

# Restauration d'images et filtres de Yaroslavsky

Simon Masnou et Jean-Michel Morel

Ceremade, Université Paris-IX Dauphine  
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny  
75775 Paris Cedex 16  
email : masnou@ceremade.dauphine.fr

## Résumé

Nous étudions deux opérateurs de filtrage local adaptatif. Ils sont tous deux basés sur l'utilisation de la connexité comme seule contrainte spatiale et mettent en oeuvre une contrainte de luminosité morphologique. Leurs propriétés les désignent tout particulièrement pour une implémentation dans un cadre automatisé.

## Introduction

La restauration des images peut se ramener au problème suivant : que doit-on considérer comme de l'information pertinente et que peut-on assimiler à du bruit ? Le bruit est cependant une notion trop subjective pour faire l'objet d'une formalisation unique et globale. Notre étude sera donc limitée à la restauration des images altérées par un bruit blanc additif ou un bruit impulsif. Par ailleurs nous envisagerons la restauration comme un moyen de distinguer l'information localement "cohérente" des données non cohérentes – le bruit.

La quasi-totalité des filtres locaux de débruitage reposent sur la théorie de Marr-Hildreth ([5]) selon laquelle les "edges" ou contours de l'image constituent l'information de base; il suffirait donc de filtrer en préservant ces contours pour que le débruitage soit optimal ([2, 4]).

Rappelons qu'un contour peut être défini comme l'ensemble des points où la fonction de luminosité comporte un saut d'amplitude supérieure à un seuil donné; sa détection est donc intrinsèquement liée aux valeurs exactes des niveaux de gris et toute modification de ces valeurs – par exemple par changement de contraste – entraînera la détection d'une nouvelle famille de contours pas nécessairement identique à la première. Les contours ne peuvent donc constituer une information fiable et ce d'autant plus qu'une même image saisie par deux capteurs différents n'aura pas les mêmes caractéristiques de luminosité. Il est en outre bien connu que la vision humaine est sensible aux valeurs relatives – telle forme est plus claire ou plus sombre que telle autre – et non aux valeurs absolues. Cette remarque, due aux Gestaltistes, a été reprise par la Morphologie Mathématique ([7]) en traitement des images, et c'est dans ce cadre que se situe notre étude. En d'autres termes, les filtres  $T$  que nous présentons sont morphologiques, c'est-à-dire tels que si  $g$  est une fonction de changement de contraste continue et strictement croissante alors

## Abstract

Two denoising local adaptative filters are studied. Both involve connectedness as the only spatial constraint and a morphological luminosity constraint. It arises from their properties that they are particularly designed for automation.

$Tg(u) = g(Tu)$ . Afin de tenir compte de cet impératif morphologique, on utilise en lieu et place des contours les frontières des ensembles de niveaux  $X_\lambda = \{x, u(x) \geq \lambda\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  qui forment une famille invariante pour tout changement de contraste strictement croissant et qui permettent de caractériser intégralement une image ([3]).

Dans [11], Leonid Yaroslavsky a développé une approche synthétique du filtrage local à voisinage. Il a remarqué que la plupart des opérateurs reposent d'abord sur le choix d'un voisinage composé de points spatialement proches et dont les luminosités sont similaires en un certain sens, puis sur le choix d'un filtre régularisant appliqué à ce voisinage. Deux voisinages génériques peuvent être dégagés :

1. Les voisinages définis en chaque point en imposant une amplitude maximale des oscillations par rapport à la valeur centrale et qui peuvent s'écrire comme suit :

$$N_1(x) = \{y \in B(x, a), u(x) - \epsilon_\nu^- \leq u(y) \leq u(x) + \epsilon_\nu^+\}$$

2. Les voisinages définis en chaque point à partir de l'échelle variationnelle – l'ensemble des pixels classés par ordre croissant de luminosité – et tels que la contrainte porte sur le nombre maximal de points conservés en dessous et au-dessus du niveau de gris central. Ces voisinages peuvent être définis dans le plan continu par :

$$N_2(x) = \{y \in B(x, a), |\{z \in B, u(y) \leq u(z) \leq u(x)\}| \leq \epsilon_R^-\} \cup \{y \in B(x, a), |\{z \in B, u(x) \leq u(z) \leq u(y)\}| \leq \epsilon_R^+\}$$

Une fois le voisinage choisi on peut lui appliquer un opérateur de régularisation (moyenne, médian, inf, sup, etc.). Il est clair que tous les filtres locaux ne peuvent *stricto sensu* se ramener à cette définition mais ils n'en sont en général que des versions pondérées.

