Définition (Homéomorphisme) *On dit que $f : X \to Y$ est un homéomorphisme si f est une bijection bicontinue, i.e. f et f^{-1} sont continues.*
Lorsqu'il existe un homéomorphisme entre X et Y on dit qu'ils sont homéomorphes.

Exemples : 1) $\mathbb{R}$ est homéomorphe à tout intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. En effet, $\phi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ est continue et bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ avec $\phi^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ continue de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$. On a donc bien $\mathbb{R} \simeq]-1,1[$. Par ailleurs, deux intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ sont toujours homéomorphes puisque la transformation affine

$$G : \underset{x}{[a,b]} \underset{\mapsto}{\longrightarrow} \underset{c+(d-c)\frac{x-a}{b-a}}{[c,d]}$$

est un homéomorphisme. Il s'ensuit que pour $\forall a < b, \mathbb{R} \simeq]a,b[$

2) $\mathbb{R}$ est homéomorphe à un cercle de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point. Par exemple

$$\mathbb{R} \simeq A = C\Big((0,\frac{1}{2}),\frac{1}{2}\Big)\backslash\{(0,1)\}$$

grâce à la transformation $\phi : (x,y) \in A \to X = \frac{x}{1-y} \in \mathbb{R}$. Il est facile de voir que ϕ est un homéomorphisme et $\phi^{-1} : X \mapsto \left(\frac{2X}{1+X^2}, \frac{X^2-1}{1+X^2}\right)$. L'application ϕ est appelée *projection stéréographique*. On peut géométriquement la définir de la façon suivante : étant donné un point (x,y) du cercle, on trace la demi-droite partant du pôle nord et passant par (x,y). Alors X est l'abscisse de l'intersection entre cette demi-droite et l'axe des abscisses.

3) La projection stéréographique se généralise aux dimensions supérieures : étant donné un point $X = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ translatée de sorte que son pôle sud soit l'origine, on trace la demi-droite partant du pôle nord et passant par X. L'intersection de cette droite avec le plan horizontal définit un point $(y_1, \cdots, y_n, 0)$. On dit que $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ est le projeté stéréographique de X. Ainsi $\mathbb{S}^n\backslash\{\text{pôle nord}\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. La projection stéréographique a la propriété remarquable de <u>préserver les angles</u> (on dit que c'est une application <u>conforme</u>).

4) Les applications

$$\begin{array}{llll} \phi : & \text{cercle } \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \text{carré } [-1,1] \times [-1,1] \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\frac{x}{\max(|x|+|y|)}, \frac{y}{\max(|x|+|y|)}\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lcl} \phi^{-1}: \text{ carré } [-1,1]\times[-1,1] & \longrightarrow & \text{cercle } \mathbb{S}^1 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}}, \sqrt{\frac{y}{x^2+y^2}}\right) \end{array}$$

définissent un homéomorphime entre $\mathbb{S}^1$ et $[-1,1]\times[-1,1]$.

5) Intuitivement, deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes si on peut passer de l'un à l'autre et réciproquement, en courbant, vrillant, étirant et raccourcissant.

6) Montrer que les lettres d'une même ligne sont homéomorphes mais que les lettres de deux lignes différentes ne le sont pas.

A R
B
E F T Y
G I J L M N S U V W Z
D O

Définition *Soit $f : (E,d) \to (F,\delta)$*
a) On dit que f est <u>bilipschitzienne</u> si c'est une bijection telle que f et f^{-1} sont lipschitziennes.
b) On dit que f est une <u>isométrie</u> si pour tout $x,y \in E$, on a $\delta(f(x), f(y)) = d(x,y)$

Remarque : Une isométrie est toujours injective. Elle est naturellement surjective de E dans $f(E)$ donc une isométrie f est une application bilipschitzienne entre E et $f(E)$, de rapport 1 dans les deux sens.

On vérifie facilement la proposition suivante :

Proposition II.4.1 *Soient d_1, d_2 deux distances sur un ensemble E et soit i l'application identité*

$$i : \underset{x}{(E,d_1)} \underset{\mapsto}{\longrightarrow} \underset{x}{(E,d_2)}$$

On a les équivalences suivantes :
d_1, d_2 sont topologiquement équivalentes $\Leftrightarrow$ i et i^{-1} sont continues (i.e. i est un homéomorphisme) ;

d_1, d_2 sont uniformément équivalentes $\Leftrightarrow$ i et i^{-1} sont uniformément continues ;

d_1, d_2 sont quasi-isométriques (ou fortement équivalentes) $\Leftrightarrow$ i et i^{-1} sont lipschitziennes (i.e. i est bilipschitzienne).

II.5 Application linéaire entre deux espaces normés

Théorème II.5.1 *Soit f une application <u>linéaire</u>, entre deux <u>espaces normés</u> E et F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) f est continue sur E ;
(2) f est continue en 0 ;
(3) f est uniformément continue sur E ;
(4) f est lipschitzienne sur E ;
(5) $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in E$, $||f(x)||_F \leqslant c||x||_E$.

Preuve : On a (4) ⇒ (3) ⇒ (1) ⇒ (2). Si (5) est vrai alors, grâce à la linéarité de f,

$$d_F(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leqslant c\|x-y\|_E = cd_E(x,y)$$

donc (5) ⇒ (4). Montrons que (2) ⇒ (5). Si f est continue en 0 alors $\exists \alpha > 0$ tel que $\|y - 0\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(0)\|_F \leqslant 1$, donc à nouveau par la linéarité de f : $\|y\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(y)\|_F \leqslant 1$. Soit $x \in E$. Si $x = 0$ on a $f(x) = 0$ par linéarité. Si $x \neq 0$, on pose $y = \frac{\alpha x}{\|x\|_E}$ donc $\|y\|_E = \alpha (\alpha > 0)$. D'après ce qui précède $\|f(y)\|_F < 1$
d'où $\left\|f\left(\frac{\alpha x}{\|x\|}\right)\right\|_F \leqslant 1$ et on déduit de la linéarité de f et de l'homogénéité de la norme que $\frac{\alpha}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F \leqslant 1$ i.e. $\|f(x)\|_F \leqslant \frac{1}{\alpha}\|x\|_E$. □

Remarque : Il existe des applications linéaires non continues entre deux espaces vectoriels normés. Considérons par exemple $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme L^1 $\|f(x)\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et soit $\phi : \underset{f \to f(0)}{E \to \mathbb{R}}$. Cette application est linéaire puisque $\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g)$. Considérons à présent la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = 1 - (n+1)x$ pour $x \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $f_n(x) = 0$ pour $x \geqslant \frac{1}{n+1}$. Alors $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2(n+1)}$ et il n'existe aucun c tel que pour tout n on ait $\phi(f_n) = 1 \leqslant \frac{c}{2(n+1)}$. On en déduit que ϕ n'est pas continue.

Proposition II.5.2 *Toute application linéaire de* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *est continue.*

Preuve : .
Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \forall x \in \mathbb{R}^n, T(x) = (T_1(x), \dots, T_k(x))$
T linéaire ⇒ T_i linéaire pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$ et la continuité de T équivaut à la continuité des T_i.
En effet $\|T(x) - T(y)\|_{\mathbb{R}^k} = \left(\sum_{i=1}^k (T_i(x) - T_i(y))^2\right)^{\frac{1}{2}}$ donc (et ce serait pareil si on choisissait une autre norme sur $\mathbb{R}^k$)

$$T(y) \to T(x) \Longleftrightarrow T_i(y) \to T_i(x), \forall i.$$

Toute application linéaire $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifie $\phi(x) = \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i)$ où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les coefficients $\phi(e_i)$ sont indépendants de x donc la continuité de ϕ découle de la continuité des applications coordonnées $x \mapsto x_i$, qui est évidente. On en déduit que toutes les applications T_i sont continues donc T est continue. □

Définition (Espace vectoriel des applications linéaires continues entres deux espaces normés) *Soient E et F deux espaces normés. On note* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'espace vectoriel des applications* <u>*linéaires et continues*</u> *de E dans F.*

Remarque : Toute combinaison linéaire finie d'applications linéaires et continues est une application linéaire et continue donc $\mathcal{L}(E, F)$ est bien un espace vectoriel.

Proposition II.5.3 (Norme sur $\mathcal{L}(E, F)$) *La quantité*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Preuve : On sait que pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ il existe c tel que $\|f(x)\|_F \leqslant c\|x\|_E$ pour tout $x \in E$. L'ensemble $\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \neq 0\}$ est non vide (si E n'est pas réduit à $\{0\}$!) et majoré par c donc il admet une borne supérieure. On en déduit que $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ existe. En outre, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|\frac{1}{\|x\|_E} f(x)\|_F = \|f(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F$$

Comme $\|\frac{x}{\|x\|_E}\|_E = 1$ et comme tout élément de $S_E(0,1) = \{x \in E,\ \|x\|_E = 1\}$ peut s'écrire de cette façon, on en déduit que

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

Remarquons à présent que pour tout x tel que $\|x\|_E \leqslant 1$ on a

$$\|f(x)\|_F \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

Comme l'égalité est réalisée en un point x tel que $\|x\|_E = 1$ on en déduit que

$$\sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \|f(x)\|_F = \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Il reste à vérifier que ceci définit bien une norme.
- Si $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$ alors $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F = 0$ donc $f \equiv 0$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\|\lambda f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \|\lambda f(x)\|_F = |\lambda| \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \|f(x)\|_F = |\lambda|\ \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

- Si $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, $\|(f+g)(x)\|_F \leqslant \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F$ donc

$$\|(f+g)(x)\|_F \leqslant \sup_{S_E(0,1)} (\|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F) \leqslant \sup_{S_E(0,1)} (\|f(x)\|_F) + \sup_{S_E(0,1)} (\|g(x)\|_F).$$

En prenant le sup sur $S_E(0,1)$, on en déduit que $\|f+g\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|g\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.
On peut conclure que $f \Rightarrow \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ □

II.6 Application bilinéaires continues

Définition (Applications bilinéaire) *Soient E, F, G trois espaces vectoriels. On dit qu'une application $f : E \times F \to G$ est bilinéaire si :*

1) $\forall y \in F, x \to f(x,y)$ est linéaire de E dans G.

2) $\forall x \in E, y \to f(x,y)$ est linéaire de F dans G.

Autrement dit, f est linéaire par rapport à chaque variable.

