Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Laboratoire Jacques-Louis Lions

Mémoire de synthèse en vue d'une

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques

Questions variationnelles autour d'un problème de restauration d'images

Simon Masnou

soutenu le 1er décembre 2008 devant le jury composé de

MM.	Fabrice Bethuel	Université Paris 6	
	Antonin Chambolle	École Polytechnique	(Rapporteur)
	Albert Cohen	Université Paris 6	
	Gianni Dal Maso	SISSA	(Rapporteur)
	Guy David	Université Paris-Sud	(Président)
	Yves Meyer	ENS Cachan	
	Joachim Weickert	Univ. des Saarlandes	(Rapporteur)

Remerciements

Je suis extrêmement honoré qu'Antonin Chambolle, Gianni Dal Maso et Joachim Weickert aient accepté de consacrer du temps à lire ce mémoire et à rédiger un rapport, et je les en remercie. Je leur suis également très reconnaissant d'avoir pris la peine de se déplacer pour assister à la soutenance.

Yves Meyer a présidé mon jury de thèse il y a quelques années. C'est un immense honneur qu'il soit également dans mon jury d'habilitation et je lui en suis très reconnaissant.

Les discussions que nous avons eues avec Guy David sur certains problèmes abordés dans ce mémoire m'ont été très utiles et je suis très honoré qu'il ait accepté de participer au jury.

Fabrice Bethuel et Albert Cohen ont joué un rôle précieux depuis mon arrivée au laboratoire. Je leur suis très reconnaissant pour toutes les discussions que nous avons eues, mathématiques ou amicales, pour leur soutien moral (et financier !) et pour l'aide qu'ils m'ont apportée à de nombreuses reprises. Je suis donc très heureux qu'ils fassent partie du jury.

Quatre personnes ont contribué de façon fondamentale aux travaux présentés ici :

Jean-Michel Morel, tout d'abord, avec qui la collaboration s'est poursuivie au delà de la thèse. Sa très grande liberté de recherche, ses talents de mathématicien et de modéliste, sa capacité à sortir des sentiers balisés et à utiliser ou à élaborer une palette extrêmement diversifiée d'outils et de modèles sont une source constante d'inspiration et de motivation. Qu'il trouve ici le témoignage de ma gratitude et de mon admiration.

Vicent Caselles, ensuite, infatigable chercheur d'une extrême disponibilité, m'a fait bénéficier à de très nombreuses reprises de ses vastes connaissances mathématiques, numériques et en traitement d'images. Je lui suis profondément reconnaissant pour son aide et ses encouragements constants.

C'est grâce à Luigi Ambrosio, vers qui m'avait orienté Jean-Michel Morel, que je me suis intéressé aux varifolds. Sa connaissance de la théorie géométrique de la mesure et son refus de la facilité ont toujours été très stimulants. Je lui suis extrêmement reconnaissant de prendre souvent le temps de répondre à mes questions, malgré les innombrables sollicitations dont il est l'objet.

Enfin, sa curiosité, son humilité et sa capacité à arpenter avec une grande simplicité des chemins techniques très ardus font de Gian Paolo Leonardi un extraordinaire compagnon de recherche. Pour cela, mais aussi pour l'amitié qui nous lie, cette habilitation lui doit beaucoup.

Je remercie tous ceux avec qui j'ai la chance de travailler, outre les chercheurs que je viens de citer : Jean-François Aujol, Frédéric Cao, Daniel Cremers, Julie Delon, Yann Gousseau, Saïd Ladjal, Matteo Novaga, Patrick Pérez et Thomas Schoenemann. Cette habilitation n'est pas seulement le fruit de collaborations techniques mais avant tout le résultat de rencontres et, souvent, d'amitiés.

J'associe également à ces remerciements tous les amis italiens, de Pise et d'ailleurs, avec qui j'ai souvent discuté et beaucoup appris : Giovanni Bellettini, Ariela Briani, Matteo Foccardi, Bruno Franchi, Patrizio Frosini, Ilaria Gabbani, Maria-Stella Gelli, Pietro Majer, Carlo Mantegazza, Roberto Monti, Luca Mugnai et Enzo Tortorelli.

Le laboratoire Jacques-Louis Lions est *vraiment* un magnifique lieu de travail et d'échange. L'atmosphère à la fois studieuse et extrêmement chaleureuse qui y règne en font un cadre idéal pour faire de la recherche et j'en remercie tous les membres.

Le dynamisme du laboratoire doit beaucoup à son directeur, Yvon Maday. Il a soutenu avec constance et détermination tous mes projets et je lui exprime ici ma profonde reconnaissance.

Je remercie Brigitte Lucquin, Sidi Mahmoud Kaber et Frédéric Lagoutière pour le temps qu'ils ont passé à relire attentivement ce mémoire et pour les modifications qu'ils m'ont suggérées. Je remercie également Danielle Boulic, Liliane Ruprecht, Pascal Joly, Christian David, Khashayar Dadras, Salima Lounici et Florence Saidani pour leur aide technique et administrative.

Enfin, je remercie mes camarades du bureau 2C20, Ionut Danaila et Olivier Glass, pour les journées agréablement studieuses que nous passons ensemble.

À Delphine,

à Pauline,
Jérémie,
Héloïse

Table des matières

Table des matières **1**

Extended summary **3**

Présentation **13**

Liste de publications **17**

1 Autour d'un problème de reconstruction d'images **19**

1.1 De la complétion amodale à la reconstruction de parties manquantes . . . 20
1.2 Existence d'une famille optimale de courbes interpolantes 25
1.3 Un algorithme simple pour l'interpolation d'images 27
1.4 De la complétion de courbes à l'interpolation de fonctions 29
1.5 Localité de la courbure moyenne pour les varifolds entiers 33
1.5.1 Cas des hypersurfaces et application à la complétion amodale . . . 33
1.5.2 Localité dans un cas plus général 37
1.6 Une méthode mixte pour la reconstruction de la texture et de la géométrie 40
1.7 Un modèle variationnel pour les méthodes de "copier-coller" 45
1.8 Un modèle de segmentation faisant intervenir la courbure 52

2 Deux problèmes impliquant la notion de périmètre **55**

2.1 Composantes connexes au sens de la mesure dans $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ 55
2.2 Problème isopérimétrique dans les groupes d'Heisenberg 57

Bibliographie **61**

Extended summary

This document summarizes the contributions of the articles [SM-1] to [SM-10] listed page 17. Both the document and the papers can be downloaded as pdf files at the following address :

http://www.ann.jussieu.fr/~masnou/hdr

The papers have been divided in two categories : those related more or less explicitly to a problem arising in image reconstruction (Chapter 1) and those centrally concerned with the notion of perimeter (Chapter 2). We summarize both chapters in what follows.

1 On a problem arising in digital image reconstruction

From amodal completion to the recovery of missing domains The *inpainting* problem has been getting a lot of attention in the last ten years : it refers to the question of recovering in a digital image missing areas whose positions and shapes are known. There are numerous applications where this problem occurs, for instance in satellite imaging (for the recovery of transmission losses), in digital photo edition (for the removal of undesired objects), in medical imaging (for testing whether an object is coherent with its neighborhood), etc.

The papers [SM-1] and [SM-2] are devoted to an adaptation to inpainting [1] of a model in vision theory for the celebrated amodal completion process. According to this model, due to Kanizsa [40], Ullman [61] and Horn [36], our brain completes missing edges of partially occluded objects by simply prolonging the edges in the occluding domain using "pleasing" curves. Because the Euler elasticae have minimal elastic energy, they have been proposed as interpolating curves. Recall that elasticae are curves connecting two points with prescribed tangential conditions and minimizing an energy of the form

$$\int_0^{\mathcal{L}(C)} (\alpha + \beta|\kappa_C(s)|^2)ds$$

1. the word actually appeared later in this context [10] and *disocclusion* is used instead in [SM-1],[SM-2].

where s is the arc-length, $\kappa_C(s)$ the curvature, $\mathcal{L}(C)$ the curve length and α, β two positive weighting parameters. These curves appear for example in a very inspiring paper by Nitzberg, Mumford and Shiota [49] where an algorithm to compute the relative depth of objects in a scene is proposed. It essentially relies on the reconstruction of partially occluded objects by first extracting the edges then interpolating them using elasticae.

In collaboration with Jean-Michel Morel, we have adapted this idea in [SM-1] to the framework of level lines. More precisely, since level lines offer a complete representation of the image, completing all level lines that are broken by the inpainting domain ensures that a complete image will be reconstructed. The choice has been made in [SM-1] to prevent the crossing of any two interpolating curves in order to be sure that the reconstructed family of curves can be associated – but do not necessarily coincide - with a collection of level lines. Therefore, instead of trying to build independent elasticae, we have proposed to seek for a collection γ of mutually non crossing curves $\gamma_{(j_i^t, j_k^t)}$ connecting compatible level lines endpoints j_i^t, j_k^t and minimizing the criterion

$$E(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{(j_i^t, j_k^t) \\ \text{paired T-junctions}}} \int_{\gamma^\epsilon_{(j_i^t, j_k^t)}} (\alpha + \beta|\kappa|^p) d\mathcal{H}^1 \Big) dt \tag{0.1}$$

where $\alpha, \beta > 0$, $\mathcal{H}^1$ is the one-dimensional Hausdorff measure, and $\gamma^\epsilon_{(j_i^t, j_k^t)}$ slightly extends $\gamma_{(j_i^t, j_k^t)}$ in order to incorporate the regularity information in a band around the inpainting domain. Remark that, for the sake of generality, the elastica energy has been replaced with the more general $\int(\alpha + \beta|\kappa|^p) d\mathcal{H}^1$ with $p \geq 1$.

A simple algorithm for image interpolation In [SM-1] and [SM-2] an algorithm is proposed for the computation of *global* discrete minimizers of (0.1) in the case $p = 1$. The algorithm does not involve any flow but directly computes – in the discrete setting – an optimal collection of curves interpolating the level lines using a dynamic programming approach. Once the optimal curves have been found, an image can be reconstructed by piecewise propagation of each level's value. Despite its simplicity (taking $p = 1$ means interpolating with straight or polygonal lines) the algorithm has the ability to recover in a reasonable time a reasonably fair geometric information as shown in Figures 1.4 and 1.5 (see pages 29 and 30 in the main text in french). [SM-1] has received the "Best Student Paper Award" at the IEEE International Conference on Image Processing that was held in Chicago in 1998.

Existence of an optimal collection of interpolating curves [SM-2] and [SM-4] are concerned with theoretical issues related to the criterion (0.1) and in particular with the question whether a global minimizer can be found in the continuous domain. A positive answer is given in [SM-2] for the case $p = 1$ and in [SM-4] for the case $p > 1$. The latter case is more tricky. Starting from a minimizing sequence of collections of interpolating curves, the idea is to show that one can find a countable and dense subset of curves that converge and from which the remaining limit curves can be found. The difficulty is not to exhibit this converging sequence but rather to show that its energy can be uniformly controlled so that the compactness in $\mathrm{W}^{2,p}$ can be invoked. To obtain this control of the energy, we use a martingale argument for sequences of average energies over suitable dyadic intervals. This allows to build a limit collection of curves that minimizes (0.1) ([SM-4], Thm 2, Section 4).

From curve completion to function interpolation Still on the same problem, a different point of view is proposed in [SM-3] starting from the identity

$$\kappa(x) = -\big(\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\big)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}(x),$$

where u is a smooth function on $\mathbb{R}^2$ and $\kappa(x)$ denotes the curvature vector at a point x of the level line $\{y : u(y) = u(x)\}$, assuming that $|\nabla u|(x) > 0$. The coarea formula implies that, for any open set B,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\partial\{u\geq t\}\cap B}\Big(\alpha+\beta|\kappa_{\partial\{u\geq t\}}|^p\Big)\,d\mathcal{H}^1\,dt = \int_B |\nabla u|\Big(\alpha+\beta\Big|\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big|^p\Big)\,dx.$$

This provides another way to do inpainting, instead of minimizing (0.1) and reconstructing a function from the optimal set of curves : it consists in directly looking for a function u that coincides with the original image outside the inpainting domain, say A, and is a minimizer of the criterion

$$F_p(u,\tilde{A}) = \int_{\tilde{A}} |\nabla u|\Big(\alpha+\beta\Big|\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big|^p\Big)\,dx$$

where $\tilde{A}$ slightly extends A in order, again, to capture the regularity information in a band. Interestingly this approach can be immediately generalized to higher dimensions and still corresponds to a completion with regular hypersurfaces since the mean curvature vector at a point of a level hypersurface of a smooth function in $\mathbb{R}^N$ satisfies

$$H(x) = -\big(\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\big)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}(x).$$

However, an example due to Bellettini, Dal Maso and Paolini [6], see Figure 1.2 page 24, provides a function $u \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ that satisfies $F_p(u) = +\infty$ but can be obtained as a limit in L^1 of a sequence of smooth functions (u_n) such that $\sup_n F_p(u_n) < +\infty$. This proves that F_p is not lower semicontinuous thus cannot be minimized in L^1. As usual in the direct method of the calculus of variations, setting $F_p(u) = +\infty$ for every $u \in \mathrm{L}^1$ that is not smooth enough, one introduces the relaxation of F_p as the functional defined by (see [22])

$$\overline{F}_p(u) = \inf\{\liminf_{n\to\infty} F_p(u_n),\ u_n \to u \text{ in } \mathrm{L}^1\}$$

Then the existence of a function that coincides with a given BV function outside the inpainting domain and that minimizes $\overline{F}_p$ is easily proved in [SM-3], Theorem 5 . A more difficult question is to characterize precisely the difference between F_p and $\overline{F}_p$. In other words, did we fundamentally change the problem passing from the (not well-posed) minimization of F_p to the (well-posed) minimization of $\overline{F}_p$? We partially answer the question proving in [SM-3] that F_p and $\overline{F}_p$ coincide on smooth functions. Since $\overline{F}_p$ is lower semicontinuous in L^1, it amounts to showing that F_p is lower semicontinuous in the class of C^2 functions with respect to L^1 convergence. By the coarea formula, the problem actually reduces to sets and, more precisely, to proving that for a sequence of sets (E_n) with smooth boundaries converging in measure to a set E with smooth boundary, it holds

$$\int_{\partial E}(1+|H_{\partial E}|^p)d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\partial E_n}(1+|H_{\partial E_n}|^p)d\mathcal{H}^{N-1} \tag{0.2}$$

The problem is more difficult than it appears at first glance. What happens for example if several parts of ∂E_n accumulate on ∂E in the limit ? Will the resulting curvature be at least greater than the curvature of ∂E (so that (0.2) ensues) or could it be that for suitable accumulation of layers there are compensation phenomena so that the limit curvature would be smaller than the curvature of ∂E (and (0.2) would fail) ?

Locality of mean curvature for integral varifolds The real question arising here is the locality of curvature, i.e. if two boundaries of sets coincide, do they have same mean curvature locally ? The answer is of course positive for smooth sets. For possibly nonsmooth sets, there are natural objects for the study of accumulation phenomena and curvature : the varifolds [1, 3, 58], and in particular the integral ones, which are Radon measures defined on rectifiable sets together with their tangent space at each point and a integer-valued multiplicity function that aims at measuring the number of layers accumulated at a point. A weak –variational – notion of mean curvature can be defined for varifolds. When the support of the varifold is a smooth set the generalized mean curvature coincides with the classical definition thanks to the divergence theorem.