Les filtres reposant sur l'utilisation d'un voisinage du type  $N_1$  ne sont pas morphologiques et nous les écartons d'emblée de notre étude. En revanche ceux qui font intervenir  $N_2$  sont morphologiques. Rappelons tout d'abord

que le filtre morphologique de référence est le filtre médian appliqué à un disque et que son itération équivaut à une évolution cohérente des lignes de niveau de l'image – les frontières des ensembles de niveau – en fonction de leur courbure ([3]). Alors qu'une fonction suffisamment régulière (par exemple  $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ) ne devrait pas être altérée, le médian fait évoluer toute ligne de niveau dont la courbure n'est pas nulle. On peut montrer qu'en appliquant le médian à un voisinage du type  $N_2$  en un point autre qu'un extrémum, les seules lignes de niveau qui évoluent sont celles dont la courbure est plus grande en valeur absolue qu'un seuil strictement positif ([6]).

## 1 Filtre médian à voisinage connexe

Il apparaît cependant que la seule façon d'empêcher toute évolution – du moins en un point autre qu'un extrémum et pour une fonction régulière – nécessite la suppression de la contrainte spatiale, à savoir le disque à l'intérieur duquel on sélectionne un voisinage. Afin de conserver au filtre son caractère local nous avons choisi d'imposer un critère de connexité : à l'instar du voisinage  $N_2$  nous définissons en chaque point un sous-voisinage, composé d'un ensemble connexe de points dont le niveau de gris est inférieur au niveau "central" et qui forment une aire inférieure à un seuil donné  $A$ . Un sur-voisinage peut être défini de façon analogue et l'on calcule alors la valeur médiane sur l'union de ces deux voisinages avant d'itérer le processus. On obtient ainsi le filtre **MFCN** (Median Filter on Connected Neighborhood). L'algorithme associé est le suivant, dans une version qui n'est pas optimale mais lisible :

$n \leftarrow 1$   
Etape 0  $\text{level\_min} \leftarrow \inf\{u(i, j)\}$ ,  $\text{level\_max} \leftarrow \sup\{u(i, j)\}$   
 $(i, j) \leftarrow (0, 0)$

Etape 1 Calcul de  $W^=$   
 $W^= \leftarrow$  composante connexe de  $(i, j)$  dans  
 $\{(k, l), u(k, l) = u(i, j)\}$   
Si  $|W^=| \geq A$   $\text{out}(i, j) \leftarrow u(i, j)$ ; aller à l'étape 7.

Etape 2 Calcul de  $W^-$   
 $\text{level} \leftarrow u(i, j)$   
 $W^- \leftarrow W^=$   
Tant que  $|W^-| < A$  et  $\text{level} \geq \text{level\_min}$   
•  $W^- \leftarrow$  composante connexe de  $(i, j)$  dans  
 $\{(k, l), \text{level} \leq u(k, l) \leq u(i, j)\}$   
•  $\text{level} \leftarrow \text{level} - 1$

Etape 3 Calcul de  $W^+$   
 $\text{level} \leftarrow u(i, j)$   
 $W^+ \leftarrow W^-$   
Tant que  $|W^+| < A$  et  $\text{level} \leq \text{level\_max}$   
•  $W^+ \leftarrow$  composante connexe de  $(i, j)$  dans  
 $\{(k, l), u(i, j) \leq u(k, l) \leq \text{level}\}$   
•  $\text{level} \leftarrow \text{level} + 1$

Etape 4  
Si  $|W^-| \geq A$  et  $|W^+| \geq A$   
 $\text{out}(i, j) \leftarrow u(i, j)$ ; aller à l'étape 7.