Remarque : Il ne faut pas confondre la bilinéarité et la linéarité. Si $f : E \times F \to G$ est bilinéaire alors $f(\lambda x, \mu y) = \lambda\mu f(x,y)$ et en particulier

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x,y).$$

Si g est linéaire sur $E \times F$ alors

$$g(\lambda x, \lambda y) = g(\lambda(x,y)) = \lambda g(x,y).$$

Théorème II.6.1 *Soit E, F, G trois espaces normés et $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) f est continue sur $E \times F$.

(2) f continue en (0,0)

(3) $\exists c > 0$ tq $\forall x \in E, \forall y \in F, \|f(x,y)\|_G \leqslant c\|x\|_E \, \|y\|_F$

Preuve : On a bien sûr (1) $\Rightarrow$ (2). Si f est continue en $(0,0)$, $\exists r > 0$ tq $\forall (x,y) \in E \times F$ tq $\|(x,y)\| \leqslant r$, $\|f(x,y)\|_G = \|f(x,y) - f(0,0)\|_G \leqslant 1$ (par bilinéarité $f(0,0) = 0$). Donc $\forall x, y \neq 0$, $\left\|\left(\frac{rx}{\|x\|_E}, \frac{ry}{\|y\|_F}\right)\right\|_{E\times F} = \max\left(\left\|\frac{rx}{\|x\|_E}\right\|_E, \left\|\frac{ry}{\|y\|_F}\right\|_F\right) = r$ (par définition de la norme naturelle sur $E \times F$) et par conséquent $\left\|f\left(\frac{rx}{\|x\|_E}, \frac{ry}{\|y\|_F}\right)\right\|_G \leqslant 1$. Or $\left\|f\left(\frac{rx}{\|x\|_E}, \frac{ry}{\|y\|_F}\right)\right\|_G = \frac{r^2}{\|x\|_E\|y\|_F}\|f(x,y)\|_G$ donc $\|f(x,y)\|_G \leqslant \frac{1}{r^2}\|x\|_E\|y\|_F$. L'inégalité est encore vraie si $x = 0$ ou $y = 0$ donc (2) $\Rightarrow$ (3) avec $c = \frac{1}{r^2}$.

Prouvons à présent que (3) $\Rightarrow$ (1). Si $\|f(x,y)\|_G \leqslant c\|x\|_E\|y\|_F$ pour tous $x \in E, y \in F$ et si $(a,b) \in E \times F$ on a : $f(x,y) - f(a,b) = f(a + (x-a), b + (y-b)) - f(a,b) = f(x-a, y-b) + f(a, y-b) + f(x-a, b)$ donc $\|f(x,y) - f(a,b)\|_G \leqslant c(\|x-a\|_E\|y-b\|_F + \|a\|_E\|y-b\|_F + \|x-a\|_E\|b\|_F)$
Si on choisit x et y tq $\|x-a\|_E \leqslant \inf\left(1, \frac{\epsilon}{3c\|b\|_F}\right)$ et $\|y-b\|_F \leqslant \inf\left(\frac{\epsilon}{3c\|a\|_F}, \frac{\epsilon}{3c}\right)$, on obtient $\|f(x,y) - f(a,b)\|_G \leqslant \epsilon$ donc $\forall \epsilon > 0$
$\|(x,y) - (a,b)\|_{E\times F} \leqslant \inf\left(1, \frac{\epsilon}{3c\|x\|_E}, \frac{\epsilon}{3c\|y\|_F}, \frac{\epsilon}{3c}\right) \Rightarrow \|f(x,y) - f(a,b)\| < \epsilon$ donc f est continue d'où (3) $\Rightarrow$ (1). □

Proposition II.6.2 *L'ensemble des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G est un espace vectoriel qu'on note $\mathcal{L}_2(E,F;G)$. On peut le munir de la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{L}_2(E,F;G)} = \sup_{(x,y)\in E\times F\setminus\{(0,0)\}} \frac{\|f(x,y)\|_G}{\|x\|_E\|y\|_F} = \sup_{\|x\|_E\leqslant 1, \|y\|_F\leqslant 1} \|f(x,y)\|_G = \sup_{\|x\|_E=1, \|y\|_F=1} \|f(x,y)\|_G = .$$

Preuve : L'application nulle est bilinéaire et continue, toute combinaison linéaire d'applications bilinéaires continues est une application bilinéaire continue donc $\mathcal{L}_2(E,F;G)$ est un espace vectoriel. On sait d'après le théorème précédent que, si $E \times F$ n'est pas réduit à l'élément $(0,0)$ et si $f \in \mathcal{L}_2(E,F;G)$, l'ensemble

$$\left\{\frac{\|f(x,y)\|_G}{\|x\|_E\|y\|_F},\ (x,y) \in E \times F\setminus\{(0,0)\}\right\}$$

n'est pas vide et est majoré par une constante c. Il admet donc une borne supérieure et la quantité

$$\|f\|_{\mathcal{L}_2(E,F;G)} = \sup_{(x,y)\in E\times F\setminus\{(0,0)\}} \frac{\|f(x,y)\|_G}{\|x\|_E\|y\|_F}.$$

est bien définie. L'égalité entre les différentes expressions et le fait d'avoir une norme se démontrent comme dans la preuve du cas linéaire. □

Chapitre III

Espaces complets

III.1 Suite de Cauchy

Définition (Suite de Cauchy) *Une suite (x_n) dans un espace métrique (E, d) est appelée suite de Cauchy si elle vérifie le critère de Cauchy :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n, p \geqslant N, d(x_n, x_p) \leqslant \epsilon$$

Proposition III.1.1 *Toute suite de Cauchy dans un espace métrique (E,d) est bornée.*

Preuve : Avec $\epsilon = 1$, $\exists N$, $\forall n, p \geqslant N$, $d(x_n, x_p) \leqslant 1$. En particulier, $\forall n \geqslant N, d(x_n, x_N) \leqslant 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x_N) \leqslant \max\{1, \max_{k \in \{0,\dots,N\}} d(x_k, x_N)\}$, qui est un nombre fini noté α, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \bar{B}(x_N, \alpha)$. □

Proposition III.1.2 *Si (x_n) est une suite de Cauchy et $(y_k) = (x_{n_k})$ est une suite extraite de (x_n) alors (y_k) est une suite de Cauchy.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n, p \geqslant N$, $d(x_n, x_p) \leqslant \epsilon$. La suite (n_k) est strictement croissante d'où $\forall k, l \geqslant N, d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leqslant \epsilon$ c'est-à-dire $d(y_k, y_l) \leqslant \epsilon$ donc (y_k) est une suite de Cauchy. □

Proposition III.1.3 *Dans un espace métrique, toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Preuve : On suppose que $(x_n) \to \ell$. Alors $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$, $d(x_n, \ell) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ donc $\forall n, p \geqslant N$, $d(x_n, x_p) \leqslant d(x_n, \ell) + d(x_p, \ell) \leqslant \epsilon$ ce qui prouve que (x_n) est de Cauchy. □

⚠La réciproque est fausse en général.

Exemple : Soit $E =]0, 1[$ muni de la métrique usuelle de $\mathbb{R}$. La suite $x_n = \frac{1}{2^n}$ d'éléments de E converge dans $\mathbb{R}$ vers 0 donc c'est une suite de Cauchy mais elle ne converge pas dans E.

Proposition III.1.4 *Une suite de Cauchy est convergente si, et seulement si, elle a une valeur d'adhérence.*

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Évident car la limite est valeur d'adhérence. $\boxed{\Leftarrow}$ Si ℓ est valeur d'adhérence de (x_n) alors il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ avec $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
La suite (x_n) est de Cauchy donc $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, p \geqslant N, d(x_n, x_p) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$
Soit $M \geqslant N$, on a $\phi(n) \geqslant N$ et $d(x_n, \ell) \leqslant d(x_n, x_{phi(n)}) + d(x_{phi(n)}, \ell) \leqslant \epsilon$
donc (x_n) converge vers ℓ. □

III.2 Espaces complets

Définition (Espace complet) *Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

Remarque : La complétude est une propriété fondamentale car le critère de Cauchy garantit la convergence d'une suite sans rien dire sur la limite. La propriété de complétude n'est pas un invariant topologique, au sens où elle n'est pas nécessairement conservée par bijection continue. Ainsi $\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle est complet (voir ci-dessous) et il est homéomorphe à $]0,1[$ qui, muni de la même métrique, n'est pas complet.

Théorème III.2.1 *$\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle est complet.*

Preuve : Soit (x_n) une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Elle est bornée (proposition III.1.1) donc elle admet une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, donc une valeur d'adhérence. D'après la proposition III.1.4, elle converge. □

⚠ $\mathbb{R}$ muni d'une autre métrique n'est pas nécessairement complet.

Exemple : $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ définit une métrique sur $\mathbb{R}$. En effet, $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y$ (arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). En outre, $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(z) - \arctan(y)|$ $d(x,z) + d(z,y)$. On peut même montrer que d et la métrique usuelle sur $\mathbb{R}$ sont topologiquement équivalentes (exercice).
Vérifions que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet. Considérons la suite des entiers naturels $x_n = n$. On a $d(n,p) = |\arctan n - \arctan p|$. Or $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$ quand $n \to +\infty$. Donc pour tout $\epsilon > 0, \exists N, \forall n, p \geqslant N, d(n,p) \leqslant \epsilon$. La suite $(x_n = n)_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$ mais elle ne converge pas car sinon elle convergerait aussi dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (par équivalence topologique).

