Université Lyon 1
Licence Sciences, Technologies, Santé
Mention Mathématiques

Topologie Générale
Simon Masnou
Vendredi 10 janvier 2014

Contrôle final – durée 3h

Les appareils électroniques (notamment les portables !) et les documents sont interdits

L'énoncé comporte deux exercices et un problème, répartis sur trois pages

Exercice 1

1. Soit X un espace métrique et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.

Correction : La convergence uniforme de f_n vers f s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N, \forall x \in X,\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

f est limite uniforme de fonctions continues, donc f est continue. On a

$$d_Y(f_n(x_n), f(x)) \leq d_Y(f_n(x_n), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(x))$$

On choisit N tel que pour tout $n > N$,

$$d_Y(f_n(x_n), f(x_n)) \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad d_Y(f(x_n), f(x)) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

ce qui est possible grâce à la convergence uniforme de f_n vers f et à la continuité en x de f. On en déduit que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N, \forall n \geq N, \quad d_Y(f_n(x_n), f(x)) \leq \epsilon$$

2. Application : soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications continues de X dans X, ayant chacune un point fixe ; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.

Correction : On note x_n un point fixe de f_n. La suite (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) qui converge dans le compact X vers un point x. D'après la question précédente, $f_{n_k}(x_{n_k})$ converge vers $f(x)$. Or $f_{n_k}(x_{n_k}) = x_{n_k}$ et en passant à la limite $f(x) = x$.

Exercice 2

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I\ ;\ \ x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

Correction : A est un ouvert connexe par arcs (car convexe) donc connexe.

2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

Correction : Comme f est dérivable, par le théorème des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in A$, $\exists z \in [x, y]$ tel que $f'(z) = g(x, y)$. Donc $g(A) \subset f'(I)$. Soit $z \in I$. Alors $f'(z) = \lim_{\epsilon \to 0^+} g(z, z+\epsilon)$ donc $f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

3. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

Correction : A est connexe, g est continue donc $g(A)$ est connexe. D'après un résultat de cours, $f'(I)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle.

Problème

Un **espace de Baire** est un espace topologique dans lequel toute suite d'ouverts denses a une intersection dense. En d'autres termes, X est un espace de Baire si pour toute suite d'ouverts (O_n) tels que $\overline{O_n} = X$ on a

$$\overline{\bigcap_n O_n} = X$$

Partie I

1. Nous allons démontrer le résultat suivant (**théorème de Baire**) :

Tout espace métrique complet est un espace de Baire

Soit (E, d) un espace métrique complet. On considère une suite $(O_n)_{n\geq 1}$ d'ouverts denses dans E, on définit $A = \bigcap_n O_n$ et on se donne un ouvert O non vide.

(a) Construire par récurrence une suite de boules fermées $\overline{B}_n$ non vides telles que

$$\begin{aligned}
&\bar{B}_1 \subset O_1 \cap O, \\
&\forall n \geq 2, \quad \bar{B}_n \subset O_n \cap \bar{B}_{n-1}, \\
&\forall n \geq 1, \quad \text{diam } \bar{B}_n \leq \tfrac{1}{n}
\end{aligned}$$

Correction : Supposons que $O_1 \cap O$ soit vide. Alors on peut trouver un point de O qui n'est pas dans l'adhérence de O_1, ce qui contredit l'hypothèse que O_1 est dense dans E. On en déduit que $O_1 \cap O$ n'est pas vide et que c'est un ouvert. Il existe donc une boule fermée non vide $\overline{B}_1$ contenue dans $O_1 \cap O$ et de diamètre ≤ 1.

Le même raisonnement permet de construire la boule fermée non vide $\overline{B}_2$ en remplaçant, dans le raisonnement, l'ouvert O par le boule ouverte B_2.

Supposons à présent qu'on ait construit les boules fermées $\overline{B}_1, \cdots, \overline{B}_{n-1}$ vérifiant l'hypothèse de récurrence. Alors, toujours avec le même raisonnement, on peut trouver une boule fermée non vide $\overline{B}_n$ de diamètre $\leq 1n$ et contenue dans $O_n \cap \overline{B}_{n-1}$.

(b) Citer le résultat de cours permettant d'affirmer que l'intersection des $\bar{B}_n$ est non vide.

Correction : Comme l'espace X est complet, l'intersection d'une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 est un singleton.

(c) En déduire que $A \cap O$ est non vide.

Correction : On a pour tout $n \geq 2$, $\bar{B}_n \subset \bar{B}_{n-1} \subset O$ et $\bar{B}_n \subset O_n$. D'où $\bigcap_n \bar{B}_n \subset O \cap \bigcap_n O_n$ et on déduit de la question précédente que $A \cap O$ est non vide

(d) En déduire que A est dense dans E.

Correction : Le raisonnement qui précède est vrai pour tout ouvert O non vide. Il est donc clair que A est dense dans E (tout voisinage de tout point de E rencontre A).

2. On va en déduire le corollaire suivant :

Soit (E, d) un espace métrique complet qui est réunion dénombrable de fermés F_n ($E = \bigcup_n F_n$). Alors la réunion des intérieurs des F_n est un ouvert dense de E.

On note Ω la réunion des intérieurs des F_n, i.e. $\Omega = \bigcup_n \overset{\circ}{F}_n$, et $F'_n = F_n \cap (E \setminus \Omega)$.

(a) Montrer que chaque F'_n est un fermé d'intérieur vide.