Etape 5

Si  $|W^-| \geq A$  et  $|W^+| < A$   
 $\text{level} \leftarrow u(i, j)$   
 $W_{\text{level}}^- \leftarrow W^-$   
Tant que  $|W_{\text{level}}^- \setminus W^=| < A - 1$  et  $\text{level} \geq \text{level\_min}$   
•  $W_{\text{level}}^- \leftarrow$  composante connexe de  $(i, j)$  dans  
 $\{(k, l), \text{level} \leq u(k, l) \leq u(i, j)\}$   
•  $\text{level} \leftarrow \text{level} - 1$   
 $\text{level} \leftarrow \sup(\text{level}, \text{level\_min})$   
Tant que  $|W_{\text{level}}^- \setminus W^=| > A - 1$   
• Calculer la distance géodésique entre  $W_{\text{level}+1}^-$  et chaque point de  $W_{\text{level}}^- \setminus W_{\text{level}+1}^-$ . Les points les plus éloignés sont supprimés de  $W_{\text{level}}^-$  en commençant par ceux dont le niveau de gris est le plus éloigné de  $u(i, j)$ .  
 $W^- \leftarrow W_{\text{level}}^-$   
Sinon si  $|W^+| < A$  et  $|W^+| \geq A$   
 $\text{level} \leftarrow u(i, j)$   
 $W_{\text{level}}^+ = W^=$   
Tant que  $|W_{\text{level}}^+ \setminus W^=| < A - 1$  et  $\text{level} \leq \text{level\_max}$   
•  $W_{\text{level}}^+ \leftarrow$  composante connexe de  $(i, j)$  dans  
 $\{(k, l), u(i, j) \leq u(k, l) \leq \text{level}\}$   
•  $\text{level} \leftarrow \text{level} + 1$   
 $\text{level} \leftarrow \inf(\text{level}, \text{level\_max})$   
Tant que  $|W_{\text{level}}^+ \setminus W^=| > A - 1$   
• Calculer la distance géodésique entre  $W_{\text{level}-1}^+$  et chaque point de  $W_{\text{level}}^+ \setminus W_{\text{level}-1}^+$ . Les points les plus éloignés sont supprimés de  $W_{\text{level}}^+$  en commençant par ceux dont le niveau de gris est le plus éloigné de  $u(i, j)$ .  
 $W^+ \leftarrow W_{\text{level}}^+$

Etape 6 Définir  $W \leftarrow W^- \cup W^+$

$\text{out}(i, j) \leftarrow \text{median}(W) = \inf\{\lambda, |(i, j) \in W, u(i, j) \leq \lambda| \geq \frac{|W|}{2}\}$

Etape 7 Si possible  $(i, j) \leftarrow$  point suivant; aller à l'étape 1  
Sinon

Pour chaque point  $(i, j)$  de l'image,  $u(i, j) \leftarrow \text{out}(i, j)$   
Incrémenter le nombre d'itérations ( $n$ ) et revenir à l'étape 0  
si  $n < \text{itérations\_max}$

Il nous faut préciser le sens de l'étape 5 : elle permet d'accorder le filtrage de certaines zones avec leur équivalent tronqué. Supposons en effet que l'on se contente de construire deux voisinages  $W^-$  et  $W^+$  les plus grands possibles tels que  $|W^-| \leq A$  et  $|W^+| \leq A$ . On obtiendrait alors le résultat illustré ci-dessous (figure 1) :

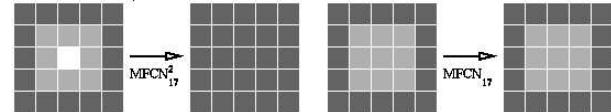


FIG. 1 – **MFCN** conduit à des résultats incohérents lorsque l'étape 5 de l'algorithme n'est pas utilisée ( $A = 17$ )

On peut en revanche vérifier que les résultats coïncideront si l'on utilise l'étape 5. Cette étape est d'autant plus importante que la saisie d'une image s'accompagne souvent de phénomènes de troncatures liés au capteur (saturation, etc.).

Dans un article à paraître ([6]) nous développons l'analyse mathématique de ce filtre agissant sur l'espace des fonctions à variation bornée ([12]). Nous y démontrons les propriétés suivantes : **MFCN** est morphologique, invariant pour toute transformation euclidienne du plan, admet une

grande classe de points fixes, converge en un nombre fini d'itérations vers un point fixe ou un état oscillatoire (dans le plan discret ou continu); contrairement aux autres filtres locaux dont il faut surveiller les itérations successives pour éviter que l'image soit trop régularisée, MFCN est particulièrement désigné pour l'automatisation : le choix du paramètre  $A$  est très souple et on peut itérer jusqu'à convergence car l'évolution de l'image devient très vite insignifiante. MFCN ne dépend donc vraiment que du seul paramètre  $A$ . En outre une image suffisamment régulière sera à peine altérée, et ceci pour  $A$  variant dans un intervalle très large de valeurs (figure 2).