Proposition III.2.2 *Un sous-espace complet F d'un espace métrique E est fermé dans E.*

Preuve : Soit (x_n) une suite d'éléments de F convergeant vers $x \in \overline{F}$. (x_n) est de Cauchy dans F qui est complet donc elle converge dans F, i.e. $x \in F$, d'où $\overline{F} = F$. □

Proposition III.2.3 *Tout sous-espace fermé F d'un espace métrique complet E est complet.*

Preuve : Soit (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de F. E est complet, $F \subset E$, donc (x_n) converge dans E. Mais F est fermé donc (x_n) converge dans F. Ainsi F est complet. □

Corollaire III.2.4 *Soir (E,d) un espace métrique complet et $F \subset E$. On a l'équivalence : (F,d) est complet $\Leftrightarrow$ F est fermé dans E.*

Preuve : .
$\boxed{\Leftarrow}$ Proposition III.2.3.
$\boxed{\Rightarrow}$ Cas particulier, de la proposition IV.1.5 (où il n'était pas nécessaire que E soit complet). □

Proposition III.2.5 *Si (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides d'un espace métrique complet E dont les diamètres tendent vers 0 (i.e. si F_n fermé, $F_n \neq \emptyset, F_{n+1} \subset F_n$ et $\operatorname{diam} F_n \to 0$) alors $\bigcap_n F_n = \{a\}$ où $a \in E$.*

Preuve : On choisit pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément $x_n \in F_n$. Pour tous $p > n$ on a $x_p \in F_p \subset F_n$ donc $d(x_n, x_p) \leqslant \operatorname{diam} F_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que la suite (x_n) est de Cauchy et, comme E est complet, elle converge vers un point $a \in E$. Comme $x_p \in F_n, \forall p > n$ et F_n est fermé, on a $a \in F_n$. C'est vrai pour tout n donc $a \in \bigcap_n F_n$ ce qui montre que cette intersection n'est pas vide. Si $b \in \bigcap_n F_n$ on a $a, b \in F_n \forall n$ donc $d(a,b) \leqslant \operatorname{diam} F_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $a = b$. Ainsi $\bigcap_n F_n = \{a\}$. $\square$

Remarque : L'hypothèse « E complet » est essentielle. Soit $E =]0,1[$ muni de la métrique usuelle de $\mathbb{R}$ (on sait que E muni de cette métrique n'est pas complet) et $F_n =]0, \frac{1}{n}[$, $n \geqslant 1$. F_n est fermé dans E, $\operatorname{diam} F_n = \frac{1}{n} \to 0$ et $F_{n+1} \subset F_n$. On a $\bigcap_n F_n = \varnothing$.

Proposition III.2.6 *Un produit fini d'espaces complets est complet.*

Preuve : Soit $\{(E_n, d_n)\}_{n\in\{1,\dots,N\}}$ une famille finie d'espaces métriques complets et $E = \prod_{n=1}^{n} E_n$ muni de la métrique $d = \max d_n$. Si $(x^k) = ((x_1^k, \dots, x_n^k))_k$ est une suite de Cauchy dans E alors $(x_n^k)_k$ est une suite de Cauchy dans $E_n, \forall n$ car $d(x_n^k, x_n^\ell) \leqslant d(x^k, x^\ell)$. (E_n, d_n) étant complet la suite $(x_n^k)_k$ converge vers un élément $x_n \in E_n$, i.e. $d_n(x_n^k, x_n) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$. Comme $\max_n d_n(x_n^k, x_n^l) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ on en déduit que $d_n(x^k, x) \to 0$ où $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$.
Ainsi (E, d) est complet. $\square$

Corollaire III.2.7 *Tous les espaces* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\ell^p}), \forall p \in [1, +\infty]$ *sont complets.*

Preuve : En effet, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i|$ donc $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ correspond à l'espace produit de n $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Il est donc complet. Pour tout $p \in [1, \infty[$, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_{\ell^p} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ et on sait que les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont <u>fortement équivalentes</u> donc si une suite de Cauchy converge pour une norme, elle converge aussi pour une autre norme. $\square$

Théorème III.2.8 *Soit X un ensemble et (Y, δ) un espace métrique <u>complet</u>. Soit $\mathcal{B} = (X, Y)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans Y (i.e., $f \in \mathcal{B}(X,Y) \Leftrightarrow \forall a \in Y, \exists A \in \mathbb{R}, \delta(f(a), a) \leqslant A, \forall n \in X$). On munit $\mathcal{B}(X,Y)$ de la métrique uniforme $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} \delta(f(x), g(x))$. Alors $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$ est complet.*

Si maintenant X est un espace topologique et $\mathcal{C}_b(X,Y)$ désigne l'espace vectoriel des applications <u>continues</u> et <u>bornées</u> de X dans Y alors $(\mathcal{C}_b(X,Y), d_\infty)$ est complet.

Preuve : Assurons nous d'abord que d_∞ est bien à valeurs réelles. Soit $f, g \in \mathcal{B}(X,Y)$ et $a \in Y$. Il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\delta(f(x), a) \leqslant \Lambda$ et $\delta(g(x), a) \leqslant \Lambda$ donc $\delta(f(x), g(x)) \leqslant \delta(f(x), a) + \delta(g(x), a) \leqslant 2\Lambda$ d'où $d_\infty(f,g) \leqslant 2\Lambda$. On a par ailleurs

- $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$;
- $d_\infty(f,g) = 0 \Leftrightarrow \delta(f(x), g(x)) = 0 \forall x \in X \Leftrightarrow f(x) = g(x) \forall x \in X \Leftrightarrow f = g$;
- $\delta(f(x), g(x)) \leqslant \delta(f(x), h(x)) + \delta(h(x), g(x)) \forall x \in X$ donc $\forall x \in X, \delta(f(x), g(x)) \leqslant d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$ d'où $d_\infty(f,g) \leqslant d_\infty(h,g) + d_\infty(h,g)$.

donc d_∞ est une métrique sur $\mathcal{B}(X,Y)$.
Soit à présent une suite de Cauchy (f_n) dans $\mathcal{B}(X,Y)$ i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall n, p \leqslant N, d_\infty(f_n, f_p) \leqslant \epsilon$. En particulier,

$$\forall n, p \geqslant N_\epsilon, \forall x \in X, \delta(f_n(x), f_p(x)) \leqslant \epsilon \qquad (*)$$

Pour chaque $x \in X$ la suite $(f_n(x))_n$ est donc de Cauchy dans Y.

Or Y est complet donc la suite $(f_n(x))_n$ converge vers un élément de Y qu'on note $f(x)$, et on définit ainsi une application

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & Y \\ & x & \to & \lim_n f_n(x) \end{array}$$

En faisant tendre p vers l'infini dans $(*)$ on en déduit que $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall n \geqslant N_\epsilon, \delta(f_n(x), f(x)) \leqslant \epsilon \;\; \forall x \in X$, ou encore

$$\forall \epsilon > 0,\; \exists N_\epsilon, \forall n \geqslant N_\epsilon, d_\infty(f_n, f) \leqslant \epsilon$$

ce qui prouve à la fois que $f \in \mathcal{B}(X, Y)$ (puisque si f_n est bornée et $d_\infty(f_n, f) \leqslant \epsilon$ alors f est bornée) et que $f_n \to f$ dans $\mathcal{B}(X, Y)$. Par conséquent $(\mathcal{B}(X, Y), d_\infty)$ est complet.

Lorsque X est un espace topologique, il est clair que $\mathcal{C}_b(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$. Pour prouver que $(\mathcal{C}_b(X, Y), d_\infty)$ est complet il suffit de montrer que $\mathcal{C}_b(X, Y)$ est fermé dans $\mathcal{B}(X, Y)$. Or on a vu au théorème II.3.5 que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue donc si $(f_n) \in \mathcal{C}_b(X, Y)$ converge vers $f \in \mathcal{B}(X, Y)$ alors $f \in \mathcal{C}_b(X, Y)$. Ainsi $(\mathcal{C}_b(X, Y), d_\infty)$ est fermé dans $(\mathcal{B}(X, Y), d_\infty)$ qui est complet donc $(\mathcal{C}_b(X, Y), d_\infty)$ est complet. □

Théorème III.2.9 (Prolongements des applications uniformément continues sur un sous-espace dense) *Soit (E, d) un espace métrique et (F, δ) un espace métrique complet. Soit $A \subset E$ une partie dense de E et $f : A \to F$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application continue $\tilde{f} : E \to F$ qui prolonge f, i.e. $\tilde{f}_A = f$. En outre $\tilde{f}$ est uniformément continue.*

Preuve : Soit $x \in E$, construisons $\tilde{f}(x)$. Comme A est dense $\exists (a_n) \in A \to x$. Or f est uniformément continue donc $\forall \epsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall a, b \in A$, $d(a, b) < \alpha \Rightarrow \delta(f(a), f(b)) < \epsilon$. On sait que a_n converge donc elle est de Cauchy dans E et pour $n, p \geqslant N$ on a $d(x_n, x_p) < \alpha$ d'où $\delta(f(x_n), f(x_p)) < \epsilon$. On en déduit que la suite $f(a_n)$ est de Cauchy dans F qui est complet, donc elle converge vers une limite y. Vérifions que y ne dépend pas de la suite (a_n) choisie. Si (b_n) est une autre suite convergeant vers x, on peut choisir N tel que $\forall n \geqslant N, d(a_n, x) < \frac{\alpha}{2}$ et $d(b_n, x) < \frac{\alpha}{2}$ donc $d(a_n, b_n) < \alpha$ d'où $\delta(f(a_n), f(b_n)) < \epsilon$. On en déduit que $\delta(f(a_n), f(b_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut donc poser $\tilde{f}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ pour toute suite $(x_n) \in A$ convergeant vers x. Comme f est continue sur A, si $a_n \to x \in A$, on a $f(a_n) \to f(x)$ donc $\tilde{f}_{|A} = f$.

Si g est une application continue de E dans F telle que $g_{|A} = f$ alors $\forall x \in E, \exists (a_n) \subset A$ tel que $a_n \to x$ et, par continuité de g et parce que $g_{|A} = f$, $g(x_n) = f(x_n) \longrightarrow g(x)$. Par définition de $\tilde{f}$, on a $\tilde{f}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$ donc $\forall x \in E, \tilde{f}(x) = g(x)$.

Nous avons pour l'instant prouvé qu'il existe une application $\tilde{f}$ qui prolonge f sur E, et que toute application continue qui coïncide avec f sur A coïncide avec $\tilde{f}$ sur E. Montrons à présent que $\tilde{f}$ est uniformément continue sur E. Soient $x, y \in E$ tels que $d(x, y) < \alpha$ et tels qu'il existe $(a_n) \subset A \to x$ et $(b_n) \subset A \to y$. Alors $\exists N$ tel que $\forall n \geqslant N, d(a_n, b_n) < \alpha$ donc $\delta(f(a_n), f(b_n)) < \epsilon$ (par uniforme continuité de f sur A). On passe à la limite quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leqslant \epsilon$. On a prouvé que : $\forall \epsilon, \exists \alpha, \forall x, y \in E, d(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leqslant \epsilon$ donc $\tilde{f}$ est uniformément continue sur E, et le paragraphe précédent montre qu'elle est l'unique application continue sur E qui prolonge f. □

Définition (Contraction stricte) *On dit que l'application $f : (E, d) \to (F, \delta)$ est strictement contractante (ou que f est une contraction stricte) s'il existe $\boxed{0 \leqslant k < 1}$ tel que*

$$\forall x, y \in E, \qquad \delta(f(x), f(y)) \leqslant k d(x, y)$$

(i.e. f est k-lipschitzienne avec $0 \leqslant k < 1$).