Correction : Ω est une réunion d'ouverts donc un ouvert. Son complémentaire est fermé, F_n est fermé, donc F'_n est fermé. Supposons qu'il contienne un ouvert O non vide. Alors O ne rencontre pas Ω, donc ne rencontre l'intérieur d'aucun F_n. Il existe donc un point qui n'est dans l'adhérence d'aucun de ces intérieurs, donc dans aucun F_n, ce qui contredit le fait que l'union des F_n coïncide avec E.

(b) Montrer, à l'aide du théorème de Baire, que $\bigcup_n F'_n$ ne peut contenir aucun ouvert

Correction : Chaque F'_n est un fermé d'intérieur vide donc son complémentaire est un ouvert dense. Le théorème de Baire implique que $\bigcap(E \setminus F'_n)$ est dense, donc son complémentaire $\bigcup_n F'_n$ ne contient aucun ouvert.

(c) En déduire que $\bigcup_n F'_n = E \setminus \Omega$ et conclure.

Correction : Comme $E = \bigcup_n F_n$, on a

$$\bigcup_n F'_n = \bigcup_n F_n \cap (E \setminus \Omega) = (\bigcup_n F_n) \cap (E \setminus \Omega) = E \setminus \Omega$$

D'après la question précédente $E \setminus \Omega$ ne contient aucun ouvert donc Ω est un ouvert dense, ce qui conclut la démonstration.

Partie II

Le théorème de Baire a des conséquences importantes. Nous allons en voir une, le **théorème de Banach-Steinhaus** :

Soit X un espace de Banach, Y un espace normé et (u_n) une suite d'applications linéaires et continues $u_n : X \to Y$. Alors

(i) Si la suite (u_n) est "simplement bornée" alors elle est uniformément bornée sur la boule unité, autrement dit $\|u_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$. En d'autres termes, si

$$\forall x \in X,\ \exists M_x,\ \forall n,\ \|u_n(x)\|_Y \leq M_x$$

alors

$$\exists M,\ \forall x \in X,\ \forall n,\ \|u_n(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

(ii) Si pour chaque $x \in X$, $u_n(x)$ converge vers une limite qu'on note $u(x)$, alors l'application $u : X \to Y$ est linéaire et continue.

1. Prouvons d'abord le point (i). On considère pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k = \{x \in X,\ \forall n,\ \|u_n(x)\|_Y \leq k\}$$

(a) Montrer que chaque F_k est fermé dans X

Correction : L'application norme sur Y, qu'on notera N_Y, est une application continue d'après l'inégalité triangulaire. L'application composée $N_y \circ u_n$ est continue. L'intervalle $]-\infty, k[$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc son image réciproque $(N_y \circ u_n)^{-1}(]-\infty, k[)$ est un fermé A_n^k de X. $F_k = \bigcap_n A_n^k$ est donc un fermé de X.

(b) Montrer que X est la réunion croissante de tous les F_k.

Correction : Soit $x \in X$. Par hypothèse, il existe M_x tel que $\|u_n(x)\|_Y \leq M_x$ pour tout n. Donc $x \in F_k$ dès que $k \geq M_x$ avec k entier. On en déduit que $X = \bigcup F_k$. Cette union est bien croissante car $F_k \subset F_\ell$ si $k \leq \ell$.

(c) En déduire, à l'aide du théorème de Baire, qu'il existe au moins un F_k qui contient une boule fermée $\bar{B}(a,r)$ avec $r > 0$. Que peut-on dire de $\|u_n(x)\|_Y$ pour $x \in \bar{B}(a,r)$?

Correction : X est une réunion dénombrable de fermés et c'est un espace complet. D'après le théorème de Baire, la réunion des intérieurs des F_k est un ouvert dense de E. Nécessairement, l'un au moins de ces intérieurs n'est pas vide (car si tous les intérieurs étaient vides, leur union le serait aussi), donc contient une boule fermée $\bar{B}(a,r)$ avec $r > 0$. On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \bar{B}(a,r)$ et pour tout n, $\|u_n(x)\|_Y \leq k$.

(d) Que peut-on en déduire pour $\|u_n(x)\|_Y$ lorsque x appartient à la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$? Conclure.

Correction : Si $x \in B(0,1)$ alors $a + rx \in B(a,r)$ et $\|u_n(a+rx)\|_Y \leq k$ pour tout n. Or, par linéarité $u_n(a+rx) = u_n(a) + ru_n(x)$, d'où $u_n(x) = \frac{1}{r}(u_n(a+rx) - u_n(a))$ et finalement $\|u_n(x)\|_Y \leq \frac{2k}{r}$ (car $a \in B(a,r)$) pour tout n. Si $x \in X$ et $x \not 0$ alors $\frac{x}{\|x\|} \in B(0,1)$ et donc $\|u_n(x)\|_Y \leq \frac{2k}{r}\|x\|_X$. On conclut en posant $M = \frac{2k}{r}$.

2. Preuve du point (ii) :

(a) Montrer que l'application limite u est linéaire.

Correction : On a pour tout n et pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $u_n(x+\lambda y) = u_n(x) + \lambda u_n(y)$. En passant à la limite on en déduit que $u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$ donc u est linéaire.

(b) Montrer que pour tout $x \in X$ la suite $(u_n(x))$ est bornée.

Correction : Soit $x \in X$. La suite $(u_n(x))$ est convergente donc bornée. Il existe donc M_x tel que pour tout n, $\|u_n(x)\|_Y \leq M_x$.

(c) Conclure en utilisant (i) et en passant à la limite quand $n \to \infty$.

Correction : La question (i) nous permet d'en déduire qu'il existe M tel que pour tout x et pour tout n :

$$\|u_n(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

On utilise la convergence $u_n(x) \to u(x)$ pour en déduire qu'à la limite, pour tout $x \in X$

$$\|u(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

Comme u est linéaire, on conclut qu'elle est continue.