We prove with Luigi Ambrosio in [SM-3] that if two integral $(N-1)$-varifolds in $\mathbb{R}^N$ have generalized mean curvature in L^p with $p > N-1$, $p \geq 2$ then both mean curvatures coincide on almost every point of density 1 with respect to the intersection of the varifolds supports ([SM-3], Thm 2). It amounts to proving that there is no contribution to curvature of the symmetric difference of the supports, which follows from a result due to R. Schätzle [55] on the asymptotic decay of the *tilt-excess*, a quantity that measures the local variations of the tangent space.

Then the lower semicontinuity property (0.2) can be proved ([SM-3], Thm 4) and, by application of the coarea formula, the lower semicontinuity of F_p in the class of C^2 functions with respect to L^1 convergence. Therefore, F_p and $\overline{F}_p$ coincide on the class of C^2 functions ([SM-3], Thm 6). Turning back to the formulation of the inpainting problem using curves, we partially discuss in [SM-4] the connection between the formulation with curves and the formulation with functions ([SM-4], Thm 4).

The paper [SM-5] with Gian Paolo Leonardi is focused on the locality problem for varifolds. We propose another strategy that avoids the explicit use of any tilt-excess decay to prove, like above, that the symmetric difference of the supports of two varifolds does not contribute to the curvature at the points where the supports coincide in density. Examining the asymptotic behavior of the trace on spheres of a varifold with locally bounded first variation, we are able to solve the locality problem for 1-varifolds in $\mathbb{R}^N$ and we obtain a partial result for k-varifolds, $k > 1$. More precisely, we show that the locality property holds for :

1. any two integral 1-varifolds in $\mathbb{R}^N$ with mean curvature in L^1, which is the optimal integrability case ([SM-5], Thm 2.1) ;
2. any two integral k-varifolds $\mathbf{v}(M_1, \theta_2)$, $\mathbf{v}(M_2, \theta_2)$ in $\mathbb{R}^N$ with mean curvature in L^1 and such that, for a suitable open set B, $M_1 \cap B \subset M_2$ and θ_1, θ_2 are constant on $M_1 \cap B$ ([SM-5], Thm 3.4).

Epilog : at the time this document was almost completed, in September 2008, Ulrich Menne sent us the paper [45] where the locality problem is solved in full generality with a very interesting approximation argument. More precisely, U. Menne proves that any integral k-varifold V with mean curvature in L^1 is C^2-rectifiable and satisfies the locality property, i.e. its mean curvature coincides with the classical mean curvature of any C^2 k-manifold M at $\|V\|$-a.e. $x \in M$.

Combining geometric and texture reconstruction Going back to the problem of inpainting, the reference [SM-6] is a work in collaboration with Frédéric Cao, Yann Gousseau and Patrick Pérez. We already mentioned that the method we proposed in [SM-1] for inpainting as well as the other variational/ PDE methods are oriented toward the recovery of geometry and not adapted to texture. In contrast, very powerful methods for texture synthesis have appeared in the late 90's based on a simple interpretation of the locality and stationarity properties of textures [28, 64]. Basically, in the versions the most adapted to the inpainting problem [21, 53], these methods extend the texture by iteratively sampling and copying image pieces, the so-called *patches*. The coherence of the process depends on a metric between patches that ensures the homogeneity between contiguously copied pieces. Such methods are sometimes called *exemplar-based*. They often produce striking results, see Figures 1.7, 1.8 page 42-43, and also have the ability to recover a local geometric information. They fail however to reconstruct long-range geometric features, e.g. long edges. In the paper [SM-6], written in collaboration with Frédéric Cao, Yann Gousseau, and Patrick Pérez, we endow an efficient exemplar-based algorithm with a *geometric guide* so that long-range geometric features might be recovered. The algorithm has basically three steps :

1. one first computes a simplified version of the image – a *sketch* – keeping only the level lines where the contrast is the most meaningful, i.e. has very low probability to appear in a white noise image. The sketch essentially extracts the geometric information contained in the image while mostly preserving the dynamics ;
2. one interpolates the sketch in the inpainting domain adapting the method of [SM-1], [SM-2] so that not only straight lines can be used for the interpolation but also *Euler spirals*. These curves are commonly used in architecture, road design, typography and have also been proposed for shape completion. Their curvature is an affine function of arc-length, which makes them visually pleasing. Interestingly, they are solutions of the linearization of the Euler-Lagrange equation associated with the elastica energy. In addition to using Euler spirals, another difference of [SM-6] with [SM-1] is the possibility for any two interpolating curves to cross each other. Figure 1.9 page 44 shows an inpainting result obtained with Euler spirals. Another example is given in Figure 1.10 for the reconstruction of a partially occluded sketch image.
3. once the sketch has been recovered, it is used to penalize the metric between patches for the exemplar-based algorithm. We use indeed as new metric a linear combination of the squared distance between patches in the original image – which is the original metric – and of the squared distance between the same patches in the reconstructed sketch. In the former distance only the valid pixels within each patch are considered whereas the whole patches are considered for the latter distance.

Figures 1.11 and 1.12 page 45 illustrate the influence of the geometrical guiding for the recovery of non local geometric features using the guided exemplar-based general algorithm proposed in [SM-6].

A variational interpretation of exemplar-based methods The paper [SM-7] is also related to inpainting. It started from the observation that, except a contribution of Bickel and Levina [44] using probabilistic tools, it is hard to find in the literature any attempt to understand with theoretical tools the performances of exemplar-based methods. In this work done in collaboration with Jean-François Aujol and Saïd Ladjal, we propose a variational interpretation in the continuous domain of a generic exemplar-based algorithm. The motivation was twofold : showing that a variational framework makes sense to describe these methods and understanding their ability to recover non local geometric features. Inspired by a paper due to Demanet, Song and Chan on inpainting, as well as a work by Chambolle, Giacomini and Ponsiglione on piecewise rigidity in fracture mechanics, we propose several variational models. The first one aims at recovering a piecewise roto-translation T defined in the space SBV that maps an extension $A+B_r$ of the inpainting domain A onto the valid region $\Omega \setminus (A+B_r)$ and minimizes the following quadratic criterion that depends on the original image u_0 and where $B_r = B_r(0)$ represents a patch :

$$E_1(T) = \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u_0(T(x+y)) - u_0(T(x) + \nabla T(x)\, y)|^2 dy\, dx$$

We prove in [SM-7], Theorem 5.1 that there exists at least a minimizing map for E_1 in a suitable space of piecewise roto-translations. The proof makes use of a compactness property for piecewise roto-translations defined on Caccioppoli partitions ([SM-7], Theorem 4.3). Besides, we claim that E_1 is a rather natural adaptation to the continuous domain of a generic exemplar-based algorithm. Observing that the algorithm iteratively builds a map from the inpainting domain onto outside minimizing a local quadratic criterion, we actually think that it might correspond to a locally minimizing flow for E_1.

The second criterion that we introduce gives the possibility for the reconstructed image to be not exactly copied from the original but possibly more regular, in order for instance to reduce the blocky effects. To this aim, the criterion now depends on pairs (u, T) and penalizes the positive part of the difference between the local variations of the reconstructed image u and the original image u_0 so that u might be smoother than u_0 but not more oscillatory. Remark that we do *not* penalize the total variation of the difference between u and u_0, which would be much too strong, but rather the positive difference of the local variations of both functions. The second criterion reads as :

$$E_2(u,T) = \frac{1}{r^N} \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)\, y)|^2 dy\, dx + \\ + \frac{1}{r^{N-1}} \int_{A+B_r} \Big(|Du|(B_r(x)) - |Du_0|(B_r(T(x))) \Big)^+ dx$$

where $\frac{1}{r^N}$ and $\frac{1}{r^{N-1}}$ are homogeneity parameters and $\big(\cdot\big)^+$ represents the positive part. Again, the existence of a minimizer (u, T) in a suitable space can be proven ([SM-7], Theorem 6.1). Since the use of total variation is more sensible for geometric information, we propose a third model where the local variations are compared only for the geometric parts of u and u_0 obtained using a TV-L^1 decomposition [4, 23] ([SM-7], Theorem 6.8).

Finally a fourth model is proposed that involves the functional F_p seen above in order to force the level lines of the reconstructed geometric part to have more regularity ([SM-7], Theorem 6.9).

Section 7 of [SM-7] is devoted to a numerical study of how suitable the minimization of E_1 and E_2 is for the reconstruction of a non local geometric information. Our numerical results on a toy example indicate that both energies are more adapted than a generic exemplar-based algorithm, in the sense that they are able to promote long-range smooth edges. This is coherent with what we said before : if the algorithm corresponds indeed to a locally minimizing flow for E_1, the latter is more efficient for a global reconstruction.

We propose in Section 8 of [SM-7] an axiomatic study in order to choose the most sensible energies among the following generalizations of E_2 :

$$E_2^{a,b,c}(u,T) = \frac{1}{r^N}\int_{A+B_r}\int_{B_r}|u(x+y)-u_0(T(x)+\nabla T(x)\,y)|^a dy\,dx \\ + \frac{1}{r^{N-1+b}}\int_{A+B_r}\left[\Big(|Du|(B_r(x)) - |Du_0|(B_r(T(x)))\Big)^+\right]^c dx.$$

We show in particular that the minimizers of $E_2^{2,2,N-1}$ are stable with respect to any multiplicative contrast change and any rescaling, and that the energy has an interesting asymptotic behavior as r tends to zero.

To conclude, our contribution in [SM-7] is a first step towards the understanding of global variational formulations for exemplar-based methods in the continuous domain. We proved that there is a variety of models that are well-posed with sensible features regarding the reconstruction of geometry, and future interesting developments could be :

1. To understand more accurately the ability of these models to reconstruct non local geometric features without diminishing the capacity to restore correctly the texture ;
2. To derive globally minimizing discrete methods in order to exploit this ability and possibly improve the state of the art inpainting algorithms ;
3. To understand the asymptotic behaviour of the models as the patch size r tends to 0, possibly using other more suitable weighting parameters. Exemplar-based methods are obviously efficient in practice for not too small values of r. But it is an interesting challenge to try to understand asymptotically whether they are non local extensions of local evolution models. It might help understanding their efficiency and their limitations, in particular regarding the recovery of geometry.

A segmentation model involving curvature The segmentation method proposed in [SM-8] has little in common with inpainting, except that it involves the elastica energy.

In this work done in collaboration with Daniel Cremers and Thomas Schoenemann, we investigate an edge-based segmentation model that aims at identifying a not too short and not too oscillatory curve lying along a strong edge. In a previous publication, D. Cremers and T. Schoenemann had already proposed a method for computing *global* minimizers of the associated discrete model, based on the search of negative cycles in a suitable graph. Our contribution in [SM-8] is a proof that there exist global minimizers for the model in the continuous domain and that any converging sequence of discrete minimizers tend to a "continuous" minimizer as the resolution increases. It is worth noticing that very few formulations in segmentation give the opportunity to prove existence and convergence of global minimizers that can be numerically computed.

2 Two problems involving the notion of perimeter

Measure-theoretic connected components for sets of finite perimeter in $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ The second category of papers synthesized in this document involve the notion of perimeter. In [SM-9] we carefully study with Luigi Ambrosio, Vicent Caselles and Jean-Michel Morel a measure-theoretic notion of connected components for sets of finite perimeter due to Federer [33]. Our main motivation was to provide a rigorous framework for the theoretical study of many methods in image processing where the notion of connected component is necessary while the image lack of regularity prevents from using the classical topological notion. Such methods appear in a large variety of problems in segmentation, denoising, classification, shape comparison, compression, etc. More widely, this weak notion of connectedness is also of interest in mathematical mechanics.

We analyse in [SM-9] the fine properties of measure-theoretic connectedness and show in particular the link between a set of finite perimeter, its measure-theoretic components and their essential boundaries. We prove that, in the specific case of the plane, there is a strong connection between the measure-theoretical and the topological notion of connectedness. Eventually, we use this notion to study a couple of denoising operators acting in the space of *weakly differential functions*, i.e. Borel functions whose level sets have finite perimeter for almost every level.

Isoperimetric problem in the Heisenberg groups The notion of perimeter is also central in [SM-10] written in collaboration with Gian Paolo Leonardi. The context is however much different since we address the problem of identifying isoperimetric sets in the Heisenberg groups $\mathbb{H}^N$. These groups are emblematic of sub-Riemannian geometry : they are among the simplest spaces in this setting but already concentrate most of the geometrical difficulties. Among the many issues around the question of understanding the connection between topology, metric and differentiable structure, the isoperimetric problem is important because it aims at identifying the canonical sets of $\mathbb{H}^N$. While the validity of an isoperimetric formula and the existence of isoperimetric sets are well-known, the full identification of isoperimetric sets is still an open problem, see [47] for a recent illuminating review. Our contribution with Gian Paolo Leonardi in [SM-9] is twofold :

1. we prove that the isoperimetric sets in a restricted class of smooth and axially symmetric sets have constant mean curvature and that their boundary can be foliated by Carnot-Carathéodory geodesics joining the poles [2]. These sets are the candidates to the general isoperimetric problem [47].
2. we discuss the adaptation to $\mathbb{H}^N$ of a proof involving the Brunn-Minkowski inequality that allows in $\mathbb{R}^N$ to show that balls are isoperimetric. This proof requires the validity of a Brunn-Minkowski inequality in $\mathbb{H}^N$ as well as a link between the perimeter and the Minkowski content computed with respect to a suitable set. We were able to prove a Brunn-Minkowski inequality and to show that the Minkowski content with respect to the unit Carnot-Carathéodory ball depends only on the horizontal part of the ball, and therefore can be equivalently computed with respect to *any* set having the same horizontal projection. The conclusion of [SM-10] is however negative : the exponent appearing in the Brunn-Minkowski inequality does not allow to use the inequality for the identification of the isoperimetric sets and no adaptation is possible. Another strategy has to be found.

To conclude this brief description of our papers [SM-1] to [SM-10], we point out the interesting and quite unexpected connection between the amodal completion problem addressed above and sub-Riemannian geometry : Citti and Sarti, following a mathematical model of the early visual cortex due to Petitot and Tondut [52], have proposed in [19] an interesting model for amodal completion that transforms the constrained minimization of

$$\int_{\tilde{A}} |\nabla u| \Big(\alpha + \beta \Big|\mathrm{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big|^2\Big)\, dx$$

into the resolution of the heat equation in the sub-Riemannian space of translations-rotations $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

2. we actually realized afterwards that we had rediscovered a property previously enounced by Pansu [51].

Présentation

Ce mémoire est composé de deux parties où sont résumés les travaux [SM-1] à [SM-10] dont la liste figure page 17. Le mémoire et les articles peuvent être téléchargés sous la forme de fichiers pdf à l'adresse

http://www.ann.jussieu.fr/~masnou/hdr

La première partie du mémoire traite de différentes questions relatives à un problème de restauration d'images numériques, que l'on désigne dans la littérature du traitement des images sous le terme d'*inpainting*. Il s'agit de restaurer des parties manquantes d'une image sous l'hypothèse que leur position et leur forme sont connues et que la seule information dont on dispose se trouve dans le reste de l'image.

