Université Lyon 1
Licence Sciences, Technologies, Santé
Mention Mathématiques

Topologie Générale
Simon Masnou
Lundi 4 novembre 2013

Partiel – durée 2h

(Les appareils électroniques et les documents sont interdits)

L'énoncé comporte deux exercices et un problème

Exercice 1.

1. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est uniformément continue
   (ii) Pour toutes suites (x_n), (y_n) d'éléments de E,
   $$\text{si } d(x_n, y_n) \to 0 \text{ alors } \delta(f(x_n), f(y_n)) \to 0$$
   (iii) Pour toutes suites (x_n), (y_n) d'éléments de E, si $d(x_n, y_n) \to 0$ alors il existe une sous-suite (n_k) de la suite des entiers telle que $\delta(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \to 0$.
   (On pourra chercher à montrer $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$).
2. En déduire que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 2. On appelle *base* d'une topologie $\mathcal{T}$ un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ tel que tout ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ s'écrit comme $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} B_i$, où $B_i \in \mathcal{B}$ pour tout $i \in I$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ et tout point $x \in \mathcal{O}$ il existe un $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset \mathcal{O}$.
2. Soit $\mathcal{T}_n$ la topologie sur $\mathbb{R}^n$ induite par la métrique euclidienne
   $$\text{dist}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}\,.$$
   Montrer que la collection $\mathcal{B}$ des boules ouvertes ayant leur centre dans $\mathbb{Q}^n$ et leur rayon dans $\mathbb{Q}$ est une base de $\mathcal{T}_n$.
3. Soit $\mathcal{B}'$ l'ensemble des parallélépipèdes ouverts dans $\mathbb{R}^n$ dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées. Est-ce que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{T}_n$?
4. Est-ce que $\{]-\infty, a[\ ;\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{]b, +\infty[\ ;\ b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour $\mathcal{T}_1$?
5. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$ on note par δ_a la droite d'équation $y = ax$ dans $\mathbb{R}^2$, et on note par Y la réunion des droites δ_a. Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur Y induite par la topologie sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{T}'$ la topologie dont une base $\mathcal{B}'$ est composée de tous les segments ouverts $]M, N[\subset \delta_a$ tels que $O \notin]M, N[$, et de toutes les réunions $\bigcup_{a \in \mathbb{Q}, O \in]M_a, N_a[}]M_a, N_a[$. Les deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont-elles équivalentes ?

Problème. Soit E l'espace des fonctions réelles définies sur $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ et lipschitziennes, c'est-à-dire telles que

$$\sup_{(x,y)\in I\times I,\, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = K(f) < +\infty$$

où $K(f)$ est une constante finie positive ou nulle ne dépendant que de f.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C^0(I,\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $I = [0,1]$ et que

   $$\begin{array}{rcl} K(\lambda f + \mu g) & \leq & |\lambda| K(f) + |\mu| K(g) \\ |K(f) - K(g)| & \leq & K(f-g) \end{array}$$

   si $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   Montrer que les fonctions réelles continues sur $[0,1]$, admettant des dérivées à droite $f'_d(z) = \lim_{h>0,\, h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ bornées (pour tout $z \in]0,1[$), appartiennent à E.
   (On *admettra* qu'elles vérifient l'inégalité des accroissements finis

   $$|f(y) - f(x)| \leq \sup_{z\in]x,y[} |f'_d(z)|\, |x-y|,\ \forall\, 0 < x < y < 1).$$

2. Pour chaque $f \in E$, on pose

   $$M(f) = \sup_{x\in I} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N(f) = M(f) + K(f)$$

   Montrer que $N : f \mapsto N(f)$ est une norme sur E mais que $K : f \mapsto K(f)$ n'est pas une norme sur E.

3. Montrer que les normes M et N ne sont pas équivalentes (pour cela on cherchera à construire une suite de fonctions f_n telles que $K(f_n)$ soit fixe tandis que $\lim_{n\to\infty} M(f_n) = 0$).

4. Montrer que (E, N) est complet. (On rappelle que $(C^0(I,\mathbb{R}), M)$ est complet et on considèrera une suite de Cauchy $(f_n)_n$ sur E pour la norme N. On montrera qu'il existe $f \in C^0(I,\mathbb{R})$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ pour la norme M dans $C^0(I,\mathbb{R})$; puis on en déduira que $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ indépendant de $x \neq y$ dans I tel que

   $$p \geq n_0,\ q \geq n_0 \text{ impliquent } \frac{|f_p(x) - f_q(x) - (f_p(y) - f_q(y))|}{|x-y|} \leq \epsilon, \qquad \forall x \neq y$$

   puis que $f - f_n \in E$ et $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ pour la norme N dans E).