Enfin MFCN fait décroître la variation totale  $\|Du\|$  ce qui, selon Rudin et Osher ([8]), est la conséquence mathématique d'un débruitage effectif de l'image.



FIG. 2 – Image originale  $u - \text{med}_{B(.,3)}u - (\text{MFCN}_{20})^{10}(u)$

Cette expérience illustre le fait que MFCN préserve les structures cohérentes d'une image y compris lorsque le filtrage est effectué sur un grand voisinage (40 pixels au total). Appliqué à un voisinage de taille équivalente, le filtre médian classique altère considérablement l'image dès la première itération. En outre le résultat obtenu par MFCN est un point fixe.



FIG. 3 – Image originale – Image bruitée  $u$  (bruit impulsif,  $f = 20\%$ ) –  $(\text{MFCN}_{10})^7(\text{med}_{B(.,1)}u)$  (point fixe). Les images altérées par un bruit impulsif sont bien traitées par MFCN qui préserve les fonctions peu oscillantes et réduit les oscillations lorsqu'elles sont importantes. Cette dernière propriété est une conséquence de la décroissance de la variation totale.

## 2 Filtrage des extrema

MFCN a été élaboré de façon à préserver les fonctions régulières aux points où, pour parler simplement, il est possible de construire un sous-voisinage et un sur-voisinage ayant la même aire. Au voisinage des extrema de la fonction cette construction n'est pas possible : l'un des deux ensembles  $W^-$  et  $W^+$  est toujours plus petit que l'autre et il y a donc nécessairement évolution ainsi que nous l'avons représenté sur la figure 4 où une fonction  $C^1$  devient  $C^0$  après plusieurs itérations de MFCN.

Cette remarque nous a conduits à un autre filtre, plus simple que MFCN, qui agit sur les seuls extrema de la fonction. Sa définition et ses propriétés mathématiques d'opé-

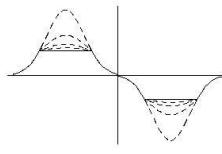


FIG. 4 – Evolution d'une fonction régulière au seul voisinage d'un extremum par itérations successives de MFCN

rateur agissant sur l'espace  $BV \cap L^\infty$  sont développées dans [6]. Luc Vincent ([10]) est le premier à avoir introduit ce filtre dans le cadre de la Morphologie Mathématique et le principe en est le suivant : partant du niveau  $l_{\max}$  correspondant à la plus forte luminosité dans l'image on considère les composantes connexes de l'ensemble de niveau  $X_{l_{\max}} = \{x, u(x) \geq l_{\max}\}$ . Dès qu'une composante connexe a une aire inférieure à une limite  $A$ , on la supprime de l'ensemble  $X_{l_{\max}}$  en lui affectant la valeur  $l_{\max} - 1$ . On réitère l'opération pour les ensembles de niveau  $X_{l_{\max}-1}, X_{l_{\max}-2}, \dots$  jusqu'à ce qu'aucune composante connexe ne soit d'aire inférieure à  $A$ .

La seconde étape consiste à traiter selon le même principe les ensembles de niveau duals  $Y_{l_{\min}}, Y_{l_{\min}+1}, Y_{l_{\min}+2}, \dots$  où  $Y_\lambda = \{x, u(x) \leq \lambda\}$ .

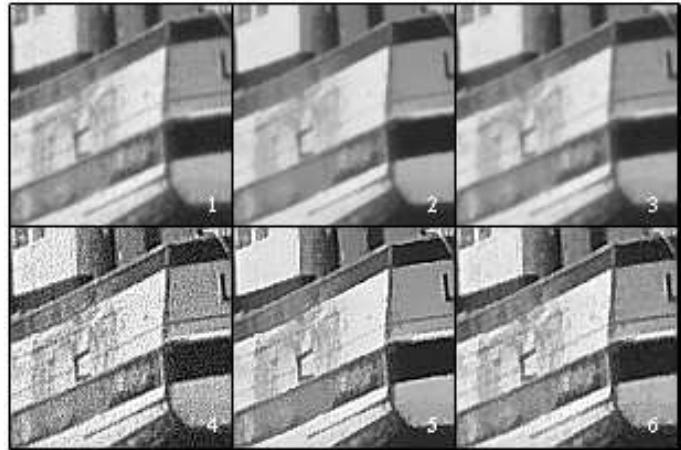


FIG. 5 – 1. Image  $u$  (bruit blanc gaussien,  $\sigma = 5$ )