L'article référencé [SM-1] (voir page 17) est une courte description d'un travail effectué avec Jean-Michel Morel portant sur l'adaptation au problème de l'*inpainting* d'un modèle utilisé en théorie de la vision pour décrire le processus de *complétion amodale*. Grâce à ce processus, notre système visuel a la capacité de reconstruire virtuellement les contours des objets partiellement occultés. L'adaptation proposée dans [SM-1] fait intervenir la notion de *lignes de niveau* d'une image et se ramène à un problème d'optimisation d'une famille de courbes. On cherche ainsi à construire une famille de courbes sans croisement qui interpolent, dans la partie manquante, les lignes de niveau interrompues et qui minimisent une fonctionnelle globale tenant compte pour chaque courbe d'une énergie de la forme $\int (\alpha + \beta|\kappa|^p)ds$, qui généralise la fameuse énergie élastique d'Euler.

Les travaux [SM-2] et [SM-4] portent sur l'analyse théorique de ce problème et on y montre l'existence d'une famille minimisante de courbes pour tout $p \geq 1$.

L'article [SM-3] propose une approche différente partant d'une écriture de l'énergie en termes de fonctions plutôt que de courbes, et qui a l'avantage d'être généralisable à la dimension N. Il s'agit désormais de minimiser la fonctionnelle relaxée associée à l'énergie

$$F_p(u) = \int_\Omega |\nabla u| \Big(\alpha + \beta \Big| \mathrm{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \Big|^p \Big) \, dx.$$

L'existence d'une fonction optimale, pas nécessairement unique, est démontrée. Nous étudions également le lien entre la fonctionnelle F_p et sa relaxée et nous montrons qu'elles coïncident dans la classe des fonctions $C^2(\mathbb{R}^N)$. La preuve de ce résultat repose de façon essentielle sur une propriété de localité, démontrée ici pour p suffisamment grand, de la courbure moyenne généralisée des varifolds entiers, qui sont des outils permettant de décrire les propriétés au second ordre des ensembles rectifiables munis d'une fonction de multiplicité entière.

Cette question de la localité de la courbure des varifolds fait l'objet de [SM-5]. On y établit un résultat optimal pour les varifolds unidimensionnels de $\mathbb{R}^N$ et un résultat partiel pour les varifolds de plus grande dimension.

On propose dans [SM-6] une méthode d'*inpainting* combinant un algorithme de "copier-coller" extrêmement efficace pour la restauration de la texture avec une méthode de guidage géométrique basée sur des spirales d'Euler et permettant de retrouver des structures géométriques non locales.

[SM-7] a pour objet l'élaboration et l'étude théorique d'un modèle variationnel devant être l'équivalent dans le domaine continu d'un algorithme de "copier-coller" générique. L'objectif est de comprendre d'un point de vue théorique la capacité de l'algorithme et de son extension au domaine continu à restaurer la géométrie. Nous proposons et étudions plusieurs variantes du modèle.

Le problème traité dans [SM-8] ne relève pas de la restauration d'images mais de la segmentation. Le but est de pouvoir extraire un objet en détectant son contour. On se ramène pour cela à un problème d'optimisation faisant intervenir l'énergie élastique d'Euler (généralisée) et pour lequel on peut montrer l'existence de minimiseurs dans le domaine continu. La nature du modèle permet la mise au point d'un algorithme de minimisation *globale* – ce qui est rare en segmentation – basé sur la détection de cycles négatifs dans un graphe approprié. On peut en outre prouver la convergence de minimiseurs discrets vers des minimiseurs continus.

La seconde partie du mémoire est consacrée au résumé des articles [SM-9] et [SM-10] qui portent sur l'étude de deux problèmes différents faisant intervenir la notion de périmètre. Dans [SM-9] on introduit et on étudie en détail la notion de composante connexe au sens de la mesure pour les ensembles de périmètre fini. Ce travail se justifie par la nécessité de donner un cadre rigoureux à des méthodes de segmentation, de compression, de restauration ou d'analyse de formes qui font intervenir les composantes connexes d'ensembles de niveau. La seconde partie de [SM-9] est consacrée à l'étude d'opérateurs de débruitage, qui éliminent en particulier le bruit impulsionnel en supprimant les petites composantes d'ensembles de niveau.

Enfin, [SM-10] traite du problème isopérimétrique dans les groupes d'Heisenberg, qui sont des exemples caractéristiques d'espaces sous-riemanniens. On s'intéresse en particulier à l'identification des ensembles isopérimétriques. Les résultats obtenus sont partiels – le problème reste d'ailleurs ouvert à ce jour en dépit de progrès récents – mais offrent de nouvelles perspectives sur l'inégalité de Brunn-Minkowski dans ce contexte et sur le lien entre contenu de Minkowski et périmètre.

Liste de publications

Publications résumées dans la partie 1

[SM-1] (avec J.-M. Morel) *Level lines based disocclusion*, Proceedings ICIP'98 IEEE International Conference on Image Processing, Chicago, 3 :259–263, 1998.

[SM-2] *Disocclusion : a variational approach using level lines*, IEEE Transactions on Image Processing, 11(2) :68–76, 2002.

[SM-3] (avec L. Ambrosio) *A direct variational approach to a problem arising in image reconstruction*, Interfaces and Free Boundaries, 5 :63-81, 2003.

[SM-4] (avec J.-M. Morel) *On a variational theory of image amodal completion*, S. Masnou and J.-M. Morel, Rendiconti del Sem. Mat. della Univ. di Pad., 116 :211–252, 2006.

[SM-5] (avec G.P. Leonardi) *Locality of the mean curvature of rectifiable varifolds*, accepté à Advances in Calculus of Variations, 2008.

[SM-6] (avec F. Cao, Y. Gousseau et P. Pérez) *Geometrically guided exemplar-based inpainting*, soumis, 2008.

[SM-7] (avec J.-F. Aujol et S. Ladjal) *Exemplar-based inpainting from a variational point of view*, soumis, 2008.

[SM-8] (avec D. Cremers et T. Schoenemann) *The elastic ratio : introducing curvature into ratio-based globally optimal image segmentation*, soumis, 2008.

Publications résumées dans la partie 2

[SM-9] (avec L. Ambrosio, V. Caselles et J.-M. Morel) *Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing*, Journal of the European Mathematical Society, 3 :39-92, 2001.

[SM-10] (avec G.P. Leonardi) *On the isoperimetric problem in the Heisenberg group* $\mathbb{H}^n$, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 184(4) :533-553, 2005.

Autres publications

[SM-11] (avec L. Ambrosio) *On a variational problem arising in image reconstruction*, Proceedings “Free Boundary Problems”, Trento, Italie, Int. Series of Num. Math, Birkhaüser, 2004.

[SM-12] (avec V. Caselles et J.-M. Morel) *La vision, une machine géométrique ?*, La Recherche, Oct. 2001.

[SM-13] (avec J.-M. Morel) *Image restoration involving connectedness*, in Proceedings DIP’97 (Wien), SPIE, 3346 :84-95, 1998.

[SM-14] (avec V. Caselles, J.-M. Morel et C. Sbert) *Image interpolation*, Notes du Séminaire “Équations aux Dérivées Partielles”, Ecole Polytechnique, XII, 1998.

[SM-15] (avec J.-M. Morel) *La formalisation mathématique du traitement des images*, C.R. de la Journée annuelle de la Société Mathématique de France (Trois Applications des Mathématiques), 1-14, 1998.

[SM-16] (avec J.-M. Morel) *Restauration d’images et filtres de Yaroslavsky*, Actes Gretsi’97, Grenoble, France, 1233-1236, 1997.

1 Autour d'un problème de reconstruction d'images

Les articles référencés [SM-1], [SM-2], [SM-3], [SM-4], [SM-6] et [SM-7] sont des contributions au problème de la restauration d'une image numérique (en niveau de gris ou en couleurs) dont certaines parties sont manquantes ou occultées. On supposera toujours que, d'une part, la position et la forme de ces parties sont connues et, d'autre part, que l'information y a été totalement perdue. Les exemples d'applications sont nombreux : restauration de pixels perdus lors de la transmission d'une image satellitaire, traitement d'images médicales, notamment pour diagnostiquer la présence d'objets sans cohérence avec leur voisinage, retouche numérique d'une vieille photographie tachée ou rayée, amélioration d'une photo numérique d'où l'on veut faire disparaître des objets indésirables, etc.

Ce n'est que depuis une dizaine d'années que ce sujet a réellement fait l'objet d'une attention particulière. Les techniques proposées auparavant ne permettaient pas, à notre connaissance, de reconstruire l'information dans des zones de grande taille, soit en raison d'une incapacité à traiter les discontinuités qui caractérisent fréquemment une image, soit en raison d'un coût calculatoire déraisonnable.

L'article [SM-1] écrit en collaboration avec Jean-Michel Morel est l'une des premières contributions au problème qui soit explicitement variationnelle. En dépit de sa relative simplicité et des limites du modèle, l'algorithme peut fournir des résultats satisfaisants comme l'illustre la figure 1.4 page 29. Nous avions alors utilisé le terme *désoccultation* (*disocclusion* dans la version anglaise) pour décrire ce processus de restauration, en référence au fait que la reconstruction d'une partie manquante équivaut à la reconstruction d'une partie totalement occultée et qu'il s'agit donc de supprimer une occultation. Cet article a été récompensé du *Best Student Paper Award* au congrès *IEEE International Conference on Image Processing* qui s'est tenu à Chicago en 1998. Nous décrirons plus loin en quoi consiste la méthode proposée.

Le vrai engouement pour une approche du problème par des méthodes variationnelles ou basées sur des EDP a suivi la publication d'un article de Bertalmio, Sapiro, Caselles et Ballester intitulé *Image inpainting* [10] où la reconstruction est effectuée par transport de l'information valide du bord de la zone occultée vers l'intérieur. Le titre de l'article fait référence à une technique de restauration de peintures d'art qui consiste, en effet, à retoucher la partie endommagée d'un tableau en peignant de l'extérieur vers l'intérieur. Le terme *inpainting* est désormais systématiquement utilisé pour décrire une méthode de restauration de parties manquantes ou occultées et nous y aurons recours dans ce mémoire, de préférence à l'équivalent français *peinturage*...

1.1 De la complétion amodale à la reconstruction de parties manquantes

L'approche que nous avons utilisée dans les articles [SM-1], [SM-2], [SM-3],[SM-4] et [SM-6] trouve sa source dans un travail de Nitzberg, Mumford et Shiota [49] sur la détermination de la profondeur relative des objets dans une image. Leur méthode repose sur l'identification des objets partiellement occultés suivie de leur reconstruction puis du calcul de leurs positions relatives sur l'axe de profondeur.

L'idée mise en œuvre pour réaliser la reconstruction des objets occultés est elle-même une adaptation des travaux de G. Kanizsa [40], S. Ullman [61] et B.K.P Horn [36] portant sur la *complétion amodale*, c'est-à-dire la capacité qu'a notre système visuel de reconstruire artificiellement des objets partiellement recouverts. Cela est illustré dans la figure 1.1 où l'on constate que la reconstruction n'a que peu à voir avec les objets originaux – les quatre "papillons" noirs – mais plutôt avec la disposition des points d'intersection entre les bords des "papillons" et les bords des formes blanches ainsi qu'avec l'orientation des tangentes en ces points. Ainsi, dans la colonne du milieu, nous croyons voir en haut quatre disques noirs recouverts et, dans l'exemple du bas, un carré. Dans les deux cas, notre cerveau imagine des courbes reliant entre eux les points où un contour de l'objet occulté est interrompu par un contour de l'objet occultant, formant ainsi une lettre "T" déformée, d'où l'expression de *jonctions en T* (*T-junctions* en anglais) utilisée pour désigner ces points de contact.

De nombreux travaux dans le domaine de la vision ont porté sur le choix que fait notre cerveau d'apparier telle paire de jonctions en T plutôt que telle autre, et sur la forme des courbes virtuelles qui les relient. De très nombreux facteurs entrent en jeu (convexité, symmétrie, longueurs respectives, etc.) et on trouvera dans le livre de Kanizsa des expériences illustrant leur influence respective [40]. Différentes expériences psychophysiques ont ainsi montré que la forme d'une courbe amodale reliant deux jonctions en T est un compromis entre le plus court chemin et la *bonne continuation*, cette dernière expression faisant référence à notre tendance à vouloir prolonger un contour interrompu dans la direction de sa tangente en la jonction en T. Le choix d'un modèle

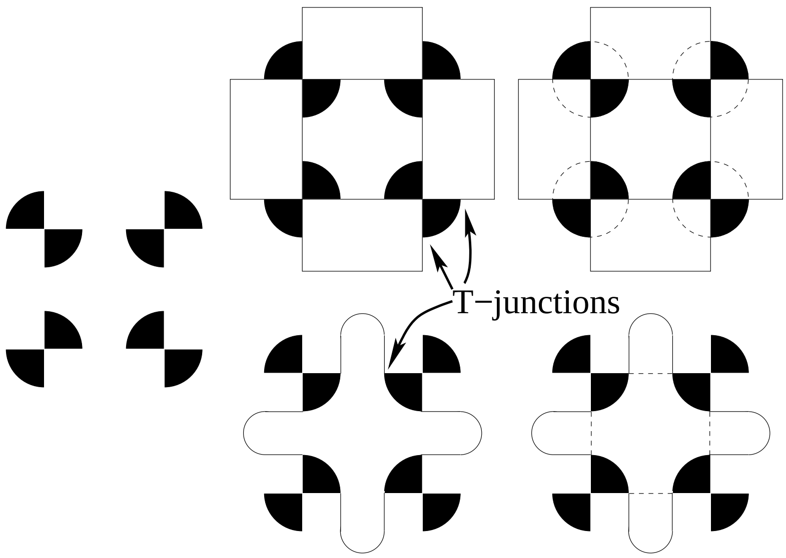


FIGURE 1.1: Selon ce qui est superposé aux quatre papillons noirs, l'œil perçoit, par *complétion amodale*, différentes formes occultées dans la colonne du milieu (des disques en haut et un carré en bas). Ce sont les positions relatives des jonctions en T et l'orientation des tangentes associées qui déterminent la reconstruction visuelle.

robuste de courbe corroborant les observations expérimentales fait encore aujourd'hui l'objet de publications, ce qui montre la difficulté du problème. On trouvera une description exhaustive de la littérature sur le sujet dans [32], où par ailleurs un modèle simple et pertinent est proposé.