Théorème III.2.10 (Point fixe de Picard) *Soit (E, d) un espace complet et $f : E \to E$ une contraction stricte de facteur $k \in [0, 1[$. Alors f admet un unique point fixe c'est-à-dire qu'il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$. En outre, la suite définie par la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n > 0$, avec x_0 donné, converge vers a et $d(x_n, a) \leqslant k^n d(x_0, a)$.*

Preuve : $\boxed{\text{Existence :}}$ On examine la suite définie dans l'énoncé,
$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant kd(x_n, x_{n-1})$ donc par récurrence $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0)$.
Par l'inégalité triangulaire $d(x_{n+p}, x_n) \leqslant \sum_{m=1}^{p} d(x_{n+m}, x_{n+n-1})$ donc

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqslant d(x_1, x_0) \sum_{m=1}^{p} k^{n+m-1} = d(x_1, x_0) k^n \left(\frac{1 - k^p}{1 - k} \right) \leqslant \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0).$$

Comme $k \in [0, 1[$, on en déduit que la suite (x_n) est de Cauchy dans E qui est complet, donc (x_n) converge vers un élément $a \in E$. En outre, $d(x_{n+p}, x_n) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$ donc en faisant tendre $p \to +\infty$ on obtient $x_{n+p} \to a$ et $d(a, x_n) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.

Comme $x_{n+1} = f(x_n)$, on a quand $n \to +\infty$ $x_{n+1} \to a, x_n \to a$ et, par continuité de f, $f(x_n) \to f(a)$ d'où à la limite $a = f(a)$ i.e. a est un point fixe de f.
$\boxed{\text{Unicité :}}$ Si b vérifie $f(b) = b$ alors $d(f(b), f(a)) \leqslant kd(b, a)$ donc $d(b, a) \leqslant kd(b, a)$. Or $k < 1$ donc nécessairement $d(a, b) = 0$ i.e. $a = b$.
$\boxed{\text{Vitesse de convergence :}}$ On a $d(x_n, a) = d(f^n(x_0), f^n(a))$, où $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, donc

$$d(x_n, a) = d(f^n(x_0), f^n(a)) \leqslant kd(f^{n-1}(x_0), f^{n-1}(a)) \leqslant \cdots \leqslant k^n d(x_0, a).$$

□

Remarque : Les trois hypothèses du théorème (E complet, $f : E \to E$, f contraction) sont essentielles. Ainsi $f(x) = \frac{x}{2}$ est une $1/2$ contraction de $X =]0, 1]$ dans lui même mais n'a pas de point fixe dans X qui n'est pas complet. En effet, $x = f(x) \Rightarrow x = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 0 \notin X$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Alors f vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ si $x \neq y$ (car f est dérivable et $|f'(z)| = |z|/ < \sqrt{z^2 + 1} < 1$ pour tout z) mais $\sqrt{x^2 + 1} = x \Rightarrow x \geqslant 0$ et $x^2 + 1 - x^2 = 0$ qui n'a pas de solution. Ici le théorème ne s'applique pas car f n'est pas une contraction.

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $f(x) = \frac{x}{2}$. f est $\frac{1}{2}$ contractante sur $[0, 1]$, $[0, 1]$ est complet mais le théorème ne s'applique pas car $f([0, 1]) = [1, \frac{3}{2}]$ $(\frac{x}{2} + 1 = x \Rightarrow x = 2 \notin [0, 1])$.

III.3 Espaces de Banach

Définition *Un espace normé complet est appelé espace de Banach.*

Remarque : On parlera plus loin des espaces de Hilbert qui sont des espaces vectoriels munis d'un produit scalaire et complets.

Voici quelques exemples importants d'espaces de Banach.

Proposition III.3.1 *Si X est un ensemble et E un espace de Banach, l'espace vectoriel $B(X,E)$ des applications bornées de X dans E, muni de la norme uniforme $\|f\|_{B(X,E)} = \sup_{x\in X}\|f(x)\|_E$ est un espace de Banach.*

Preuve : On voit aisément que $(B(X,E), \|.\|_{B(X,E)})$ est un espace vectoriel normé. Le fait qu'il soit complet est une conséquence du théorème III.2.8 puisque $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_{B(X,E)}$. □

Proposition III.3.2 *Si X est un espace topologique et E un espace de Banach alors l'espace vectoriel $C_b(X,E)$ des applications continues et bornées de X dans E muni de la norme uniforme $\|f\|_{C_b(X,E)} = \sup\limits_{x\in X}\|f(x)\|_E$ est un espace de Banach.*

Preuve : C'est à nouveau une conséquence du théorème III.2.8. □

Proposition III.3.3 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach. L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires et continues de E dans F, muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\limits_{\|x\|_E\leqslant 1}\|f(x)\|_F$ est un espace de Banach.*

Preuve : On a déjà vu que $f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$. Montrons que cet espace normé est complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy i.e. $\forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n,m \geqslant n, \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \epsilon$ c'est-à-dire

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n,m \geqslant n,\ \sup_{\|x\|_E\leqslant 1}\|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leqslant \epsilon \qquad (*).$$

On en déduit que $\forall x$ tel que $\|x\|_E \leqslant 1$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F. Or F est complet donc $f_n(x)$ converge vers un élément de F qu'on note $f(x)$. Cette définition est pour l'instant valable seulement lorsque $\|x\|_E \leqslant 1$ mais on peut l'étendre à E tout entier. En effet, $\forall y \neq 0$, $f_n(y) = \|y\|_E f_n(\frac{y}{\|y\|_E}) \to \|y\|_E f(\frac{y}{\|y\|_E})$. On définit donc l'extension suivante sur E

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \|x\|_E \leqslant 1 \\ \|x\|_E f(\frac{x}{\|x\|_E}) & \text{si } \|x\|_E > 1 \end{cases}$$

et on déduit de ce qui précède que pour tout $x \in E$, $\tilde{f}(x) = \lim_n f_n(x)$.

Il est alors facile de voir que $\tilde{f}$ est linéaire. En effet,

$$\tilde{f}(x+y) = \lim_n f_n(x+y) = \lim_n(f_n(x) + f_n(y)) = \lim_n f_n(x) + \lim f_n(y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$$

et

$$\tilde{f}(\lambda x) = \lim_n f_n(\lambda x) = \lim_n \lambda f_n(x) = \lambda \lim_n f_n(x) = \lambda\tilde{f}(x).$$

Puis, en faisant tendre m vers l'infini dans $(*)$, on obtient que $\forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n \geqslant N, \sup\limits_{\|x\|_E\leqslant 1}\|f_n(x) - \tilde{f}(x)\| \leqslant \epsilon$ donc $f_n \to \tilde{f}$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. En particulier, $\tilde{f} \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E,F)$ est bien un espace de Banach. □

Théorème III.3.4 *Soit (X,μ) un espace mesuré. Si $p \in [1,+\infty[$ on considère l'application qui à toute fonction de X dans $\mathbb{R}$ associe la quantité*

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Lorsque $p = +\infty$, on définit

$$\|f\|_\infty = \inf\{c,\ |f(x)| \leqslant c \text{ presque partout sur } X\}$$

Étant donné $p \in [1, +\infty]$, on définit l'espace fonctionnel

$$L^p = \{f : X \to \mathbb{R},\ \|f\|_p < +\infty\}.$$

Alors

$$\forall p \in [1, +\infty], \qquad (L^p, \|\cdot\|_p) \text{ est un espace de Banach}$$

Preuve : Cf le cours d'intégration ou *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, H. Brézis. □

Remarque : L'espace $L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire. $< f, g >_{L^2(X,\mu)} = \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$ associé à la norme $\|f\|_{L^2(X,\mu)} = (\int |f(x)|^2 d\mu(x))^{\frac{1}{2}}$.

Remarque : Sur l'espace vectoriel $C_b(X, E)$, la norme uniforme $\|f\|_{C_b(X,E)} = \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|_E$ coïncide avec la norme L^∞ car les fonctions de $C_b(X, E)$ sont continues (donc si $|f(x)| \leqslant c$ presque partout alors, par continuité, la propriété est vraie partout et on a $\inf\{c,\ |f(x)| \leqslant c$ presque partout sur $X\} = \sup_{x\in X} f(x)$). On a déjà vu que $(C_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Ce n'est pas vrai pour $(C_b(X, E), \|\cdot\|_p)$ si $p \in [1, \infty[$ (c'est-à-dire lorsqu'on remplace la norme uniforme par une norme L^p avec $p < \infty$). Prenons par exemple $X =]-1, 1[$, $E = \mathbb{R}$ et la suite de fonctions continues $f_n(x)$ définies par $f_n(x) = 1$ si $x \leqslant 0$, $f_n(x) = 1 - \frac{n}{x}$ si $x \in]0, \frac{1}{n}[$, $f_n(x) = 0$ si $x \in [\frac{1}{n}, 1[$. Toutes les applications f_n sont continues, et elles convergent ponctuellement vers la fonction discontinue $f(x) = 1$ si $x \leqslant 0$, et $f(x) = 0$ si $x > 0$. Pour tout $p \in [1, \infty[$,

$$\|f_n - f\|_p = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - \frac{x}{n})^p dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{n} \to 0$$

donc f_n converge vers f pour toutes les normes L^p, $p \in [1, \infty[$. On en déduit que la suite (f_n) est de Cauchy dans $(C_b(X, E), \|\cdot\|_p)$ mais comme elle converge vers une fonction discontinue, $(C_b(X, E), \|\cdot\|_p)$ n'est pas complet pour tout $p \in [1, \infty[$. On peut en revanche vérifier que $\|f_n - f\|_\infty = 1$ pour tout n donc il n'y a pas convergence dans L^∞.