2.  $\text{Susan}_{(d=5, l=12)}u - 3. I_5 S_5(\text{med}_{D(.,1)}u)$

4-5-6. Images 1-2-3 avec contours renforcés ( $u \leftarrow u - \Delta u$ )

Nous comparons ici IS avec un filtre non morphologique mais très bien adapté aux bruits blancs, Susan (Smallest Univalve Segment Assimilating Nucleus, [9]), qui constitue une bonne synthèse de la plupart des filtres locaux. Il est défini par :

$$(\text{Susan})u(x) = \frac{\int_{B(x,a)} u(y) e^{-\frac{|y-x|^2}{2d^2}} e^{-\frac{|u(y)-u(x)|^2}{l^2}} dy}{\int_{B(x,a)} e^{-\frac{|y-x|^2}{2d^2}} e^{-\frac{|u(y)-u(x)|^2}{l^2}} dy}$$

Les principaux défauts de ce filtre, outre qu'il est non morphologique, résident dans la difficulté à régler les paramètres et la nécessité de contrôler la diffusion. IS fournit une solution satisfaisante, moins régulière mais où sont encore présentes des textures fines de l'image et qui a l'avantage d'être un point fixe. En outre la distance  $L^2$  à l'image non bruitée est plus faible et le rapport signal/bruit meilleur que pour Susan. Cependant IS est bien adapté pour des bruits faibles mais ne permettra pas l'obtention d'une solution suffisamment régulière lorsque le bruit est fort.

Il est facile de montrer que ce filtre  $I_{AS_A}$  (inf – sup, voir [6, 10]) n'est pas équivalent à MFCN. Il conduit cependant à des résultats numériques similaires pour la plu-

part des images que nous avons testées, est nettement plus simple à mettre en oeuvre et plus rapide. Mais le fait de ne pas considérer simultanément un voisinage inférieur et un voisinage supérieur en chaque point peut amener des solutions non souhaitables, notamment lorsque les signaux traités sont périodiques ([6]).  $I_{ASA}$  est morphologique, croissant, idempotent, invariant pour toute transformation affine du plan, fait décroître la variation totale  $\|Du\|$  – mais presque toujours dans une moindre mesure que  $MFCN$  pour une même valeur de  $A$  – et est totalement indépendant de la courbure des lignes de niveau de l'image.

Nous avons mis l'accent sur le caractère non régularisant de  $MFCN$  et  $IS$ . Il est toujours possible d'effectuer une pré-régularisation, ce qui est le cas dans la plupart des expériences présentées, ou (et) une post-régularisation. Le filtre médian classique semble être le mieux adapté du fait de son caractère morphologique. Il nous faut toutefois préciser que la post-régularisation peut ne pas être effectuée partout, mais seulement aux points que  $MFCN$  ou  $IS$  aura modifiés et donc implicitement désignés comme des points de bruit. La diffusion interviendra donc aux seuls voisinages de ces points, évitant par là même une altération globale de l'image.

## Conclusion

A la suite des travaux de Leonid Yaroslavsky nous avons introduit un opérateur de débruitage,  $MFCN$ , qui peut être défini comme l'application du filtre médian à un voisinage s'adaptant parfaitement à la conformation des lignes de niveau en chaque point. Nous avons par ailleurs étudié un filtre auquel il est étroitement lié,  $IS$ , introduit par Luc Vincent dans le cadre de la Morphologie Mathématique. Ces deux filtres dépendent d'un seul paramètre, l'aire  $A$ , sont morphologiques et préservent remarquablement bien les structures de l'image.  $MFCN$  est invariant euclidien et  $IS$  invariant affine. Tous deux font décroître la variation totale. Ils permettent surtout l'obtention d'une solution satisfaisante qui est aussi un point fixe, à la différence de la plupart des autres filtres locaux et que ce soit dans leur définition discrète ou continue. Le choix du paramètre  $A$  étant par ailleurs très souple, ces opérateurs sont particulièrement désignés pour l'automatisation.