A l'instar de Nitzberg, Mumford et Shiota dans [49], nous avons utilisé un modèle qui a été beaucoup étudié en relation avec la complétion de contours : le modèle de l'*elastica*. Rappelons qu'étant donné deux points et deux directions en ces points, l'elastica est une courbe γ reliant les deux points sous la contrainte tangentielle associée aux deux directions prescrites et minimisant une énergie de la forme

$$\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)} (\alpha + \beta|\kappa(s)|^2) ds \tag{1.1}$$

où $\mathcal{L}(\gamma)$ est la longueur de la courbe, s l'abscisse curviligne, $\kappa(s)$ le vecteur de courbure au point $\gamma(s)$ et α, β deux constantes positives de pondération. Cette fonctionnelle fut d'abord étudiée par Euler dans ses travaux portant sur l'énergie accumulée par une tige élastique fine dont on contraint la position et l'orientation des extrémités. L'apparition du modèle de l'elastica en théorie de la vision, et plus particulièrement en théorie de la complétion de contours, est due à Ullman [61] et Horn [36]. Leur thèse est que les elasticae étant des courbes d'énergie élastique minimale, elles sont des candidates naturelles au titre de courbes "visuellement agréables" pour relier deux points sous contrainte tangentielle. Voyons à présent comment les elasticae sont utilisés dans l'algorithme de Nitzberg, Mumford et Shiota [49]. Les différentes étapes de la méthode sont :

1. segmentation de l'image, c'est-à-dire détermination d'une image simplifiée correspondant à un découpage objets + fond ;
2. extraction des jonctions en T ;
3. détermination d'un ensemble optimal d'appariements des jonctions en T, c'est-à-dire tel que la somme des énergies des elasticae reliant les paires de jonctions soit minimale. Une méthode de recherche exhaustive – donc coûteuse – est utilisée ;
4. après reconstruction des objets partiellement occultés par complétion optimale de leurs contours, calcul de leur profondeur relative par une méthode de segmentation de strates.

L'idée que nous avons développée avec Jean-Michel Morel dans [SM-1] fut d'adapter au problème de la reconstruction de parties manquantes la troisième étape de l'algorithme de Nitzberg, Mumford et Shiota. La difficulté était de passer d'une technique de reconstruction d'*objets* à une technique de reconstruction d'*images* par nature beaucoup plus riches en information. La solution que nous avons adoptée fait intervenir la notion de *lignes de niveau*. On rappelle que si l'on modélise une image à niveaux de gris comme une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors ses *ensembles de niveau supérieurs* s'écrivent

$$X_t = \{x \in \Omega : \ u(x) \geq t\}$$

et leurs frontières constituent les *lignes de niveau*. Il s'agit d'une représentation *complète* dans la mesure où la donnée des ensembles de niveau définit entièrement l'image grâce à la formule

$$u(x) = \sup\{t : \ x \in X_t\}. \tag{1.2}$$

Dans le cas où une partie d'une image en niveaux de gris est manquante ou, de façon équivalente, occultée, il suffit donc en théorie de compléter ses lignes de niveau "interrompues" par l'occultation pour pouvoir reconstruire l'image. En appelant *jonctions en T* les points d'interruption des lignes de niveau sur la frontière du domaine occultant, la méthode que nous avons proposée dans [SM-1] consiste à déterminer, à l'instar de Nitzberg, Mumford et Shiota avec les contours d'objets, un ensemble optimal de courbes reliant les jonctions en T deux à deux de façon à compléter les lignes de niveau interrompues et à permettre la reconstruction d'une image complète.

Avant de détailler la méthode, examinons une première difficulté : les courbes obtenues grâce au processus de minimisation peuvent être très différentes des lignes de niveau de l'image finalement reconstruite. Un exemple présenté sur la figure 1.2 et dû à Bellettini, Dal Maso et Paolini [6] permet de s'en convaincre : l'image u_γ obtenue en affectant la couleur grise à toute la zone délimitée par les courbes γ_1 et γ_2 a des lignes de niveau clairement différentes de γ_1 et γ_2.

Bellettini, Dal Maso et Paolini traitent dans [6] d'un problème également motivé par le modèle de complétion de Nitzberg, Mumford et Shiota. Il s'agit de caractériser finement la forme des objets qui, partiellement occultés, sont reconstruits par complétion de leurs bords manquants à l'aide d'elasticae généralisés, c'est-à-dire minimisant une énergie de la forme $\int_0^{\mathcal{L}(\gamma)}(\alpha+\beta|\kappa_\gamma|^p)ds$ où $p>1$ et $\alpha,\beta>0$. Le problème est en fait posé de façon légèrement différente par Bellettini, Dal Maso et Paolini et la question qu'ils étudient est précisément la suivante : étant donné $p>1$ et $\alpha=\beta=1$ par souci de simplicité, que peut-on dire des ensembles bornés $E\subset\mathbb{R}^2$ qui sont limites (au sens de la convergence dans L^1 des fonctions caractéristiques) d'une suite d'ensembles $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à bords réguliers vérifiant

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\partial E_n}(1+|\kappa|^p)d\mathcal{H}^1<+\infty \quad ?$$

En considérant la fonctionnelle F qui, à tout ensemble E à bord régulier associe $F(E)=\int_{\partial E}(1+|\kappa|^p)d\mathcal{H}^1$ et en étendant sa définition en posant que tout ensemble non régulier est d'énergie infinie, il s'agit donc de décrire finement les ensembles mesurables bornés $E\subset\mathbb{R}^2$ dont l'énergie *relaxée* est finie. On rappelle que la fonctionnelle relaxée associée à F est la plus grande fonctionnelle semi-continue inférieurement minorant F [22]. Elle est notée $\overline{F}$ et vérifie

$$\overline{F}(E)=\inf\Big\{\liminf_{n\to\infty}F(E_n),\ \partial E_n\in\mathrm{C}^2,\ |E_n\Delta E|\to 0\Big\},$$

où Δ désigne l'opérateur de différence symétrique.

L'ensemble B à droite sur la figure 1.2 est ainsi d'énergie relaxée finie. En revanche, $F(B)=+\infty$ prouve que F n'est pas semi-continue inférieurement puisqu'on peut facilement construire des ensembles B_n à bord régulier qui convergent vers B tout en vérifiant $\sup F(B_n)<+\infty$. Nous recommandons la lecture des articles [6, 7, 8] où l'on trouvera une caractérisation complète des ensembles dont la relaxée $\overline{F}$ est finie. Nous reviendrons à cette question lorsque nous évoquerons l'article [SM-3].

L'exemple de la figure 1.2 prouve qu'il est possible, en utilisant des courbes très régulières et à énergie d'elastica uniformément bornée, d'obtenir des objets limites non réguliers. La situation est encore plus complexe dans notre cas puisque nous devons traiter non pas *un* mais *des* ensembles de niveau – voire une infinité dans un cadre non discret - pour reconstruire une image partiellement occultée.

Venons-en à présent à la façon dont nous souhaitons compléter les lignes de niveau interrompues et au critère d'optimalité utilisé. Il faut imposer plusieurs contraintes aux

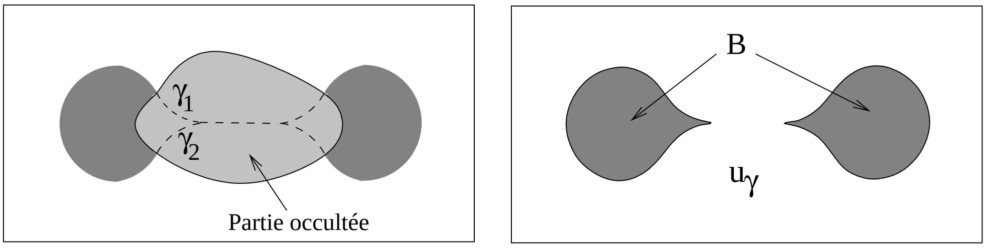


FIGURE 1.2: Les courbes de complétion amodale γ_1, γ_2 et les lignes de niveau de la fonction reconstruite u_γ peuvent avoir une structure totalement différente (d'après Bellettini, Dal Maso et Paolini [6]).

courbes d'interpolation de façon à s'assurer qu'on pourra facilement en déduire une fonction [1] :

1. une courbe d'interpolation doit relier deux jonctions en T de même niveau et de même orientation de la normale extérieure à l'ensemble de niveau ;
2. deux morceaux quelconques de courbes ne peuvent pas se croiser mais peuvent se toucher tangentiellement.

Ces différentes contraintes permettent qu'à l'issue du processus de minimisation les ensembles de niveau soient correctement définis comme les ensembles délimités par les courbes optimales. En particulier, l'hypothèse de non croisement garantit que les ensembles reconstruits vérifient la propriété de monotonie $X_t \subseteq X_{t'}$ si $t > t'$.

Le critère d'optimalité retenu est directement inspiré des travaux en théorie de la vision que nous avons mentionnés précédemment : nous souhaitons reconstruire des courbes qui soient les plus proches possibles d'elasticae généralisés. Il n'est cependant pas possible de minimiser individuellement chaque courbe puisque nous devons garantir la contrainte de non-croisement. Nous allons donc minimiser dans la classe des courbes $\gamma_{(j_i^t, j_k^t)}$ reliant deux jonctions en T sous les contraintes ci-dessus et relativement à l'énergie

$$E(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{(j_i^t, j_k^t) \text{ appariés}} \int_{\gamma^\epsilon_{(j_i^t, j_k^t)}} (\alpha + \beta|\kappa|^p) d\mathcal{H}^1 \Big) dt, \tag{1.3}$$

où $\gamma = \{\gamma_{(j_i^t, j_k^t)}\}$, α et β sont des constantes positives de pondération et $\gamma^\epsilon_{(j_i^t, j_k^t)}$ est une extension de $\gamma_{(j_i^t, j_k^t)}$ en dehors du domaine occulté – appelons-le A – permettant de tenir compte de la géométrie des lignes de niveau interrompues (voir [SM-2] et [SM-4]) pour les détails). On notera dans la suite $E(\gamma_{(j_i^t, j_k^t)}) = \int_{\gamma^\epsilon_{(j_i^t, j_k^t)}} (\alpha + \beta|\kappa|^p) d\mathcal{H}^1$.

1. Nous décrirons plus loin une méthode *discrète* proposée dans [SM-6] qui autorise les croisements. La généralisation au domaine continu est possible mais délicate.

On remarque que $E(\gamma)$ est une intégrale de sommes finies ou dénombrables. Il suffit en effet de supposer que u_0 est dans $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{A})$ pour en déduire, modulo une légère perturbation de ∂A, que la trace de u_0 sur ∂A est à variation bornée. La formule de la coaire permet de conclure qu'il y a un nombre fini de jonctions en T pour presque tout niveau.

Les articles [SM-2] et [SM-4] portent tous deux sur la minimisation de (1.3) lorsqu'on suppose que A est simplement connexe. Le cas $p = 1$ est traité dans [SM-2] tandis qu'on étudie dans [SM-4] le cas $p > 1$ qui est plus délicat. Pour simplifier les preuves, on suppose dans [SM-4] pour le cas $p > 1$ que la fonction u_0 à restaurer est la restriction à $\Omega \setminus A$ d'une fonction analytique U_0. Ceci permet de simplifier l'écriture des conditions de bord mais ne change pas fondamentalement le problème de minimisation. Il est possible en revanche sans trop de difficultés de supposer seulement que $u_0 \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^2 \setminus A)$ dans le cas $p = 1$. Nous résumons à présent la stratégie de minimisation que nous avons mise en œuvre dans [SM-4] car elle fait intervenir un résultat sur les martingales permettant d'assurer un contrôle uniforme de l'énergie d'un ensemble “dense” de courbes et, par voie de conséquence, d'obtenir de la compacité et la possibilité de définir un ensemble limite de courbes.

1.2 Existence d'une famille optimale de courbes interpolantes

On se donne d'abord comme mesure sur ∂A $\mu = |\nabla U_0| \mathcal{H}^1 \llcorner \partial A$, et on suppose que $\mu(\partial A) = 1$. Si γ est une famille de courbes interpolantes – on parle de *désoccultation* dans [SM-2] et de *complétion amodale* dans [SM-4] – et si $x \in \partial A$ est une jonction en T, on note $E(\gamma_x)$ l'énergie de la courbe issue de x. La preuve de l'existence d'une famille optimale de courbes interpolantes dans le cas $p > 1$ contient les étapes suivantes :

1. on se donne un découpage dyadique de $[0, 1]$ et, grâce à la mesure μ, on identifie de façon unique chaque intervalle $I_{N,k} = [k2^{-N}, (k+1)2^{-N}[$ de ce découpage à un arc de ∂A (préalablement muni d'une origine et d'une orientation) ;
2. on considère une suite minimisante $(\gamma^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ où chaque γ^ℓ est une collection de courbes complétant les lignes de niveau de u_0 interrompues par A ;
3. on définit, pour chaque N, la fonction f_ℓ^N constante par morceaux qui associe à chaque point de l'intervalle $I_{N,k}$ la moyenne des énergies de toutes les courbes γ_x^ℓ partant d'un point $x \in I_{N,k}$, pour tout k. Par extraction diagonale, on montre que f_ℓ^N converge presque partout quand $\ell \to \infty$ vers une limite f^N pour tout $N \in \mathbb{N}$.
4. on identifie sur chaque intervalle $I_{N,k}$ une jonction en T, notée x, telle que la suite de courbes $(\gamma_x^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée en norme $\mathrm{W}^{2,p}$ par la moyenne énergétique sur l'intervalle f_ℓ^N. Par compacité dans $\mathrm{W}^{2,p}$ et extraction diagonale,

on définit ainsi pour chaque $I_{N,k}$ une courbe limite $\gamma^{N,k}$ partant d'un point de $I_{N,k}$. Par construction, ces courbes limites ne se croisent pas. La difficulté est à présent de définir par densité une courbe limite pour toutes les autres jonctions en T, ce qui nécessite un contrôle en norme $\mathrm{W}^{2,p}$ des courbes $\gamma^{N,k}$ que l'on vient d'obtenir ;

5. on remarque que la suite (f^N) est une *martingale positive bornée* car

$$f^N(x) = 2^N \int_{I_{N,k} \ni x} f^{N+1}(y)dy \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f^N(x)dx \leq C,$$

d'où l'on déduit par le théorème de convergence des martingales de Doob qu'il existe $f \in \mathrm{L}^1([0,1])$ telle que f^N converge presque partout vers f quand $N \to \infty$;

6. étant donné une jonction en T quelconque $x \in \partial A$, on peut alors lui associer une courbe optimale : on détermine une suite d'intervalles $I_{N,k}$ emboîtés et contenant x et le résultat de martingale précédent permet d'extraire une suite de courbes $\gamma^{N,k}$ convergeant faiblement dans $\mathrm{W}^{2,p}$ vers une courbe limite partant de x. Par construction, les courbes limites ainsi construites ne se croisent pas.

On a ainsi démontré l'existence d'une complétion amodale optimale dans le cas $p > 1$.