Théorème III.3.5 (Prolongement des applications linéaires continues) *Soient E, F deux espaces normés et G un sous-espace vectoriel dense dans E et $f \in \mathcal{L}(G, F)$. Si F est un espace de Banach alors il existe un unique élément $\tilde{f} \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\tilde{f}_{|G} = f$*

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème III.2.9 en observant que si $f \in \mathcal{L}(G, F)$ alors elle est lipschitzienne sur G d'après le théorème II.5.1 donc uniformément continue sur G. Le théorème III.2.9 garantit l'existence d'un unique prolongement $\tilde{f}$ uniformément continu sur E. Il faut cependant vérifier en plus que $\tilde{f}$ est linéaire. Rappelons que dans la preuve du théorème III.2.9 on a défini $\tilde{f}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$ où $(a_n) \subset G \to x \in E$ et $\tilde{f}(x)$ ne dépend pas de la suite (a_n) choisie. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda a_n \to \lambda x$ et $\tilde{f}(\lambda x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\lambda a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda f(a_n)$ par linéarité de f_n, donc $\tilde{f}(\lambda x) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lambda \tilde{f}(x)$.
Si $(a_n) \in G \to x$ et $(b_n) \in G \to y$ alors $(a_n + b_n) \to x + y$ et $\tilde{f}(x + y) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) + f(b_n)$ par linéarité de f, d'où $\tilde{f}(x + y) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) + \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$ donc $\tilde{f}$ est bien linéaire. □

Définition *Dans un espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|_E)$ *on dit qu'une série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *est absolument convergente si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

Proposition III.3.6 *Un espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|_E)$ *est un espace de Banach* *<u>si, et seulement si,</u>* *toute série absolument convergente converge dans* E*, i.e.*

$$(E, \|\cdot\|_E) \text{ espace de Banach} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\Big) \Rightarrow \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in E\Big) \right).$$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(E, \|\cdot\|_E)$ complet. Soit (x_n) une suite de E telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$. Alors les sommes partielles $S_N = \sum_{n\leqslant N} x_n$ vérifient pour $M \geqslant N$

$$\|S_M - S_N\|_E = \Big\| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \Big\|_E \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\|_E.$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge, la suite des sommes partielles $T_N = \sum_{n\leqslant N} \|x_n\|_E$ est de Cauchy donc l'égalité précédente montre que la suite (S_N) est également de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$ qui est complet, donc elle converge.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$. On peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_E \leqslant 2^{-k}$. On pose alors $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et la série $\sum_k u_k$ est absolument convergente donc converge dans E par hypothèse. Or on a $x_{n_{k+1}} - x_{n_0} = \sum_{j=0}^{k} u_j$ donc la convergence dans $(E, \|\cdot\|_E)$ de la suite $\left(\sum_{j=0}^{k}\right)_k$ implique la convergence dans $(E, \|\cdot\|_E)$ de la sous-suite $(x_{n_k})_k$. On conclut grâce à la proposition III.1.4.

Chapitre IV

Espaces compacts

IV.1 Propriété de Borel-Lebesgue

Définition (Recouvrement) *Une famille de parties $\{O_i\}_{i\in I}$ d'un ensemble E est appelée recouvrement de E si $E = \bigcup_{i\in I} O_i$ c'est-à-dire si tout élément de E appartient à au moins un O_i. Si $\mathcal{R} = (O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E, on appelle sous-recouvrement de $\mathcal{R}$ une sous-famille $(O_i)_{i\in J}$, $J \subset I$ qui est aussi un recouvrement de E, i.e. $E = \bigcup_{i\in J} O_i$. On appelle* <u>recouvrement ouvert</u> *de E tout recouvrement de E par une collection d'ouverts.*

Définition (Espace compact) *Un espace topologique (X, τ) E est dit compact s'il est* <u>séparé</u> *et s'il vérifie la* <u>propriété de Borel-Lebesgue</u> *:*

de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini (c'est à dire constitué d'une famille finie d'ouverts).

En d'autres termes si $X = \bigcup_{i\in I} O_i$ avec O_i ouvert pour tout i alors il existe J fini $\subset I$ tel que $X = \bigcup_{i\in J} O_i$.

Définition (Partie compacte) *Soit (X, τ) un espace topologique. On dit qu'une partie $A \subset X$ est compacte si c'est un espace compact pour la topologie induite. De façon équivalente, $A \subset X$ est compact si A est séparé pour la topologie induite et si tout recouvrement de A par des* <u>ouverts de X</u> *contient un sous-recouvrement fini de A. Autrement dit*

$$A \subset X \textit{ compact} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A, \tau) \textit{ séparé} \\ A \subset \bigcup_{i\in I} O_i,\ O_i \textit{ ouverts de } X \ \Rightarrow\ \exists J \textit{ fini } \subset I,\ A \subset \bigcup_{i\in J} O_i \end{cases}$$

Remarque : Il est important de comprendre dans cette définition pourquoi on a une inclusion au lieu d'une égalité. C'est parce qu'on utilise des ouverts de X pour recouvrir A. Si l'on voulait utiliser la définition originale sur l'espace induit (A, τ_A), il faudrait écrire une égalité faisant intervenir des ouverts de A pour la topologie induite. Or ces ouverts de A sont les traces sur A d'ouverts de X et on obtient donc une inclusion lorsqu'on utilise ces ouverts de X en entier, et pas seulement leur restriction à A. C'est une façon plus simple de procéder qui évite d'utiliser la topologie induite.

Par passage au complémentaire on a une caractérisation équivalente de la compacité par les fermés.

Proposition IV.1.1 *Soit (X, τ) un espace topologique* <u>*séparé*</u>*. Alors (X, τ) est compact si, et seulement si, pour toute famille de* <u>*fermés*</u> *$(F_i)_{i\in I}$ d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide, i.e.*

$$(\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing) \;\Rightarrow\; (\exists J \subset I \text{ fini}, \quad \bigcap_{i\in J} F_i = \varnothing)$$

Preuve : C'est une conséquence directe de la définition avec les ouverts puisque $E_i = X \backslash F_i$ est ouvert pour tout i et

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing \Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} E_i = X$$

□

Corollaire IV.1.2 *Soit E un espace compact et $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante (i.e. $F_{n+1} \subset F_n$) de fermés non vides de X. Alors $\bigcap_{n\geqslant 1} F_n \neq \varnothing$.*

Preuve : Soit J une partie finie quelconque de $\mathbb{N}^*$ et $p = \max J$. Alors $\cap_{n\in J} F_n = F_p$ qui est non vide par hypothèse. Toute intersection finie des F_n est non vide donc, d'après la contraposée de la proposition précédente, $\bigcap_{n\geqslant 1} F_n \neq \varnothing$. □

Corollaire IV.1.3 *Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace compact E. Alors :*

(i) (x_n) admet au moins une valeur d'adhérence.

(ii) Si (x_n) admet une seule valeur d'adhérence ℓ alors (x_n) converge vers ℓ.

Remarque : La propriété (ii) découle de la propriété (i) comme on le verra dans la preuve ci-dessous. Ce corollaire énonce le fait que la compacité implique (i) et (ii). En revanche la réciproque (i) ⇒ compacité n'est pas toujours vraie. Elle l'est dans les espaces métriques (cf le théorème de Bolzano-Weierstrass énoncé plus loin).

Preuve : (i) Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n). D'après la proposition II.1.6 $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n, m \geqslant n\}}$. Notons $F_n = \overline{\{x_m, m \geqslant n\}}$. F_n est fermé et non vide pour tout n. La suite (F_n) est décroissante pour l'inclusion. D'après le corollaire précédent, $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.

(ii) Supposons que (x_n) ne converge pas vers ℓ. On peut donc trouver un ouvert U contenant ℓ et une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \notin U$ $\forall k$. D'après (i) la suite (x_{n_k}) possède une valeur d'adhérence ℓ'. Notons $F = E\backslash U$, F est fermé, $\forall k$, $x_{n_k} \in F$ donc $\ell' \in F$. D'où $\ell \neq \ell'$. Or ℓ' est aussi une valeur d'adhérence de (x_n) d'où la contradiction. □

Proposition IV.1.4 *(Tout fermé d'un compact est un compact) Si (X, τ) est compact et $A \subset X$ est fermé alors A est compact.*

Preuve : On a déjà vu qu'un sous-espace topologique d'un espace séparé est séparé. Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement de A par des ouverts de X, i.e. $A =\subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Alors la famille $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup E\backslash A$ forme un recouvrement ouvert de X (car $X\backslash A$ est ouvert puisque A est fermé). Comme (X, τ) est compact on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e. $X = \bigcup_{i=1}^N U_{\lambda_i} \cup (X\backslash A)$. Or $A \cap (X\backslash A) = \varnothing$ donc $A \subset \bigcup_{i=1}^N U_{\lambda_i}$. □

Proposition IV.1.5 (Tout compact est fermé) *Soit (X, τ) un espace topologique* <u>*séparé*</u> *et $A \subset X$ un compact. Alors A est fermé dans X.*

Preuve : Montrons que $A^C = X \backslash A$ est ouvert. Soit $x \in A^C$. Nous allons montrer qu'il existe un ouvert U tq $x \in U \subset A^C$. Par la propriété de séparation de Hausdorff, pour tout point $y \in A$, $\exists$ deux ouverts U_y et V_y tels que $x \in U_y$, $y \in V_y$, $U_y \cap V_y = \emptyset$ (c'est possible car $x \in A^C, y \in A$ donc $x \neq y$). La famille $(V_y)_{y \in A}$ forme un recouvrement ouvert de A, A est compact donc on peut trouver un sous-recouvrement fini $(V_{y_i})_{i \in \{1,\ldots,N\}}$. On pose alors $U = \cap_{i=1}^N U_{y_i}$. U est ouvert comme intersection finie d'ouverts. Il est en outre clair par construction que $U \cap A \subset U \cap \cup_{i=1}^n V_{y_i} = \emptyset$. Ce raisonnement est valable pour tout $x \in A^C$ donc A^C est ouvert. □

Proposition IV.1.6 (Stabilité par union finie et par intersection quelconque) *Soit E un espace topologique séparé :*

- *Si $K_1, \ldots, K_n$ sont des compacts de E alors $\bigcap_{i=1}^n K_i$ est compact.*
- *Si $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille quelconque de compacts de E alors $\cap K_\lambda$ est compact.*

Preuve : On démontre la stabilité par l'union de deux compacts et on en déduit en itérant le résultat pour une union finie. Soit K_1, K_2 deux compacts de E et $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert de $K_1 \cup K_2$. Comme K_1 est compact et $K_1 \subset \bigcup_\lambda U_\lambda$, il existe un sous-recouvrement fini

$$K_1 \subset \bigcup_{i \in I_1} U_\lambda.$$

De même il existe un sous-recouvrement fini de K_2

$$K_2 \subset \bigcup_{i \in I_2} U_\lambda.$$

On conclut en remarquant que $K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i \in I_1 \cup I_2} U_\lambda$ et $I_1 \cup I_2$ est fini.

