Université Lyon 1 — Topologie Générale
Licence Sciences, Technologies, Santé — Simon Masnou
Mention Mathématiques — Vendredi 10 janvier 2014

Contrôle final – durée 3h

Les appareils électroniques (notamment les portables !) et les documents sont interdits

L'énoncé comporte deux exercices et un problème, répartis sur trois pages

Exercice 1

1. Soit X un espace métrique et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.
2. Application : soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications continues de X dans X, ayant chacune un point fixe ; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.

Exercice 2

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I \ ; \ \ x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

Problème

Un **espace de Baire** est un espace topologique dans lequel toute suite d'ouverts denses a une intersection dense. En d'autres termes, X est un espace de Baire si pour toute suite d'ouverts (O_n) tels que $\overline{O_n} = X$ on a

$$\overline{\bigcap_n O_n} = X$$

Partie I

1. Nous allons démontrer le résultat suivant (**théorème de Baire**) :

   Tout espace métrique complet est un espace de Baire

   Soit (E, d) un espace métrique complet. On considère une suite $(O_n)_{n\geq 1}$ d'ouverts denses dans E, on définit $A = \bigcap_n O_n$ et on se donne un ouvert O non vide.

   (a) Construire par récurrence une suite de boules fermées $\overline{B}_n$ <u>non vides</u> telles que

   $$\begin{array}{l} \bar{B}_1 \subset O_1 \cap O, \\ \forall n \geq 2, \quad \bar{B}_n \subset O_n \cap \bar{B}_{n-1}, \\ \forall n \geq 1, \quad \text{diam } \bar{B}_n \leq \frac{1}{n} \end{array}$$

   (b) Citer le résultat de cours permettant d'affirmer que l'intersection des $\bar{B}_n$ est non vide.

   (c) En déduire que $A \cap O$ est non vide.

   (d) En déduire que A est dense dans E.

2. On va en déduire le corollaire suivant :

   Soit (E, d) un espace métrique complet qui est réunion dénombrable de fermés F_n ($E = \bigcup_n F_n$). Alors la réunion des intérieurs des F_n est un ouvert dense de E.

   On note Ω la réunion des intérieurs des F_n, i.e. $\Omega = \bigcup_n \mathring{F}_n$, et $F'_n = F_n \cap (E \setminus \Omega)$.

   (a) Montrer que chaque F'_n est un fermé d'intérieur vide.

   (b) Montrer, à l'aide du théorème de Baire, que $\bigcup_n F'_n$ ne peut contenir aucun ouvert

   (c) En déduire que $\bigcup_n F'_n = E \setminus \Omega$ et conclure.

Partie II

Le théorème de Baire a des conséquences importantes. Nous allons en voir une, le **théorème de Banach-Steinhaus** :

Soit X un espace de Banach, Y un espace normé et (u_n) une suite d'applications linéaires et continues $u_n : X \to Y$. Alors

(i) Si la suite (u_n) est "simplement bornée" alors elle est uniformément bornée sur la boule unité, autrement dit $\|u_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$. En d'autres termes, si

$$\forall x \in X,\ \exists M_x,\ \forall n,\ \|u_n(x)\|_Y \leq M_x$$

alors

$$\exists M,\ \forall x \in X,\ \forall n,\ \|u_n(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

(ii) Si pour chaque $x \in X$, $u_n(x)$ converge vers une limite qu'on note $u(x)$, alors l'application $u : X \to Y$ est linéaire et continue.

1. Prouvons d'abord le point (i). On considère pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k = \{x \in X,\ \forall n,\ \|u_n(x)\|_Y \leq k\}$$

   (a) Montrer que chaque F_k est fermé dans X

   (b) Montrer que X est la réunion croissante de tous les F_k.

   (c) En déduire, à l'aide du théorème de Baire, qu'il existe au moins un F_k qui contient une boule fermée $\bar{B}(a,r)$ avec $r > 0$. Que peut-on dire de $\|u_n(x)\|_Y$ pour $x \in \bar{B}(a,r)$?

   (d) Que peut-on en déduire pour $\|u_n(x)\|_Y$ lorsque x appartient à la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$? Conclure.

2. Preuve du point (ii) :

   (a) Montrer que l'application limite u est linéaire.

   (b) Montrer que pour tout $x \in X$ la suite $(u_n(x))$ est bornée.

   (c) Conclure en utilisant (i) et en passant à la limite quand $n \to \infty$.