Théorème 1.1 ([SM-4], théorème 2, section 4) *Pour tout $p > 1$, il existe au moins une complétion amodale qui minimise* (1.3)*.*

L'existence d'une complétion amodale optimale dans le cas $p = 1$, démontrée dans [SM-2], est plus simple. On remarque d'abord que $\int |\kappa| d\mathcal{H}^1$ correspond à la variation totale le long de la courbe de l'angle que fait la tangente avec, par exemple, l'axe des abscisses. Il en résulte qu'étant donné une courbe γ dans $\overline{A}$ qui relie deux jonctions $j_1, j_2 \in \partial A$ et une courbe γ_{pc} dans $\overline{A}$ de plus court chemin entre j_1 et j_2 alors nécessairement :

$$\int_{\gamma_{\mathrm{pc}}} (\alpha + \beta|\kappa|)d\mathcal{H}^1 + (\text{angles en } j_1 \text{ et } j_2) \leq \int_{\gamma} (\alpha + \beta|\kappa|)d\mathcal{H}^1 + (\text{angles en } j_1 \text{ et } j_2).$$

On en déduit les propriétés suivantes :

- étant donné deux points et deux directions en ces points, une courbe reliant les deux points dans $\overline{A}$ et minimisant $\int(\alpha + \beta|\kappa|)d\mathcal{H}^1$ + angles aux extrémités est nécessairement une ligne de plus court chemin ;
- étant donné deux paires de jonctions en T sur ∂A (j_1, j_2) et (j_3, j_4) telles que les arcs $\overset{\frown}{j_1 j_2}$ et $\overset{\frown}{j_3 j_4}$ soient disjoints ou emboîtés, les lignes de plus court chemin entre j_1 et j_2 d'une part, j_3 et j_4 d'autre part ne se croisent pas (mais peuvent se toucher tangentiellement) ;

- si par conséquent on remplace toutes les courbes d'une complétion amodale par des géodésiques dans $\overline{A}$, on obtient une autre complétion amodale d'énergie inférieure.

Partant d'une suite minimisante de complétions amodales (toujours sous l'hypothèse $p = 1$) on peut donc construire une nouvelle suite minimisante de complétions dont toutes les courbes sont des géodésiques de $\overline{A}$. On trouve alors une famille dénombrable de paires de jonctions en T reliées entre elles par une famille convergente de géodésiques. La complétion amodale limite s'obtient par densité des jonctions en T et par un résultat sur la convergence uniforme des géodésiques. On prouve ainsi le résultat suivant :

Théorème 1.2 ([SM-2], théorème 1) *Pour $p = 1$, il existe une complétion amodale qui minimise* (1.3).

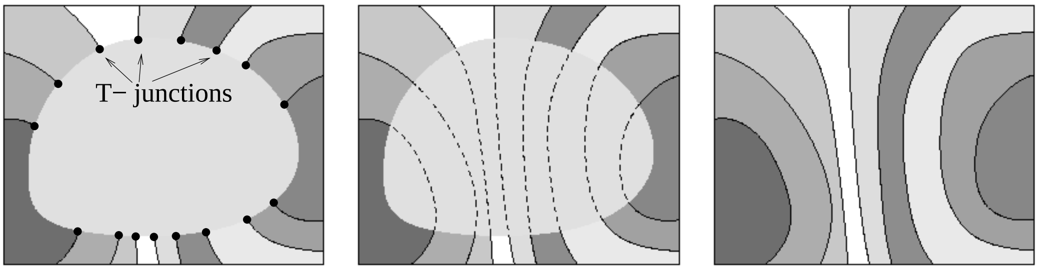


FIGURE 1.3: Construction d'une fonction à partir d'un ensemble de courbes d'interpolation

Le théorème 1, section 3 de [SM-4] montre ensuite comment construire de façon canonique une fonction u interpolant u_0 dans A. Il suffit d'extraire à chaque niveau les ensembles délimités par les courbes, de montrer qu'ils forment une famille emboîtée et d'en déduire la fonction u par une formule du type (1.2). La reconstruction est schématisée sur la figure 1.3. D'autres résultats sur les liens entre familles de courbes et fonctions associées sont démontrés dans [SM-4].

1.3 Un algorithme simple pour l'interpolation d'images

Venons-en à l'algorithme de minimisation de (1.3) que nous avons proposé avec Jean-Michel Morel dans [SM-1] pour le cas $p = 1$ (voir aussi [SM-2]). On sait, d'après ce qui précède, qu'une complétion amodale optimale est constituée de géodésiques. Or, dans le cadre discret d'une image numérique, le domaine manquant est polygonal et les géodésiques reliant deux points de sa frontière sont donc des lignes polygonales. Le fait qu'on interdise les croisements induit un principe de causalité sur l'ensemble des jonctions en T, à savoir que si l'on relie j_1 et j_2, on ne peut pas ensuite relier une jonction de l'arc orienté $\overset{\frown}{j_1 j_2}$ à une jonction de l'arc $\overset{\frown}{j_2 j_1}$. Ce principe de causalité est une différence cruciale avec le problème étudié par Nitzberg, Mumford et Shiota car il permet de réduire considérablement la complexité de la minimisation. Une recherche exhaustive (donc à coût exponentiel) peut être remplacée par un algorithme de programmation dynamique qui permet de calculer la solution *optimale* en un temps polynômial. L'algorithme, dans la cas $p = 1$, comprend ainsi les étapes suivantes :

1. on extrait les jonctions en T et on y estime la direction d'incidence des lignes de niveau ;

2. on détermine par programmation dynamique un ensemble optimal de courbes, que l'on trace ; chaque courbe est associée à un niveau inférieur et un niveau supérieur ;

3. on propage les valeurs des niveaux entre les courbes interpolées de façon à reconstruire l'unique image complète associée.

La figure 1.4 montre un résultat obtenu par cet algorithme et le compare à une méthode d'interpolation régulière. L'expérience présentée dans la figure 1.5 est un exemple extrême [2] montrant que cet algorithme très simple permet de reconstruire une image raisonnable à partir de très peu d'information (on a supprimé 87% de l'image dans le premier cas et 93% dans le second) et en n'utilisant que des lignes polygonales (des droites dans le cas d'un domaine convexe) sans croisement ! On notera la capacité de l'algorithme à reconstruire une information géométrique mais son incapacité, logique, à restaurer la texture.

Nous insistons sur le fait que cet algorithme détermine, dans le cadre discret, un minimiseur *global* de l'énergie fortement non linéaire (1.3) pour $p = 1$. En outre, le fait de compléter les lignes de niveau avant de reconstruire la fonction permet en premier lieu de très bien restaurer les discontinuités à la différence de ce que pourrait donner une méthode basée sur une discrétisation de l'équation d'Euler-Lagrange associée. C'est d'ailleurs ce qu'on observe dans les travaux qui ont porté sur la minimisation d'énergies dérivées de (1.3) dans le cas $p > 1$. Il n'existe à notre connaissance aucune méthode de minimisation globale pour ce type d'énergie et les approches qu'on trouve dans la littérature reposent plutôt sur des schémas numériques associés à un flot de minimisation locale, voir par exemple [18, 30, 31] et surtout [5] où l'utilisation d'un champ auxiliaire permet de se ramener à un système d'EDP d'ordre deux beaucoup plus facile à traiter que les schémas d'ordre 4 naturellement associés à l'énergie de l'elastica.

2. dans le cas d'une image couleur, on applique l'algorithme indépendamment à chaque composante dans une représentation robuste aux fausses couleurs, par exemple Lab ou YCrCb.

FIGURE 1.4: En haut, l'image originale occultée ; en bas à gauche, l'image restaurée par un opérateur régulier [16] ; en bas à droite, le résultat de l'algorithme présenté dans [SM-1] qui permet de restaurer les discontinuités.

1.4 De la complétion de courbes à l'interpolation de fonctions

Le méthode d'*inpainting* que nous avons présentée dans les deux sections précédentes a l'avantage de s'appuyer sur un modèle psychophysique de la vision humaine mais a l'inconvénient de déboucher sur une formulation mathématique compliquée à manipuler et difficilement généralisable aux dimensions supérieures. Or le problème de l'*inpainting* se pose tout autant pour des images volumétriques ou des films. Le travail que nous allons résumer maintenant, présenté dans [SM-3], a consisté précisément à étudier une

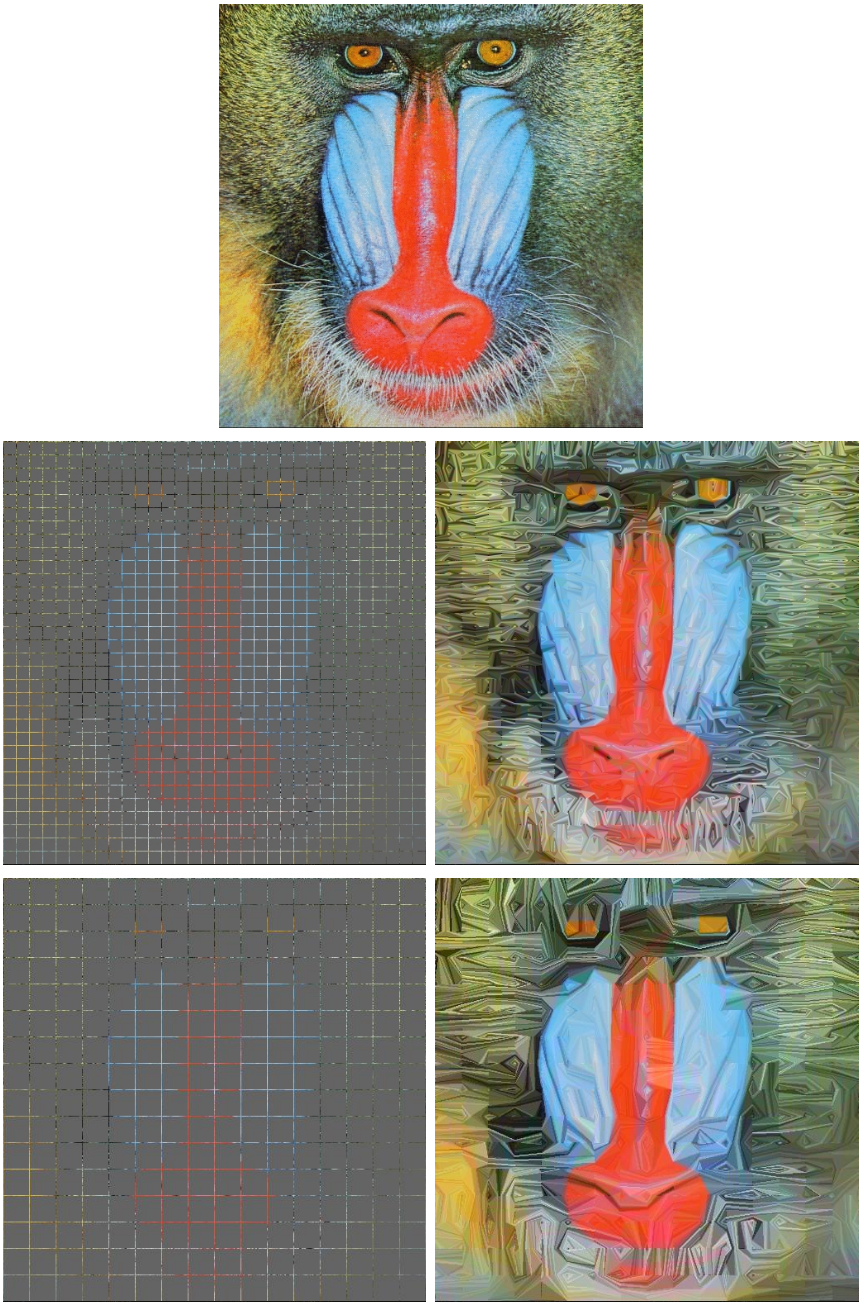


FIGURE 1.5: (En haut) : l'image originale. (Au milieu à gauche) : 87% des pixels de l'image ont été supprimés pour ne garder que les bords des carrés de taille 15×15 ; (Au milieu à droite) : le résultat de l'algorithme présenté dans [SM-1]. (En bas) : même expérience en supprimant des carrés de taille 31×31, c'est-à-dire 93% de l'image. Dans les deux cas, la géométrie a été bien restaurée mais la méthode n'est clairement pas adaptée au traitement de la texture. Il est à noter que notre cerveau devine le singe par complétion amodale dans l'image occultée du milieu. C'est en revanche plus difficile pour l'image occultée du bas en raison du manque d'information.

formulation à la fois plus exploitable d'un point de vue mathématique et facilement généralisable à la dimension N.

On rappelle d'abord que si u est une fonction régulière sur $\mathbb{R}^2$ et x un point tel que $|\nabla u(x)| \neq 0$ alors le vecteur de courbure au point x de la ligne de niveau $\gamma_{u(x)} = \{y : u(y) = u(x)\}$ vérifie

$$\kappa_{\gamma_{u(x)}}(x) = -\big(\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\big)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}(x)$$

et on a donc, par la formule de la coaire et pour tout ouvert $B \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\partial\{u\geq t\}\cap B}\Big(\alpha+\beta|\kappa_{\partial\{u\geq t\}}|^p\Big)d\mathcal{H}^1\,dt = \int_B |\nabla u|\Big(\alpha+\beta\Big|\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big|^p\Big)\,dx,$$

avec la convention pour le terme de droite que $|\nabla u|\Big|\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big|^p(x) = 0$ lorsque $|\nabla u|(x) = 0$.

Cette formule se généralise à la dimension N puisque le vecteur de courbure moyenne $H(x)$ au point x de l'hypersurface de niveau $\{y : u(y) = u(x)\}$ s'écrit également, si $|\nabla u(x)| > 0$,

$$H(x) = -\big(\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\big)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}(x),$$

et on a donc, à nouveau par la formule de la coaire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\partial\{u\geq t\}\cap B}\Big(\alpha+\beta|H_{\partial\{u\geq t\}}|^p\Big)d\mathcal{H}^{N-1}\,dt = \int_B |\nabla u|\Big(\alpha+\beta\Big|\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big|^p\Big)\,dx. \quad (1.4)$$

On peut ainsi passer d'une énergie calculée sur des courbes à une énergie calculée sur des fonctions et se mettre en situation d'appliquer les techniques classiques d'optimisation, ce que nous avons fait avec Luigi Ambrosio dans [SM-3] de la façon suivante : on se place dans $\mathbb{R}^N$ et on étend la fonctionnelle précédente à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ en définissant

$$F_p(u,B) = \begin{cases} \displaystyle\int_B |\nabla u|\Big(\alpha+\beta\Big|\operatorname{div}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\Big|^p\Big)\,dx & \text{si } u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^N) \\ +\infty & \text{si } u \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)\setminus \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

L'exemple de la figure 1.2 montre que la fonctionnelle F_p n'est pas semi-continue inférieurement : on a $F_p(u_\gamma,\mathbb{R}^2) = +\infty$ alors qu'on peut facilement, à l'aide de noyaux régularisants, construire une suite de fonctions régulières (u_n) qui convergent vers u_γ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^2)$ et vérifient $\sup_{n\in\mathbb{N}} F_p(u_n,\mathbb{R}^2) < +\infty$.