Soit $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille quelconque de compacts de E. On se donne $\lambda_0 \in \Lambda$. Tous les K_λ sont fermés dans E donc $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ est fermé dans E. Or $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \subset K_{\lambda_0}$ qui est compact. Tout fermé d'un compact est compact donc $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ est compact. □

Remarque : La compacité n'est pas stable en général par union quelconque.

Exemple : Chaque singleton $\{x\}$ de $\mathbb{R}$ est évidemment compact (à partir de n'importe quel recouvrement ouvert du singleton, il suffit de choisir un ouvert qui le contient pour obtenir un sous-recouvrement fini !) mais $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ n'est pas compact puisque la suite $x_n = n$ n'admet pas de valeur d'adhérence.

Le théorème suivant, que nous admettrons, est délicat à démontrer mais très utile pour caractériser les parties compactes d'un grand nombre d'espaces fonctionnels.

Théorème IV.1.7 (Théorème de Tychonoff) *Un produit d'espaces topologiques non vides est compact si, et seulement si, tous les espaces facteurs sont compacts. En d'autres termes, soit $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une collection quelconque d'espaces topologiques et $E = \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. On a l'équivalence*

$$(E = \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \text{ est compact }) \iff (E_\lambda \text{ est compact } \forall \lambda).$$

Théorème IV.1.8 (L'image d'un compact par une application continue est un compact) *Soit E un espace compact et f une application continue de E dans un espace séparé F. Alors $f(E)$ est compact.*

Preuve : Soit $A = f(E)$ et $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert de A. On pose $U_\lambda = f^{-1}(O_\lambda)$ et comme f est continue U_λ est un ouvert de E $\forall\lambda$.
$\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda = \cup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(O_\lambda) = f^{-1}(\cup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda) \supset f^{-1}(f(E)) \supset E$. Or $f : E \to F$ donc nécessairement $E = \cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$. E étant compact il existe un sous-recouvrement fini $E = \cup_{i=1}^{N}U_{\lambda_i}$ d'où $A = f(E) = f(\cup_{i=1}^{N}U_{\lambda_i}) = \cup_{i=1}^{N}f(U_{\lambda_i}) \subset \cup_{i=1}^{N}O_{\lambda_i}$ donc A est compact.

□

IV.2 Compacts métrisables

Proposition IV.2.1 *Toute partie compacte d'un espace métrique est bornée.*

Preuve : Soit (E, d) un espace métrique, $A \subset E$ un compact et $x_0 \in E$. On a $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0, n)$ car pour tout $y \in A, d(x_0, y) < +\infty$. On peut extraire un sous-recouvrement fini $A \subset \bigcup_{n\in I} B(x_0, n)$, I fini et on a bien sûr $A \subset B(x_0, N_0)$ avec $N_0 = \max I$ donc A est bornée. □

Corollaire IV.2.2 *Dans un espace métrique, tout compact est fermé et borné.*

Remarque : Attention, ce corollaire établit l'implication compact ⇒ fermé et borné. Nous n'avons pas encore examiné la réciproque ; nous verrons qu'elle est vraie en dimension finie mais il faut bien noter qu'elle est en général *complètement fausse* en dimension infinie. Le théorème de Riesz stipule que la boule unité fermée d'un espace normé est compacte si, et seulement si, l'espace est de dimension finie !

Théorème IV.2.3 (Propriété de Bolzano-Weierstrass) *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors*

A compact ⇔ Toute suite (x_n) d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ cf Corolaire IV.1.3
$\boxed{\Leftarrow}$ c'est une conséquence des deux résultats suivants.

Lemme IV.2.4 *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$ tel que toute suite d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A. Alors pour tout réel $\alpha > 0$ on peut recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon α.*

Preuve : Remarquons d'abord que A est nécessairement fermée puisque toute suite d'éléments de A converge dans A. On démontre la contraposée de la proposition énoncée dans le lemme. On suppose qu'il existe α tel qu'on ne puisse pas recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon α. Soit x_0 un élément quelconque de A. Il existe $x_1 \in E$ tel que $x_1 \notin B(x_0, \alpha)$. Supposons qu'on puisse trouver $(x_0, \ldots, x_p) \in A$ tels que pour tout $n \in [0, p]$ et $\forall m \neq n$, $d(x_m, x_n) \geqslant \alpha$ (on sait au moins le faire pour $p = 1$). Par hypothèse $\cup_{n=0}^{p}B(x_n, \alpha) \neq A$ donc il existe $x_{p+1} \notin \cup_{n=0}^{p}B(x_n, \alpha)$. Par le principe de récurrence on peut donc construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $\forall m \neq n$, $d(x_m, x_n) \geqslant \alpha$. Alors (x_n) ne possède aucune valeur d'adhérence dans A (car aucune sous-suite ne converge et qu'on est dans un espace métrique). On a ainsi démontré la contraposée. □

Lemme IV.2.5 (Lemme de Lebesgue) *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. On suppose que toute suite (x_n) d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A. Alors pour toute famille $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'ouverts de E tels que $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}U_\Lambda$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in A, \exists\lambda \in \Lambda, B(x, \alpha) \subset U_\lambda$.*

Preuve : Par l'absurde, on suppose que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in A, \forall \lambda \in \Lambda, B(x,\alpha) \not\subset U_\lambda$. On choisit $\alpha = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On construit une suite $x_n \in A$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \Lambda, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_\lambda$. Par hypothèse la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence donc (puisqu'on est dans un espace métrique) il existe une sous-suite (x_{n_p}) et un élément $x \in A$ (car A est fermé puisqu'elle contient toutes les valeurs d'adhérence des suites de ses éléments) tels que $x_{n_p} \to x$. Les U_λ recouvrent A donc $\exists \mu \in \Lambda$ tel que $x \in U_\mu$. Soit $\beta > 0$ tel que $B(x,\beta) \subset U_\mu$ (un tel β existe puisque U_μ est ouvert).

On choisit p assez grand pour que $d(x_{n_p}, x) < \frac{\beta}{2}$ et $\frac{1}{n_p} < \frac{\beta}{2}$. Alors $\forall y \in B(x_{n_p}, \frac{1}{n_p})$ on a $d(x,y) \leqslant d(y, x_{n_p}) + d(x_{n_p}, x) < \beta$ donc $B(x_{n_p}, \frac{1}{n_p}) \subset B(x,\beta) \subset U_\mu$ ce qui contredit la définition de la suite (x_n). □

Fin de la preuve du théorème IV.2.3 : Si toute suite (x_n) d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A et si (U_λ) est un recouvrement ouvert de A alors, grâce au lemme de Lebesgue, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in A, \exists \lambda \in \Lambda$ tel que $B(x,\alpha) \subset U_\lambda$. Or il existe un nombre fini de boules $B(x_i, \alpha)$, ($i \in I$ fini), qui recouvrent A (lemma IV.2.4) donc $A \subset \cup_{i \in I} B(x_i, \alpha) \subset \cup_{i \in I} U_{\lambda_i}$ où l'on choisit les λ_i pour que $B(x_i, \alpha) \subset U_{\lambda_j}$. On en déduit que A est compact. □

Proposition IV.2.6 *Tout espace métrique compact est complet.*

Preuve : Soit (x_n) une suite de Cauchy d'un espace métrique compact (E,d). D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass (x_n) admet une valeur d'adhérence donc elle converge d'après la proposition III.1.4. □

La réciproque est évidemment fausse : $\mathbb{R}$ muni de sa métrique usuelle est complet mais n'est pas compact puisque la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède aucune valeur d'adhérence puisque $d(x_n, x_k) \geqslant 1$ dès que $k \neq n$. On peut aussi simplement remarquer que $\mathbb{R}$ ne peut pas être compact puisqu'il n'est pas borné.

IV.3 Parties compactes de $\mathbb{R}^n$

Proposition IV.3.1 *Si K est un compact non vide de $\mathbb{R}$ alors K contient un plus grand point et un plus petit point.*

Preuve : K est borné et non vide donc $\alpha = \inf K$ et $\beta = \sup K$ existent. Par définition de l'infimum, $\forall \epsilon > 0, K \cap [\alpha, \alpha + \epsilon[\neq \emptyset$ donc α est adhérent à K. Or K est fermé donc $\alpha \in K$. Même raisonnement pour β. En conclusion, $\alpha = \min K$ et $\beta = \max K$. □

Théorème IV.3.2 (Théorème de Borel-Lebesgue) *L'intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$ est compact.*

Preuve : Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $[0,1]$ (en utilisant des ouverts de $\mathbb{R}$) et soit $A = \{x \in [0,1], [0,r]$ admet un sous recouvrement par un nombre fini de $U_i\}$. A est non vide car $0 \in A$ puisqu'il existe i_0 tel que $0 \in U_{i_0}$. On veut prouver que $1 \in A$. On a $0 \in U_{i_0} \Rightarrow \exists r, t > 0$ tels que $[0,r] \subset [0,t[\subset U_{i_0}$ car U_{i_0} est ouvert. Ainsi $[0,r] \subset A$. L'ensemble A est non vide et majoré par 1 donc il admet une borne supérieure $\alpha \leqslant 1$. $\exists j \in I$ tel que $\alpha \in U_j$ et comme U_j est ouvert $\exists \delta > 0$ tel que $U_j \supset [0,1] \cap]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$. Par définition de α il existe un élément $x \in A \cap]\alpha - \delta, \alpha[$ (car $\alpha = \sup A$). Par définition de A, $[0,x]$ peut être recouvert par une union finie $\cup_{k \in J} U_k$, J finie donc $[0,\alpha] \subset U_j \cup \bigcup_{k\in J} U_k$. On en déduit que $\alpha \in A$. Si $\alpha < 1$, $\exists y \in [0,1] \cap]\alpha, \alpha+\delta[$. L'intervalle $[0,y]$ serait alors lui aussi inclus dans $\cup_{k\in J} U_k \cup U_j$ donc α ne serait pas le sup de A d'où la contradiction. On en déduit que $\alpha = 1$. □

Théorème IV.3.3 *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.*

Preuve : On a déjà montré l'implication directe. Montrons la réciproque : si K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, $\exists N$ tel que $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$, $|x_i| \leqslant N$, i.e. $K \subset [-N,N]^n$. Or pour tout entier N l'application $x \mapsto N(2x-1)$ est continue de $[0,1]$ dans $[-N,N]$. Comme $[0,1]$ est compact, $[-N,N]$ l'est aussi (théorème IV.1.8). Le produit de compacts étant compact (on peut utiliser le théorème de Tychonoff mais comme il s'agit d'un produit fini, on peut le démontrer directement et plus simplement) on en déduit que $[-N,N]^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, K est un fermé d'un compact donc K est compact. □

Remarque : Cette équivalence peut être grossièrement fausse en dimension infinie. Le théorème de Riesz affirme même que dans un espace normé, la boule unité fermée est compacte si, et seulement si, l'espace est de dimension finie.