## Références

- [1] L.Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions et J.M Morel : *Axiomatization et nouveaux opérateurs de la morphologie mathématique*, C.R. Acad. Sci Paris, t.315, Série I, 265-268, 1992.
- [2] J.F. Canny : *Finding edges and lines in images*. Master's thesis, MIT, Cambridge, USA, 1983.
- [3] F. Guichard and J.M. Morel : *Partial Differential equations and image iterative filtering*. Report 9535, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 1995.
- [4] J. Malik and P. Perona: *A scale space and edge detection using anisotropic diffusion*, Proc. of IEEE Comp. Soc. Workshop on Comp. Vision, Miami, 16-22, 1987.
- [5] D. Marr : *Vision*, Freeman and Co, 1982.
- [6] S. Masnou : *Image restoration and pseudo-connected filters*, à paraître.

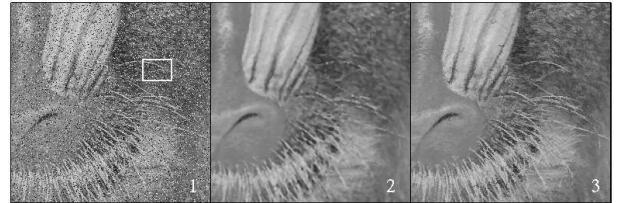


FIG. 6 – 1. *Image bruitée  $u$  (bruit impulsif,  $f = 20\%$ ) – 2.  $(\text{med}_{D(.,1.5)})^2 u$  – 3.  $I_{10}S_{10}u$*

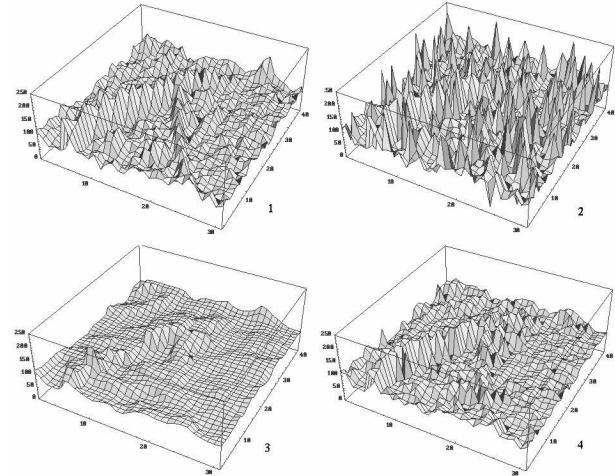


FIG. 7 – 1. *Vue 3D de la zone délimitée par un rectangle blanc dans l'image originale non bruitée de la figure 6 – 2. Vue 3D de cette zone dans l'image bruitée  $u$  – 3-4 Vues 3D de cette zone dans les images  $(\text{med}_{D(.,1.5)})^2 u$  et  $I_{10}S_{10}u$ . Cette expérience illustre la bonne qualité du débruitage par  $IS$  avec conservation des structures de l'image. On notera la forte similarité entre les vues 3D dans l'image originale et dans l'image débruitée par  $IS$ . Les résultats obtenus par le filtre médian classique sont comparativement moins bons car la régularisation s'est accompagnée d'une perte d'information très significative. Par ailleurs  $IS$  génère un point fixe à la différence du filtre médian classique.*

- [7] G. Matheron : *Random sets and integral geometry*, John Wiley, New-York, 1975.
- [8] L. Rudin and S. Osher : *Total variation based image restoration with free local constraints*, Proc. of the IEEE ICIP-94, vol. 1, Austin, TX, 31-35, 1994.
- [9] S.M. Smith and J.M. Brady : *SUSAN - a new approach to low level image processing*, International Journal of Computer Vision, 1997.
- [10] L. Vincent : *Morphological area openings and closings for gray-scale images*, Proc. of the Workshop "Shape in Picture", 1992, Driebergen, The Netherlands, Springer-Berlin, 197-208, 1994.
- [11] L.P Yaroslavsky and Murray Eden : *Fundamentals of digital optics*, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [12] W.P. Ziemer : *Weakly differentiable functions : Sobolev spaces and functions of bounded variation*, Springer-Verlag, New-York, 1989.