Par conséquent, si l'on décide de résoudre le problème de la complétion amodale par minimisation contrainte de F_p et que l'on se donne une suite minimisante de fonctions dont on parvient à extraire une suite convergente, on ne pourra pas conclure que la fonction limite est minimisante. Comme souvent dans une telle situation on a recours à la fonctionnelle relaxée, qui est ici définie pour toute fonction $u \in \mathrm{L}^1$ par (cf [22]) :

$$\overline{F}_p(u, B) = \inf\{\liminf_{n\to\infty} F_p(u_n, B),\ u_n \to u \text{ dans } \mathrm{L}^1\}$$

A la différence de F_p, sa relaxée est semi-continue inférieurement pour la convergence dans L^1 [22]. On a alors le résultat suivant, en dimension N, pour la reconstruction d'une fonction $u_0 \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^N \setminus \overline{A})$ qui fait intervenir un ensemble $\tilde{A} \supset A$ permettant de prendre en compte l'information valide dans une bande autour de A. Par la formule de la coaire, cela revient à interpoler les hypersurfaces de niveau de l'image.

Théorème 1.3 ([SM-3], théorème 5) *Soit $p \geq 1$. S'il existe un ouvert $\tilde{A}$ contenant strictement le domaine à interpoler A et une fonction $u \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $u = u_0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{A}$ et $\overline{F}_p(u, \tilde{A}) < +\infty$ alors le problème*

$$\mathrm{Min}\,\{\overline{F}_p(u, \tilde{A}) :\ u = u_0 \textit{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{A}\}$$

admet au moins une solution $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^2)$.

L'unicité n'est clairement pas vérifiée comme on le voit facilement en prenant une croix blanche sur fond noir dont on occulte la partie centrale : il y a deux façons, de même énergie minimale, de connecter entre elles les branches de la croix.

La démonstration du théorème précédent n'est pas très compliquée. Il suffit de prendre une suite minimisante, d'appliquer une inégalité de Poincaré généralisée pour obtenir un contrôle uniforme de la norme BV, d'extraire une sous-suite convergente grâce à la compacité relative de BV dans L^1 et de conclure en utilisant la semi-continuité inférieure de la relaxée $\overline{F}_p$.

On peut se poser naturellement la question de l'équivalence, en dimension 2, entre les courbes optimales obtenues grâce au théorème 1.1 qui découlent d'un modèle inspiré par la psychophysique, et les fonctions optimales obtenues par le théorème précédent. Nous y répondons partiellement dans le théorème 4 de [SM-4] ; nous avons recours pour cela à un tierce problème qui consiste à minimiser l'énergie

$$\mathcal{F}_p(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\partial^*\{u\geq t\}\cap\tilde{A}} \Big(\alpha + \beta|\kappa_{\partial^*\{u\geq t\}}|^p\Big) d\mathcal{H}^1\, dt$$

dans la classe $\mathcal{S}$ des fonctions $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^2)$ dont les frontières essentielles des lignes de niveau coïncident exactement sur $\tilde{A}$ avec des extensions de courbes de classe $\mathrm{W}^{2,p}$ joignant deux jonctions en T de ∂A. C'est la classe des fonctions naturellement associées aux familles de courbes réalisant une complétion amodale et le théorème 4 de [SM-4] établit l'équivalence de la minimisation de $\overline{\mathcal{F}}_p$ sur $\mathcal{S}$ avec la minimisation de l'énergie (1.3) dans la classe des familles de courbes interpolantes. La preuve repose sur la possibilité – un peu longue à établir – de passer d'une complétion amodale d'énergie finie γ à une complétion amodale γ_ϵ sans contact entre les courbes, à partir de laquelle on peut construire une fonction $u_\epsilon \in \mathcal{S}$ dont l'énergie $\mathcal{F}_p(u_\epsilon)$ est arbitrairement proche de l'énergie $E(\gamma)$ de la complétion amodale initiale (Lemmes 6 et 7, [SM-4]).

On ne sait pas en revanche si ces deux minimisations équivalent à celle du théorème 1.3 car il faudrait pour cela établir que $\mathcal{F}_p(u) = \overline{F_p}(u)$ pour tout $u \in \mathcal{S}$. Une inégalité est très simple à démontrer mais l'égalité n'est pour l'instant connue que dans le cas régulier, comme corollaire de la relation $\overline{F}_p(u) = F_p(u)$ qui est vraie pour toute fonction $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^N)$ ainsi que nous allons le voir dans la section suivante.

1.5 Localité de la courbure moyenne pour les varifolds entiers

1.5.1 Cas des hypersurfaces et application à la complétion amodale

Nous avons dû dans [SM-3] introduire la relaxée $\overline{F}_p$ de F_p pour nous ramener à un problème de minimisation bien posé. Quel lien peut-on faire entre $\overline{F}_p$ et F_p ? En particulier, les deux fonctionnelles coïncident-elles pour les fonctions régulières ? Comme $\overline{F}_p$ est la plus grande fonctionnelle minorant F_p et semi-continue inférieurement (pour la convergence L^1), il suffit d'établir que F_p est semi-continue inférieurement (pour la convergence L^1) dans la classe des fonctions régulières pour prouver que F_p et $\overline{F}_p$ coïncident sur les fonctions régulières.

La formule de la coaire permet de réduire le problème aux ensembles et la question que l'on se pose est donc : étant donné un ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ à bord régulier que l'on approche au sens de la mesure par une suite d'ensembles (E_n) à bords réguliers, a-t-on toujours

$$\int_{\partial E} (1 + |H_{\partial E}|^p) d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\partial E_n} (1 + |H_{\partial E_n}|^p) d\mathcal{H}^{N-1} \quad ? \tag{1.5}$$

En dimension 2, le résultat a été démontré par Bellettini, Dal Maso et Paolini [6] en utilisant la semi-continuité inférieure de la norme $\mathrm{W}^{2,p}$. Le problème est plus délicat en dimension supérieure. Il faut en effet considérer les situations où différentes parties de ∂E_n vont s'accumuler par strates quand $n \to \infty$. Peut-il y avoir des phénomènes de compensation de courbure à la limite de sorte que la courbure classique de ∂E serait plus grande que la courbure accumulée ? Il existe un outil permettant d'envisager ces phénomènes d'accumulation : les *varifolds*, initialement introduits par Almgren [3] et Allard [1] pour l'étude des points critiques de la fonctionnelle d'aire et dont on trouvera une description exhaustive dans [58].

Nous nous intéressons en particulier aux varifolds entiers, qui sont des mesures de Radon définies à partir d'un ensemble k-rectifiable $M \subset \mathbb{R}^N$, de son espace tangent en chaque point et d'une fonction de multiplicité θ à valeurs entières permettant en quelque sorte de compter le nombre de strates accumulées en chaque point. On peut par exemple naturellement associer un varifold à l'union des courbes γ_1 et γ_2 de la figure 1.2 avec une multiplicité valant 2 sur l'intersection des courbes et 1 sur les branches disjointes.

Le varifold V associé à un ensemble k-rectifiable M et une fonction de multiplicité θ est noté $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ et on lui adjoint une mesure sur $\mathbb{R}^N$ – la mesure poids – définie par $\|V\| = \theta \mathcal{H}^k \llcorner M$.

La variation première δV d'un varifold $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ est son taux de variation infinitésimal quand on perturbe très légèrement M. On peut lui associer, par le théorème de Riesz, une mesure de Radon $\nu \|\delta V\|$ où ν est la normale généralisée. La courbure moyenne généralisée de V en $x \in M$ est alors définie par une dérivée de Radon-Nikodym :

$$H_M(x) = \nu(x) \frac{\|\delta V\|}{\|V\|}(x) = \nu(x) \lim_{r \downarrow 0} \frac{\|\delta V\|(B_r(x))}{\|V\|(B_r(x))}.$$

Il s'agit d'une définition *variationnelle* de la courbure moyenne en opposition à la définition *ponctuelle* de la courbure moyenne classique. Néanmoins, le théorème de la divergence dans le cas classique permet d'établir que si M est une k-surface régulière et θ une fonction constante alors la courbure moyenne généralisée du varifold $\mathbf{v}(M, \theta)$ coïncide avec la courbure moyenne classique sur M.

Pour revenir au problème (1.5), il s'agit de comprendre les conséquences de cette définition variationnelle de la courbure moyenne. La vraie difficulté provient de la fonction de multiplicité qui, lorsqu'elle varie, peut contribuer à la courbure d'une façon difficile à contrôler. Reprenons l'exemple des bords d'ensembles ∂E_n qui s'accumulent. Ils vont tendre vers un varifold limite contenant ∂E. Quel lien y a-t-il entre la courbure moyenne généralisée du varifold limite et la courbure moyenne de ∂E ? On est ainsi ramené à la question de la *localité* de la courbure moyenne généralisée des varifolds :

> *Étant donné deux k-varifolds entiers dont la courbure moyenne est dans L^p relativement à leurs mesures poids respectives et qui coïncident sur un ensemble de mesure $\mathcal{H}^k$ positive, admettent-ils la même courbure moyenne généralisée sur cet ensemble ?*

L'hypothèse que la courbure est dans L^p implique par convention que le varifold est sans bord. Nous avons démontré avec Luigi Ambrosio dans [SM-3] le résultat suivant, valable pour les $(N-1)$-varifolds dans $\mathbb{R}^N$:

Théorème 1.4 ([SM-3], théorème 2) *Soient $V_1 = \mathbf{v}(M_1, \theta_{V_1})$ et $V_2 = \mathbf{v}(M_2, \theta_{V_2})$ deux $(N-1)$ varifolds entiers dans $\mathbb{R}^N$. Si $H_{V_i} \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\|V_i\|)$, $i = 1, 2$, pour $p > N-1$,*

$p \geq 2$ alors

$$H_{V_1}(x) = H_{V_2}(x)$$

pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \in M_1 \cap M_2$.

La preuve repose d'abord sur un résultat de Brakke [13] montrant que la courbure moyenne d'un varifold entier est orthogonale au plan tangent. Des exemples simples prouvent que cette propriété peut être fausse pour un varifold rectifiable quelconque, c'est-à-dire sans l'hypothèse que la multiplicité est à valeurs entières.

On remarque ensuite que la courbure moyenne correspond à des variations locales de l'espace tangent – c'est classique dans le cas régulier et, dans le cas des varifolds, c'est une conséquence de la représentation de la variation première à l'aide de la courbure. Comme les plans tangents coïncident presque partout sur $M_1 \cap M_2$, un éventuel écart entre la courbure de M_1 et celle de M_2 ne peut venir que de la contribution de $M_1 \Delta M_2$. Examinons les variations de l'espace tangent sur $M_1 \Delta M_2$

Considérons un point x de densité 1 pour $M_1 \cap M_2$; la densité de $M_1 \Delta M_2$ y est donc nulle. La moyenne sur une boule de l'écart entre l'espace tangent de chaque point de $A = M_1 \Delta M_2$ et l'espace tangent en x s'écrit, pour $i = 1, 2$,

$$r^{-N} \int_{B_r^N(x) \cap A} \|T_y V_i - T\| \, d\|V_i\|(y) \leq \left(r^{1-N} \|V_i\|(B_r^N(x) \cap A) \right)^{\frac{1}{2}} \left(r^{-1-N} \int_{B_r^N(x) \cap A} ||T_y V_i - T||^2 d\|V_i\|(y) \right)^{\frac{1}{2}},$$

Le terme $\left(r^{1-N} \|V_i\|(B_r^N(x) \cap A) \right)^{\frac{1}{2}}$ tend vers 0 puisque $M_1 \Delta M_2$ est de densité nulle en x. Concernant le second terme, on a recours dans [SM-3] à un résultat de R. Schätzle [55] montrant que, sous les hypothèses $p > N - 1$ et $p \geq 2$, il y a décroissance quadratique du *tilt-excess*, c'est-à-dire

$$r^{-1-N} \int_{B_r^N(x)} ||T_y V_i - T||^2 d\|V_i\|(y) = O(r^2). \tag{1.6}$$

On en déduit la convergence vers 0 de $r^{-N} \int_{B_r^N(x) \cap A} ||T_y V_i - T|| d\|V_i\|(y)$ ce qui implique que $M_1 \Delta M_2$ ne contribue pas à la courbure et on a ainsi démontré le résultat de localité. Cette démonstration amène deux remarques :

1) La décroissance quadratique du tilt-excess est prouvée par R. Schätzle dans [55] à l'aide d'estimations fortes portant sur des équations elliptiques totalement non linéaires et valables sous des hypothèses contraignantes d'intégrabilité de la courbure ($p > N - 1$, $p \geq 2$). Ce résultat a été récemment amélioré et généralisé par R. Schätzle lui-même [56]

sous la forme suivante : *si V est un k-varifold à support* C^2*-rectifiable et tel que* $H_V \in \mathrm{L}^2(\|V\|)$ *alors son tilt-excess décroît quadratiquement.* La condition d'intégrabilité est beaucoup plus faible mais on doit supposer la C^2-rectifiabilité du support qui garantit un comportement pas trop oscillant.

Il s'ensuit une version plus générale de la localité : *Si V_1 et V_2 sont deux k-varifolds (et plus seulement des $(N-1)$-varifolds) tels que $H_{V_i} \in \mathrm{L}^2(\|V_i\|)$ et si l'intersection de leurs supports est* C^2*-rectifiable alors $H_{V_1}(x) = H_{V_2}(x)$ $\mathcal{H}^k$–presque partout sur l'intersection.*

2) La décroissance quadratique du tilt-excess est bien plus forte que ce dont nous avons besoin puisque l'intégrale dans (1.6) porte sur *tout le support* inclus dans la boule alors que nous avons seulement besoin de contrôler $B_r(x) \cap A$. Il est donc légitime d'espérer que le résultat de localité puisse être affiné comme nous le verrons à la section suivante.