Les propriétés de compacité des ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^n$ ont une conséquence fondamentale : $\mathbb{R}^n$ est complet (mais il n'est pas compact !)

Théorème IV.3.4 $\mathbb{R}^n$ *est complet.*

Preuve : On montre d'abord que $\mathbb{R}$ est complet puis on utilise la proposition III.2.6 affirmant qu'un produit fini de complets est complet. Montrons que $\mathbb{R}$ est complet. Soit (x_k) une suite de Cauchy réelle. Alors (x_k) est bornée (proposition III.1.1) donc $\exists N$ telle que $x_k \in [-N,N] \forall k$. $[-N,N]$ est compact donc (x_k) admet une valeur d'adhérence par la propriété de Bolzano-Weierstrass. D'après la proposition III.1.4, (x_k) converge. □

IV.4 Fonctions continues sur un compact

On a vu que si K est un espace compact, F un espace séparé et $f : K \to F$ une application continue alors f(K) est compact (théorème IV.1.8). On peut être plus précis lorsque l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$.

Théorème IV.4.1 *Si $f : K \to \mathbb{R}$ est une application continue d'un espace compact K non vide dans $\mathbb{R}$ alors :*

(1) f est bornée

(2) f atteint ses bornes

En particulier toute application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Preuve : .
D'après le théorème IV.1.8, f(K) est un compact de $\mathbb{R}$ et d'après la proposition IV.3.1 $\inf K \in f(K)$ et $\sup f(K) \in f(K)$ d'où il existe $x_{min} \in K$ tel que $f(x_{min}) = \inf_{x\in K} f(x) = \min_{x\in K} f(x)$ et $\exists x_{max} \in K$ tel que $f(x_{max}) = \sup_{x\in K} f(x) = \max_{x\in K} f(x)$. □

Théorème IV.4.2 (Théorème de Heine) *Si f est une application continue d'un espace métrique* <u>*compact*</u> *E dans un espace métrique F alors f est uniformément continue.*

Preuve : Si f n'est pas uniformément continue alors il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha \geqslant 0$, il existe $x, y \in E$ tels que $d_E(x,y) \leqslant \alpha$ et $d_F(f(x), f(y)) \geqslant \epsilon$. En prenant $\alpha = \frac{1}{n}$ on construit une suite (x_n, y_n) de $X \times X$ telle que $d_E(x_n, y_n) \leqslant \frac{1}{n}$ et $d_F(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \epsilon$. L'espace métrique E étant compact, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers une limite x. On a alors $d(x, y_{n_k}) \leqslant d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leqslant d(x, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k} \longrightarrow 0$ quand $k \to \infty$. Ainsi, la suite (y_{n_k}) converge également vers a. Comme f est continue, on a $\lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = f(x)$. Or $d_F(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geqslant \epsilon$ donc à la limite $d_F(f(a), f(a)) \geqslant \epsilon$ ce qui est absurde.

AUTRE PREUVE : Si f est continue alors $\{f^{-1}(B_{d_F}(z, \frac{\epsilon}{2})), z \in F\}$ est un recouvrement ouvert de E. Par le lemme de Lebesgue, on en déduit qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $z_x \in F$ tel que $B_{d_E}(x, 2\rho) \subset f^{-1}(B_{d_F}(z_x, \frac{\epsilon}{2}))$. Alors pour tout $x, y \in E$ tels que $d_E(x,y) \leqslant \rho < 2\rho$ on a

$$d_F(f(x), f(y)) \leqslant d_F(f(x), f(z_x)) + d_F(f(z_x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

□

Théorème IV.4.3 *Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve : Tout espace vectoriel réel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ donc il suffit de démontrer que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Plus précisément montrons que toute norme $\| * \|_N$ sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la norme $\| * \|_1$ ($\| * \|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$).
$\forall x \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$
$\|x\|_N \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_N \leqslant c\|x\|_1$ où $c = max_{i \in \{1,\dots,N\}} \|e_i\|_N$.
Soit $S = S_{\rho_1}(0,1) = x, \sum_{i=1}^n |x_i| = 1$.
S est un fermé, borné de $\mathbb{R}^n$ donc S est compact.
Considérons l'application
$N : (\underset{x \mapsto \|x\|_N}{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}})$.
N est une application continue.
En effet, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |\|x\|_N - \|y\|_N| \leqslant \|x - y\|_N \leqslant c\|x - y\|_1$ donc N est c-lispchitzienne $N(S)$ est un compact de $\mathbb{R}$. On peut poser que $\alpha = \inf N(S)$

On en déduit que : $\forall x \in S, N(x) \geqslant \alpha > 0, \|x\|_N \geqslant \alpha > 0$.
Soit maintenant $y \in E, y \neq 0$
$\frac{y}{\|y\|_1} \in S$ donc $\left\|\frac{y}{\|y\|_1}\right\|_N \leqslant \alpha$.
d'où $\|y\|_N \geqslant \alpha \|y\|_1$
C'est bien sûr encore vrai pour y=0.
<u>Conclusion</u> : $\forall y \in E, \alpha\|y\|_1 \leqslant \|y\|_N \leqslant c\|y\|_1$.
Les normes sont donc équivalentes.

□

Chapitre V

Connexité

V.1 Définition

Définition (Espace connexe) *Soit X un espace topologique. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) Si $X = O_1 \cup O_2$ avec O_1, O_2 ouverts et $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ alors $O_1 = \varnothing$ ou $O_2 = \varnothing$

(2) Si $X = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 fermés et $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ alors $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$

(3) Si $A \subset X$ est à la fois ouvert et fermé alors $A = \varnothing$ ou $A = X$.

(4) Toute application continue $\phi : X \to \mathbb{Z}$ est constante (plus généralement toute application continue $\phi : X \to D$ est constante, avec D un espace discret de cardinal $\geqslant 2$).

Un espace topologique vérifiant (a) (ou (b) ou (c) ou (d) par équivalence) est dit connexe.

Preuve : On rappelle qu'un espace discret est un espace muni de la topologie discrète.

$\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Soit F_1, F_2 fermés tels que $X = F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Alors $O_1 = F_1^C$ et $O_2 = F_2^C$ sont ouverts. Or $O_1 = F_1^c = F_2$ car $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ et $O_2 = F_2^c = F_1$ donc $X = O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.
D'après (a), $O_1 = \varnothing$ ou $O_2 = \varnothing$ donc $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (c)}$ On pose $F_1 = A$ et $F_2 = A^C = X \backslash A$. Si A est à la fois ouvert et fermé alors F_1 et F_2 sont tous les deux fermés (et ouverts).
On a $X = F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ donc d'après (b) $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$ c'est-à-dire $A = \varnothing$ ou $A = X$.

$\boxed{(c) \Rightarrow (d)}$ Supposons X non vide sinon l'assertion est triviale. Soit $x_0 \in X$ et $n_0 = \phi(x_0)$.
On note $A = \phi^{-1}(n_0)$.
$\{n_0\}$ est à la fois ouvert et fermé (car $\mathbb{Z}$ est discret) donc A est à la fois ouvert et fermé puisque ϕ est continue. D'après (c) $A = \varnothing$ ou $A = X$. Or $x_0 \in A$ donc $A = X$ et par conséquent $\phi \equiv n_0$ sur X. Il est facile de voir que la preuve est la même si ϕ est à valeurs dans un espace discret D.

$\boxed{(d) \Rightarrow (a)}$ Soit O_1, O_2 ouverts tels que $X = O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Soit $\phi = \mathbb{1}_{O_1}$ c'est-à-dire $\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in O_1 \\ 0 \text{ si } x \notin O_1 \end{cases}$. Pour tout A ouvert de $\mathbb{Z}$, on a : $\phi^{-1}(A) = O_1$ si $1 \in A$ et $0 \notin A$, $\phi^{-1}(A) = O_2$ si $0 \in A$ et $1 \notin A$, $\phi^{-1}(A) = X$ si $0, 1 \in A$, $\phi^{-1}(A) = \varnothing$ si $0, 1 \notin A$.
Dans tous les cas l'image réciproque de A est un ouvert de X. On en déduit que ϕ est continue donc d'après (d), ϕ est constante d'où $\phi \equiv 1$ et $O_2 = \varnothing$, ou $\phi \equiv 0$ et $O_1 = \varnothing$, d'où (a). □

Définition (Parties connexes d'un espace topologique) *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On dit que A est connexe s'il l'est pour la topologie induite (la définition générale doit s'entendre au sens des ouverts et des fermés de A).*

Remarque : En pratique il est souvent utile de se ramener à des définitions faisant intervenir les ouverts et les fermés de l'espace ambiant, ce qui conduit à la proposition suivante.

Proposition V.1.1 (Partie connexe) *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On a l'équivalence*

A connexe $\Leftrightarrow$ *si $A \subset O_1 \cup O_2$ avec O_1, O_2 ouverts de X tels que $O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset$ alors $O_1 \cap A = \emptyset$ ou $O_2 \cap A = \emptyset$.*

$\Leftrightarrow$ *si $A \subset F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 fermés de X tels que $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$ alors $F_1 \cap A = \emptyset$ ou $F_2 \cap A = \emptyset$.*

$\Leftrightarrow$ *Toute application continue $\phi : A \to \mathbb{Z}$ est constante (ou plus généralement toute application continue à valeurs dans un espace discret de cardinal $\geqslant 2$ est constante).*

$\Leftrightarrow$ *Les seuls ensembles ouverts et fermés par la topologie de A sont $\emptyset$ et A.*

Remarque : On peut donc par équivalence utiliser par exemple la caractérisation : A n'est pas connexe $\Leftrightarrow$ $\exists O_1, O_2$ ouverts de X tels que $A \subset O_1 \cup O_2, A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset, A \cap O_1 \neq \emptyset$ et $A \cap O_2 \neq \emptyset$.