Revenons au problème de départ, à savoir la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle $\int_{\partial E}(1+|H_{\partial E}|^p)d\mathcal{H}^{N-1}$ pour la convergence L^1 dans la classe des ensembles à bords réguliers. La propriété de localité démontrée dans [SM-3] permet de conclure lorsque $p > N-1$ et $p \geq 2$ avec l'argument suivant : on considère une suite (E_n) d'ensembles convergeant vers E au sens de la mesure et on définit les varifolds $V_n = \mathbf{v}(\partial E_n, 1)$. On montre que cette suite de varifolds est à variation première uniformément bornée et un théorème d'Allard [1, 58] permet de conclure à l'existence d'une sous-suite qui converge, au sens des varifolds, vers un $(N-1)$-varifold limite $V_M = \mathbf{v}(M, \theta_M)$ tel que $\theta_M \geq 1$ sur M et θ_M est *à valeurs entières.* Par un résultat de stabilité de la continuité absolue des mesures, on en déduit que pour tout $p > 1$,

$$\int_M (1+|H_{V_M}|^p)\theta_M d\mathcal{H}^k \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\partial E_n}(1+|H_{\partial E_n}|^p)d\mathcal{H}^{N-1}$$

Il est ensuite facile d'établir que $\partial E \subset M$ et, si $p > N-1$ et $p \geq 2$, le résultat de localité induit que la courbure classique de ∂E coïncide avec H_{V_M} presque partout sur ∂E. Comme en outre $\theta_M \geq 1$ on a $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial E \leq \|V_M\|$ d'où

$$\int_{\partial E}(1+|H_{\partial E}|^p)d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_M (1+|H_{V_M}|^p)\theta_M d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\partial E_n}(1+|H_{\partial E_n}|^p)d\mathcal{H}^{N-1}$$

et on aboutit au résultat démontré avec L. Ambrosio dans [SM-3] :

Théorème 1.5 ([SM-3], théorème 4) *Soit (E_n) une suite d'ensembles bornés à bord réguliers convergeant au sens de la mesure vers un ensemble E à bord régulier. Si $p > N-1$ et $p \geq 2$ alors*

$$\int_{\partial E}(1+|H_{\partial E}|^p)d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\partial E_n}(1+|H_{\partial E_n}|^p)d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Le résultat plus fin de localité obtenu plus tard par R. Schätzle dans [56] permet de montrer un résultat beaucoup plus général, à savoir la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle de Willmore pour les k-courants entiers dans $\mathbb{R}^N$ sous l'hypothèse que le support du courant limite est C^2-rectifiable et que la courbure moyenne est de carré intégrable (théorème 5.1 dans [56]). On entend ici par fonctionnelle de Willmore associée à un k-varifold rectifiable $V = \mathbf{v}(M, \theta_M)$ la quantité

$$\int_M (1 + |H_V|^2)\theta_M d\mathcal{H}^k$$

ou, plus généralement,

$$\int_M (1 + |H_V|^p)\theta_M d\mathcal{H}^k,$$

et le résultat de semi-continuité de Schätzle est alors valable pour $p \geq 2$ sous la contrainte que le support limite soit C^2 rectifiable. On notera que c'est à partir de cette propriété de semi-continuité pour le cas $p = 2$ que Röger et Schätzle ont pu démontrer une version modifiée d'une conjecture de De Giorgi sur la Γ-convergence d'une famille de fonctionnelles régulières vers une fonctionnelle limite faisant apparaître l'énergie de Willmore [54].

En revenant au problème de la complétion amodale, on obtient facilement le résultat suivant, initialement prouvé pour $p > N - 1$ mais que les résultats récents de Schätzle permettent d'étendre à $p \geq 2$.

Théorème 1.6 ([SM-3], thm. 6 étendu au cas p ≥ 2 par [56], thm. 5.1)
Soit B un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $p \geq 2$, $F_p(\cdot, B)$ est semi-continue inférieurement pour la convergence L^1 dans $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^N)$. En conséquence, pour tout $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^N)$,

$$F_p(u, B) = \overline{F}_p(u, B).$$

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'observer que si u_n tend vers u dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ alors, par la formule de Cavalieri, il existe une sous-suite $(h(n))$ telle que pour presque tout niveau $\mathbb{1}_{\{u_{h(n)} \geq t\}}$ converge vers $\mathbb{1}_{\{u \geq t\}}$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On utilise alors la semi-continuité de la fonctionnelle de Willmore pour $p \geq 2$ et on conclut avec le lemme de Fatou.

On a ainsi montré une relation forte entre la fonctionnelle initiale du problème d'*inpainting* et sa fonctionnelle relaxée utilisée pour se ramener à un problème de minimisation bien posé.

1.5.2 Localité dans un cas plus général

Nous avons vu dans la section précédente que le contrôle du tilt-excess utilisé pour démontrer la localité de la courbure n'était pas une technique optimale pour parvenir au résultat dans la mesure où elle fait intervenir le support entier du varifold alors que seule une petite partie est véritablement concernée. En collaboration avec Gian Paolo Leonardi, nous avons utilisé dans [SM-5] d'autres techniques pour affiner le résultat afin de parvenir au cas limite $p = 1$.

Nous avons en particulier démontré un résultat optimal pour les 1-varifolds dans $\mathbb{R}^N$:

Théorème 1.7 ([SM-5], théorème 2.1) *Si V_1 et V_2 sont deux 1-varifolds entiers de $\mathbb{R}^N$ à courbure dans L^1 alors leurs courbures coïncident sur l'intersection de leurs supports.*

La preuve de ce résultat repose essentiellement sur la formule de la coaire appliquée à la fonction distance. Elle permet d'établir que si $A = M_1 \Delta M_2$ est la différence symmétrique des supports de V_1 et V_2 et x est un point de densité 1 pour $M_1 \cap M_2$ alors 0 est un point de densité 1 pour l'ensemble des rayons r tels que $\partial B_r(x)$ ne rencontre pas A. C'est un résultat assez logique : si au contraire $\partial B_r(x)$ intersectait trop souvent A, celui-ci ne pourrait pas être de densité 0 en x. Par la même technique, on démontre que les traces des multiplicités de V_1 et V_2 sont les mêmes sur $M_1 \cap M_2 \cap \partial B_r(x)$ pour un ensemble de rayons de densité 1 en 0. On peut alors montrer que $M_1 \Delta M_2$ ne contribue pas à la courbure en x.

La situation n'est pas aussi claire pour les k-varifolds avec $k > 1$ car la trace de $M_1 \Delta M_2$ sur les sphères n'est plus nécessairement vide pour un ensemble important de rayons. Il se produit en revanche un phénomène de compensation des conormales à $M_1 \Delta M_2$ sur les sphères dont on peut tirer des conséquences pour la courbure moyenne grâce au résultat suivant, qui relie la contribution de la courbure moyenne dans toute une boule à la contribution des conormales sur le bord de la boule et que l'on démontre par la formule de la coaire :

Proposition 1.8 ([SM-5], proposition 3.2) *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $V = \mathbf{v}(M, \theta)$ un k-varifold rectifiable de $\mathbb{R}^N$ à variation localement bornée. Soit $\sigma = \theta\,\mathcal{H}^{k-1} \llcorner M$ et η la conormale intérieure à $M \cap B_r(x)$ sur $M \cap \partial B_r(x)$. Si $\|\delta V\|_s$ désigne la partie singulière de $\|\delta V\|$ par rapport à $\|V\|$ on a, pour presque tout rayon r,*

$$\left| \int_{B_r(x)} H \, d\|V\| + \int_{\partial B_r(x)} \eta \, d\sigma \right| \leq \|\delta V\|_s(B_r(x)).$$

En particulier, si V n'a pas de bord, alors

$$\int_{B_r(x)} H \, d\|V\| = - \int_{\partial B_r(x)} \eta \, d\sigma,$$

pour presque tout rayon r.

On peut alors en déduire le résultat suivant :

Théorème 1.9 ([SM-5], théorème 3.4) *Si deux k-varifolds rectifiables V_1 et V_2 sont à variation première localement bornée et s'il existe A tel que*

1. $M_1 \cap A \subset M_2$,
2. $\theta_1(x)$ *et* $\theta_2(x)$ *sont* $\mathcal{H}^k$*-p.p. constants sur* $M_1 \cap A$,

alors $H_1(x) = H_2(x)$ $\mathcal{H}^k$*–presque partout sur* M_1.

Ce résultat n'est bien sûr pas optimal car les hypothèses d'inclusion des supports et de constance des multiplicités sur l'intersection sont très fortes. Ce n'est cependant pas un résultat banal car la multiplicité de V_2 en dehors de M_1 peut varier et c'est un résultat nouveau par rapport à celui de Schätzle puisque nous supposons seulement l'intégrabilité L^1 de la courbure.

La preuve fait intervenir le varifold à bord $\widetilde{V}_2 = \mathbf{v}(M_2 \setminus M_1, \theta_2)$ et comporte les étapes suivantes :

1. on utilise une inégalité isopérimétrique due à Allard [1] pour démontrer que la fonction croissante $g(r) = \|\widetilde{V}_2\|(B_r)$ vérifie pour presque tout r
$$g(r)^{\frac{k-1}{k}} \;\leq\; C\left(\|\delta\widetilde{V}_2\|(B_r) + g'(r)\right)$$
On déduit de cette inégalité que pour une suite de rayons r_n on a $g'(r_n) = \circ(r_n^k)$ alors qu'on n'avait a priori que $O(r_n^k)$. On obtient ainsi un contrôle en $\circ(r^k)$, pour une suite appropriée de rayons, de la moyenne des conormales à $\widetilde{V}_2$ sur les sphères associées ;
2. on applique alors la proposition 1.8 ci-dessus qui permet de conclure que la contribution de $\widetilde{V}_2$ à la courbure en presque tout point de M_1 est nulle, d'où la localité.

L'hypothèse de constance des multiplicités sur M_1 permet, au cours de la preuve, de passer du varifold $\mathbf{v}(M_1, \theta_2)$ au varifold $\mathbf{v}(M_1, \theta_1)$ et de comparer leurs courbures. Nous ne savons pas si une preuve similaire est possible en s'affranchissant de l'hypothèse de constance. Une voie possible serait de démontrer des propriétés fines de moyenne des dérivées successives de la fonction distance au support du varifold, qui joue un rôle essentiel dans la plupart des preuves de [SM-5].

Épilogue : alors que ce mémoire était presque achevé, en septembre 2008, Ulrich Menne nous a communiqué l'article [45] qu'il venait de terminer où est résolu le problème de la localité. Dans ce travail très intéressant, il démontre par des techniques sophistiquées d'approximation que tout k-varifold entier V à courbure moyenne dans L^1 est C^2-rectifiable et vérifie la propriété de localité, au sens où sa courbure moyenne coïncide avec la courbure moyenne classique d'une k-variété quelconque M de classe C^2, en $\|V\|$-presque tout $x \in M$.

1.6 Une méthode mixte pour la reconstruction de la texture et de la géométrie

Nous décrivons dans ce paragraphe les travaux présentés dans l'article [SM-6] en collaboration avec Frédéric Cao, Yann Gousseau et Patrick Pérez. Nous avons mentionné en introduction du chapitre 1 deux méthodes, décrites respectivement dans [SM-1] et [10], qui furent parmi les premières contributions non linéaires au problème de l'*inpainting* faisant intervenir un modèle variationnel ou basé sur une EDP. On trouvera dans [SM-6] une revue détaillée des différentes méthodes qui ont été proposées depuis une dizaine d'années dans cette catégorie. Les plus performantes en termes de qualité des résultats – dans la classe des méthodes d'*inpainting* faisant intervenir une EDP – sont probablement [12] et [60], la première ayant l'avantage de la rapidité car basée sur une méthode de *fast marching*. On trouvera également dans [SM-6] une revue des méthodes harmoniques où la reconstruction de l'image repose sur une optimisation des coefficients de la décomposition dans une base adaptée, à l'instar de [29] où des ondelettes anisotropes, les *curvelets*, sont utilisées pour décrire la géométrie et une base de cosinus permet de représenter la texture.

Une troisième classe de méthodes est apparue à la fin des années 90 dans le contexte de la synthèse de texture. Au contraire des méthodes pas toujours efficaces d'apprentissage statistique utilisées jusqu'alors, ces nouveaux algorithmes très simples exploitent parfaitement les propriétés de localité et de stationnarité d'une texture. Ils peuvent être rapides et donnent souvent de très bons résultats. L'idée de base pour effectuer une synthèse est immédiatement adaptable au problème de l'*inpainting* et nous la décrirons dans ce cadre : il s'agit de remplir progressivement le domaine manquant en recopiant simplement des échantillons extraits de la partie connue de l'image. En pratique, l'algorithme de base [28, 64] à partir duquel de très nombreuses variantes ont été proposées part d'un pixel x du bord du domaine manquant et considère un carré $C(x)$ centré en x – on parle de *patch* ou d'échantillon – qui intersecte donc à la fois la partie connue et la partie inconnue de l'image. L'algorithme recherche ensuite parmi tous les carrés entièrement inclus dans la partie valide ceux qui minimisent l'écart quadratique avec $C(x)$, ou du moins avec sa partie valide. On tire aléatoirement un carré minimiseur $C(y)$ et soit on attribue simplement au pixel x la valeur du pixel y, soit – et c'est la meilleure solution, de surcroît plus rapide à calculer – on remplace *tous* les pixels inconnus de $C(x)$ par leurs équivalents dans $C(y)$ (voir figure 1.6). Le processus est itéré sur les points inconnus restants jusqu'à ce que le domaine soit rempli. On a illustré sur les figures 1.7 et 1.8 un exemple de résultat qu'on peut ainsi obtenir sur une image couleur, en utilisant comme distance entre échantillons la somme des écarts quadratiques sur les trois composantes couleur dans une représentation RGB (mais on peut tout aussi bien utiliser une autre représentation couleur et une norme associée).

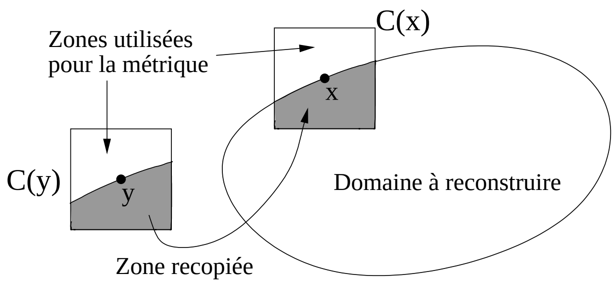


FIGURE 1.6: Illustration d'une méthode de "copier-coller" : on commence par déterminer un échantillon $C(y)$ proche en norme L^2 de l'échantillon $C(x)$ (ou plus exactement de sa partie valide), puis on recopie intégralement dans la partie inconnue de $C(x)$ son équivalent dans $C(y)$.

Ces méthodes – qu'on peut désigner sous le terme générique de *méthodes de "copier-coller"* et dont on trouvera dans [SM-6] une liste des contributions marquantes et un aperçu des variantes possibles – donnent souvent des résultats stupéfiants car, outre la texture, elles permettent également une bonne reconstruction de la géométrie locale. Les reconstructions erronées, quand elles se produisent, peuvent être dues à un manque d'information valide, à une mauvaise adaptation de la taille des échantillons à l'échelle de la texture, à la recopie d'un échantillon visuellement aberrant (mais optimal pour la métrique...) ou à l'utilisation d'une taille d'échantillon trop grande qui induit des effets de blocs – c'est-à-dire des discontinuités visibles entre blocs. On peut néanmoins affirmer que les résultats obtenus sont globalement très bons et souvent – notamment pour la reconstruction de grands domaines – nettement supérieurs à ce que l'on peut obtenir avec des méthodes harmoniques ou basées sur des EDP.

Le principe des méthodes de "copier-coller" est donc de mettre bout à bout des échantillons extraits de la partie valide de l'image. C'est à la fois un avantage, car on va reconstituer une information plausible au regard du voisinage, et un inconvénient puisque l'algorithme a des capacités très limitées de création de nouvelle information même si l'utilisation de rotations ou de changements d'échelle permet d'enrichir le dictionnaire des échantillons. En conséquence, les méthodes de "copier-coller" échouent en général à restituer une information géométrique à grande échelle qui ne soit pas de type texture, tels les longs contours.

Plusieurs adaptations ont été proposées pour remédier à ce défaut, qui consistent souvent à d'abord restituer une information géométrique puis à l'utiliser pour guider la synthèse de texture [26, 38, 59] ou à procéder à une décomposition préalable de l'image en une partie géométrique et une partie texture [46, 62] suivie de la reconstruction indépendante des deux composantes avec des méthodes adaptées [11].