Proposition V.1.2 (Lemme du passage des douanes) *Soit $A \subset X$. Toute partie connexe $C \subset X$ qui rencontre l'intérieur $\mathring{A}$ et l'extérieur $(\overset{\circ}{A^C})$ de A rencontre la frontière $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$ de A.*

Preuve : Supposons $C \cap \partial A = \emptyset$. Alors $C = (C \cap \mathring{A}) \cup (C \cap (\overset{\circ}{A^C}))$. Or $C \cap \mathring{A}$ et $C \cap \overset{\circ}{A^C}$ sont des ouverts disjoints de C. Comme C est connexe on a donc forcément $C \cap \mathring{A} = \emptyset$ ou $C \cap (\overset{\circ}{A^C}) = \emptyset$, ce qui est contraire aux hypothèses. $\square$

Théorème V.1.3 *L'intervalle* $[0, 1]$ *est connexe.*

Preuve : Supposons $[0, 1] = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 ouverts de $[0, 1]$ et $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. On peut supposer sans perte de généralité que $0 \in A_1$ et on va montrer que $A_1 = [0, 1]$ donc $A_2 = \emptyset$. Posons $E = \{x \in [0, 1], [0, x] \subset A_1\}$. E est non vide puisqu'il contient 0. E est majoré par 1 donc $m = \sup E$ existe. On montre alors successivement :

(a) $\boxed{[0, m[\subset A_1}$ Soit $\ell \in [0, m[$. Par définition de la borne supérieure, $\exists x \in E$ tel que $\ell \leqslant x$ d'où $[0, \ell] \subset [0, x] \subset A_1$ donc $[0, m[\subset A_1$.

(b) $\boxed{m \in A_1}$ Si $m \in A_2$ alors $m > 0$ et comme A_2 est un ouvert de $[0, 1], \exists h \in]0, m[$ tq $[m - h, m] \subset A_2$.. D'après (a), on a donc $m - h \in A_1 \cap A_2$ or $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, contradiction, donc $m \in A_1$.

(c) $\boxed{m \in E}$ $[0, m] = [0, m[\cup\{m\} \subset A_1$ donc $m \in E$.

(d) $\boxed{m = 1}$ Si $m < 1, \exists h \in]0, 1 - m[$ tq $[m, m + h] \subset A_1$ (car A_1 ouvert de $[0, 1]$) ce qui contredit l'hypothèse $m = \sup E$ donc $m = 1$.

On conclut finalement que $A_1 = [0, 1]$ d'où $A_2 = \emptyset$. $\square$

V.2 Stabilité de la connexité

.

Théorème V.2.1 (Unions et chaînes de connexes) *Soit X un espace topologique*

(a) Si des ensembles $A_i \subset X$ ($i \in I$ quelconque) sont connexes et $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\cup_{i\in I} A_i$ est connexe.

(b) Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une chaîne de connexes, c'est-à-dire $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$), alors $\cup_{i=1}^{n} A_i$ est connexe.

Preuve : (a) Soit $\phi : \cup_i A_i \to \mathbb{Z}$ continue.
$\phi_{|A_i}$ est continue donc constante et vaut c_i. Soit $x_0 \in \cap_i A_i, \phi_{|A_i}(x_0) = c_i$ donc tous les c_i sont égaux à $\phi(x_0)$ et donc ϕ est constante.

(b) Par récurrence.
$B_k = A_1 \cup \ldots \cup A_k$
On suppose que B_k est connexe (ok pour k=1)
$B_k \cap A_{k+1} \supset A_k \cap A_{k_1} \neq \emptyset$.
donc $B_k \cup A_{k+1}$ est connexe d'après (a).
d'où $B_{k+1} = B_k \cup A_{k+1}$ est connexe. □

Remarque : Attention, en général l'intersection de deux connexes n'est pas connexe. Par exemple si $C_1 = C(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ et $C_2 =$ ellipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ alors C_1 et C_2 sont connexes mais $C_1 \cap C_2 = \{(-1,0);(1,0)\}$ n'est pas connexe.

Théorème V.2.2 *(a) Soit $f : X \to Y$ une application continue.*
Si X est connexe alors $f(X)$ est connexe.

(b) Si $A \subset X$ est connexe et si $A \subset B \subset \overline{A}$ alors B est connexe.

Preuve : (a) Soit $\phi : f(X) \to \mathbb{Z}$ continue.
$\phi \circ f : X \to \mathbb{Z}$ est continue et si X est connexe, $\phi \circ f$ est constante sur X donc ϕ est constante sur $f(X)$ d'où $f(X)$ est connexe.

(b) Soit $\phi : B \to \mathbb{Z}$ continue.
$\phi_{|A}$ est continue donc constante i.e. $\phi_{|A} = c$.
Par densité de A dans B et par continuité de ϕ, $\phi = c$ sur B, donc B est connexe. □

Théorème V.2.3 (Produit de connexes) *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une collection d'espaces topologiques non vides et $X = \prod_{i\in I} X_i$. On a l'équivalence (X connexe $\Leftrightarrow$ X_i connexe pour tout i).*

Preuve : Elle n'est pas très dure mais nécessite de connaître les ouverts élémentaires de la topologie produit. □

V.3 Connexité par arcs

Définition *Deux points $a, b \in X$ sont dits équivalents (on note $a \approx b$) s'il existe une application continue : $f : [0,1] \to X$ tq $f(0) = a$ et $f(1) = b$. On dit que f est un chemin reliant a et b.*

On parle de points équivalents car il s'agit bien d'une relation d'équivalence. En effet, si $a \approx b$ alors $b \approx a$ (symétrie) car il suffit de considérer $g(t) = f(1_t)$. En outre on a $a \approx a$ (réflexivité). Enfin si $a \approx b$ et $b \approx c$ alors $a \approx c$ (transitivité). En effet si f joint a à b et que g joint b à c alors h joint a à c avec $h(t) = f(2t)$ s $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $h(t) = g(2t-1)$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Définition *On dit que X est <u>connexe par arcs</u> si $\forall a, b \in X, a \approx b$ c'est-à-dire deux points quelconques de X sont reliés par un chemin.*

Théorème V.3.1 *(a) X connexe par arcs $\Rightarrow$ X connexe.*

(b) Si X est un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé E alors X est connexe par arcs. En particulier tout <u>ouvert connexe</u> de $\mathbb{R}^n$ est <u>connexe par arcs.</u>

Preuve : (a) Fixons $a \in X$. Pour tout $b \in X$ on note $L_b = f([0,1])$ l'image d'un chemin reliant a à b. L_b est l'image continue du connexe $[0,1]$ donc L_b est un connexe, $a \in \cap L_b$ donc $\cup_{b \in X} L_b$ est connexe d'après le théorème V.2.1. Or $X = \cup_{b \in X} L_b$ donc X est connexe.

(b) Fixons a et posons $A = \{x \in X, x \approx a\}$.
$A \neq \emptyset$ car $a \in A$. Soit $x \in A$, comme X est ouvert il existe $r > 0$ tel que $B = B(x,r) \subset X$. Si $y \in B$ alors $y \approx x$ puisque $f(t) = ty + (1-t)x$ est un chemin dans B entre x et y donc a fortiori un chemin dans X. Par transitivité, $y \approx a$ d'où $y \in A$. On en déduit que A est ouvert.
On va également montrer que A est fermé : soit $y \in \overline{A} \cap X$ et $r > 0$ tq $B = B(y,r)$ soit incluse dans X. Soit $x \in A \cap B$. Comme précédemment on voit que $y \approx x \approx a$ dans X d'où $y \in A$.
En conclusion, A est non vide, ouvert et fermé dans X connexe donc A=X. $\square$

Remarque : Attention, le second item n'est vrai que pour les ensembles <u>ouverts</u> connexes. Par exemple soit $E = \{(x, \sin(\frac{1}{x})), 0 < x \leqslant 1\}$ et $X = \overline{E}$ dans $\mathbb{R}^2$. Il est évident que E est connexe par arcs, donc connexe. Comme $X = \overline{E}$, on a aussi que X est connexe. Or $X = E \cup (\{0\} \times [0,1])$. Si X était connexe par arc on pourrait trouver un chemin continu dans X entre $(0,1)$ et $(1, \sin(1))$. Or toute fonction continue sur un compact est uniformément continue, ce qui est contradictoire avec le fait que la fonction $\sin(1/x)$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

V.4 Structure des connexes de $\mathbb{R}$

Théorème V.4.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. On a A connexe $\Leftrightarrow$ A est un intervalle.*

Ce théorème de structure très fort est propre à $\mathbb{R}$. L'exemple de X dans la dernière remarque de la section précécente montre que les connexes de $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$ peuvent être compliqués.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Si A n'est pas un intervalle, $\exists a, b, c \in \mathbb{R}, a < c < b, a, b \in A, c \notin A$. Alors $\phi : A \to \mathbb{Z}$ définie par $\phi(x) = 0$ si $x < c$ et $\phi(x) = 1$ si $x > c$ est continue sur A mais pas constante donc A n'est pas connexe.

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons d'abord qu'un segment $[a,b]$ est connexe. $[a,b]$ est homéomorphe à $[0,1]$. $[0,1]$ est connexe donc $[a,b]$ est connexe. On en déduit que tout intervalle est connexe car tout intervalle peut s'écrire comme une union d'intervalles $I_i = [a_i, b_i]$ avec $\cap I_i \neq \emptyset$. $\square$

Théorème V.4.2 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit X un espace connexe (métrique ou non) et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(X)$ est un intervalle. En particulier, si f prend deux valeurs α et β alors elle prend toute valeur intermédiaire entre α et β.*

Preuve : Si X est connexe alors la continuité de f implique que $f(X)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle. $\square$

Théorème V.4.3 (Théorème de Brouwer) *Toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ possède un point fixe.*

Preuve : Soit $g(x) = f(x) - x$. L'intervalle $[a, b]$ est connexe, g est continue donc $g([a, b]) \subset \mathbb{R}$ est connexe. C'est donc un intervalle.
Or $g(a) = f(a) - a$, $f(a) \in [a, b]$ donc $g(a) \geqslant 0$. De même $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Donc $0 \in g([a, b])$ d'où, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists \overline{x} \in [a, b]$ tel que $g(\overline{x}) = 0$ c'est-à-dire $f(\overline{x}) = \overline{x}$. $\overline{x}$ est un point fixe de f. □

Ce résultat est un cas particulier du théorème du point fixe de Schauder qui stipule que si E est un espace de Banach et $K \subset E$ un convexe, compact non vide alors toute application continue $f : K \to K$ admet un point fixe.