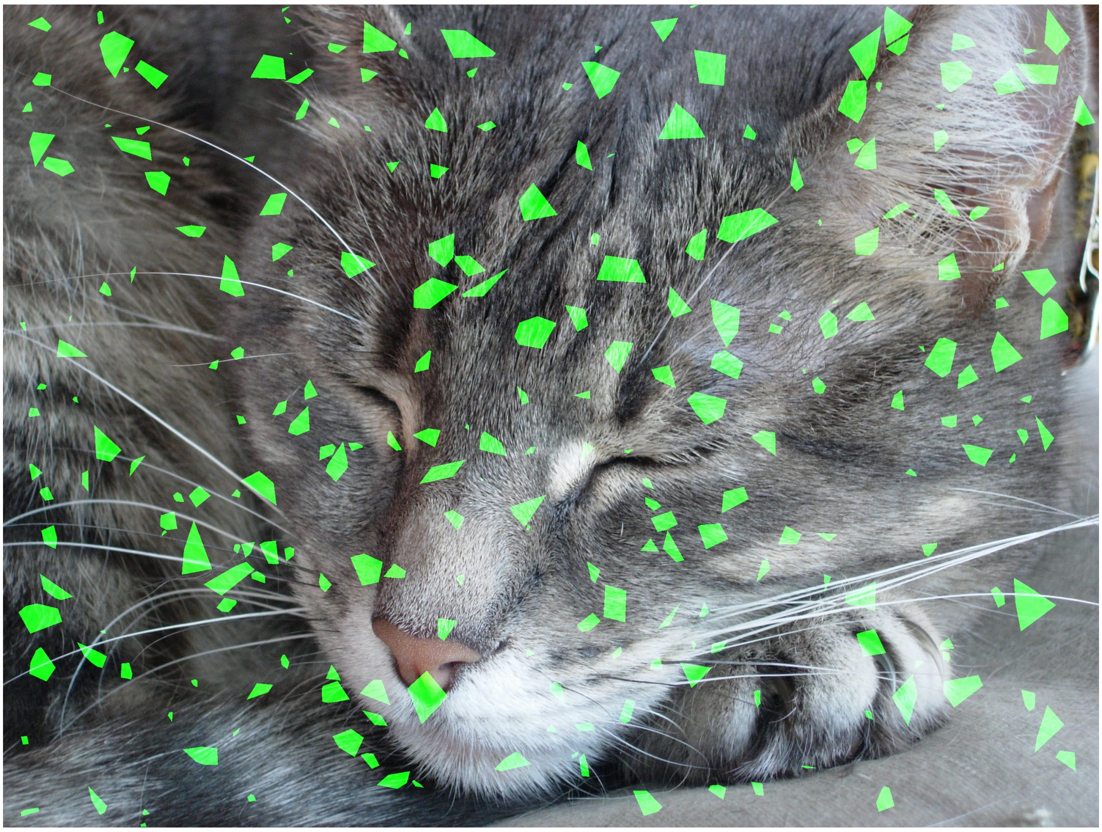


FIGURE 1.7: Une image occultée. Les domaines sont semi-opaques uniquement pour la visualisation et seule l'information extérieure est utilisée pour la reconstruction.

La méthode que nous avons développée avec F. Cao, Y. Gousseau et P. Pérez dans [SM-6] s'inscrit dans une démarche de guidage géométrique de la synthèse de texture. On peut de ce point de vue la considérer comme une extension à la géométrie non locale de l'algorithme proposé dans [21] où la géométrie locale influe sur l'ordre de remplissage des points. Notre approche pour restaurer une partie manquante dans une image comporte les étapes suivantes :

1) On extrait de l'image originale – ou de sa composante de luminance dans le cas des images en couleur – les lignes de niveau le long desquelles le contraste est le plus fort. Le choix du seuil de contraste est déterminé automatiquement à partir de la distribution des contrastes dans l'image à l'aide d'une méthode *a contrario* [25] qui repose sur le principe d'Helmholtz : un contraste le long d'une ligne de niveau est significatif s'il a une probabilité très faible d'apparaître le long des lignes de niveau d'une image de bruit blanc ;

2) On détermine une version simplifiée de l'image originale – une *esquisse* – en inter-

Figure 1.8: L'image restaurée par la méthode présentée dans [53].

polant par les valeurs moyennes entre les lignes de niveau extraites à l'étape précédente. L'image ainsi obtenue est essentiellement géométrique ;

3) On reconstruit l'esquisse géométrique dans la partie manquante par une méthode de complétion amodale inspirée de [SM-1], [SM-2]. Il y a cependant une différence notable car nous utilisons comme courbes d'interpolation non pas des lignes droites comme dans [SM-1], [SM-2] mais des *spirales d'Euler*. Il s'agit de courbes le long desquelles la courbure est une fonction affine de l'abscisse curviligne. Leurs bonnes propriétés de régularité expliquent qu'elles soient beaucoup utilisées en architecture, pour le tracé de routes ou en typographie. On les retrouve également dans des modèles de complétion de contours en vision par ordinateur [41]. Il est intéressant de remarquer qu'elles sont solutions de la linéarisée de l'équation d'Euler-Lagrange associée à l'énergie de l'elastica. Nous utilisons pour les calculer la méthode d'approximation développée dans [20].

Une autre différence notable avec [SM-1], [SM-2] est que nous autorisons les croisements des courbes interpolantes. Pour cela, chaque ensemble de niveau est traité séparément et une méthode d'union/intersection d'ensembles permet de gérer les croisements entre courbes d'un même niveau. L'esquisse interpolée est ensuite obtenue en sommant les fonctions caractéristiques des ensembles reconstruits, dans l'esprit de la formule suivante, valable pour une fonction positive : $u(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{u \geq t\}}(x) dt$.

La figure 1.9 montre l'application à une image d'Uranus partiellement occultée de la méthode d'*inpainting* par spirales d'Euler que nous proposons dans [SM-6]. Un autre exemple faisant intervenir une esquisse géométrique est présenté figure 1.10.

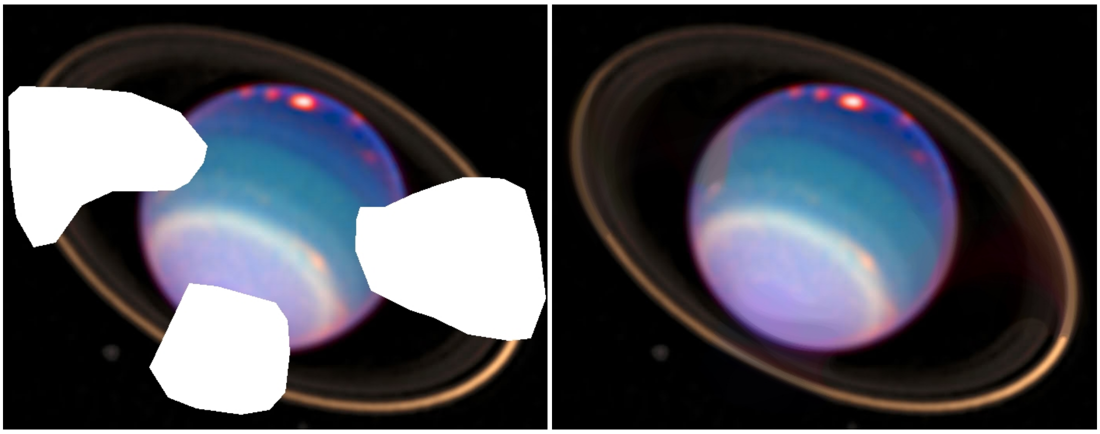


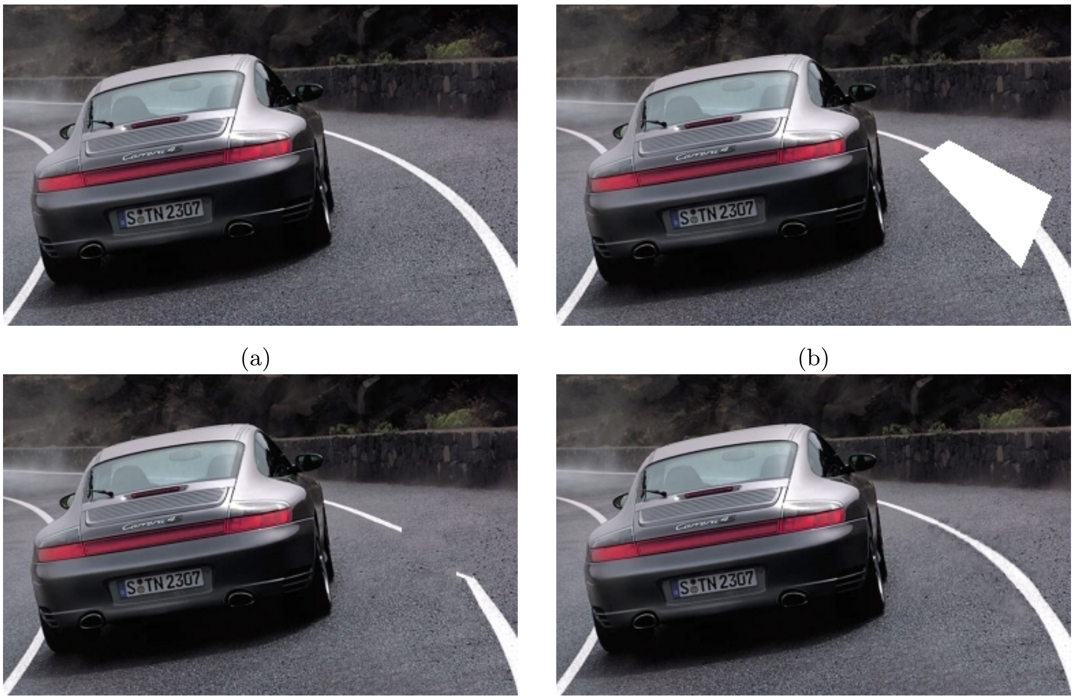
FIGURE 1.9: A gauche, Uranus en lumière infrarouge (© STScl/NASA) avec occultations artificielles. A droite, après reconstruction avec des spirales d'Euler de chaque canal dans le système colorimétrique YUV à l'aide de la méthode proposée dans [SM-6].

FIGURE 1.10: Une esquisse géométrique et sa reconstruction avec des spirales d'Euler d'après [SM-6].

4) Parmi l'ensemble des méthodes de "copier-coller", nous avons retenu celle exposée dans [53] qui, pour la métrique entre échantillons, fait intervenir des couronnes distinctes des carrés utilisés pour la recopie. Ceci accroît la rapidité et diminue les risques d'effets de blocs. Le guidage géométrique que nous proposons dans [SM-6] consiste en une pénalisation de la métrique de synthèse : la distance entre deux échantillons est désormais

une combinaison linéaire entre la distance quadratique (sur une couronne) de leurs valeurs connues dans l’image de départ et la distance quadratique (sur un carré entier) de leurs valeurs dans l’esquisse géométrique interpolée. Les résultats que nous obtenons sont conformes à ce qu’on attendait : le guidage permet de forcer la reconstruction d’une géométrie non locale.

Les expériences des figures 1.11 et 1.12 montrent l’influence de cette reconstruction géométrique sur l’algorithme général d’*inpainting* proposé dans [SM-6] et notamment sur sa capacité à restaurer une géométrie non locale, par exemple ici des longs contours.



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 1.11: (a) image originale ; (b) avec occultation ; (c) image restaurée d’après [53] ; (d) image restaurée avec guidage géométrique par spirales d’Euler d’après [SM-6].

1.7 Un modèle variationnel pour les méthodes de “copier-coller”

Les méthodes de “copier-coller” que nous avons introduites à la section précédente ont été à l’origine mises au point pour la synthèse de texture et uniquement sous forme algorithmique. Un travail très intéressant de Bickel et Levina [44] utilisant des techniques probabilistes a montré que lorsqu’on part d’un champ aléatoire défini sur un domaine

(a) (b) (c) (d)

FIGURE 1.12: (a) image originale ; (b) avec occultation ; (c) image restaurée d'après [53] ; (d) image restaurée avec guidage géométrique par spirales d'Euler d'après [SM-6].

borné du plan et qu'on l'étend progressivement par "copier-coller" d'échantillons de taille $r \times r$ à l'espace tout entier, alors la fonction de distribution jointe des pixels dans une fenêtre de taille $r \times r$ converge vers la distribution jointe du champ initial. Or divers travaux ont montré que la fonction de distribution jointe est précisément une mesure clé de la similarité visuelle de deux textures [39]. Le travail de Bickel et Levina fournit donc une justification théorique de la constatation expérimentale que, effectivement, les méthodes de "copier-coller" parviennent très bien à synthétiser une texture à partir d'un échantillon. En outre, comme nous l'avons dit précédemment, la géométrie locale est également bien restaurée dès lors qu'elle est présente ailleurs dans l'image.

Les algorithmes de "copier-coller" se ramènent à chaque étape du remplissage à un problème d'optimisation discrète : il faut trouver un échantillon qui minimise la distance quadratique à l'échantillon courant. Le travail présenté dans [SM-7], en collaboration avec Jean-François Aujol et Saïd Ladjal, tente de répondre aux deux questions suivantes :

1. peut-on déterminer sous la forme d'un modèle variationnel l'équivalent dans le domaine continu d'un algorithme générique de "copier-coller" et peut-on généraliser aux dimensions supérieures ?
2. ce modèle variationnel donne-t-il des informations sur la capacité des méthodes de "copier-coller" à restaurer la géométrie ? Et permet-il d'envisager des méthodes encore plus performantes ?

Le modèle de base que nous proposons dans [SM-7] trouve son origine dans deux articles :

1) Un travail de Demanet, Song et Chan [24] où, de façon informelle, les auteurs proposent de modéliser le "copier-coller" à l'aide d'une "application de correspondance" T qui, à chaque point x du domaine manquant A, associe un point $T(x)$ dans la partie

connue de l'image $\Omega \setminus A$. L'image u_0, que l'on connaît au départ uniquement sur $\Omega \setminus A$, peut donc être reconstruite par la formule

$$\forall x \in A, \quad u_0(x) = u_0(T(x)). \tag{1.7}$$

Comment déterminer T ? Demanet, Song et Chan proposent que ce soit une application $T : A \to \Omega \setminus A$ plutôt rigide et qui minimise le critère (en négligeant les problèmes de définition au bord du domaine A) :

$$\int_A \left[\int_{B_r} |u_0(T(x+y)) - u_0(T(x)+y)|^2 \, dy \right] dx, \tag{1.8}$$

où $B_r = B_r(0)$ désigne la boule de rayon r et de centre 0. On voit mieux le lien avec les algorithmes de "copier-coller" lorsqu'on réécrit ce critère en supposant que u_0 a déjà été interpolée par la formule (1.7) : on obtient

$$\int_A \left[\int_{B_r} |u_0(x+y) - u_0(T(x)+y)|^2 \, dy \right] dx,$$

qui correspond bien à l'intégrale des distances quadratiques entre des échantillons assimilés à des boules de rayon r.

2) Le second article à l'origine de [SM-7] est un travail de Chambolle, Giacomini et Ponsiglione sur les liens entre rigidité et énergie élastique en mécanique des dislocations. Cet article nous a convaincus que l'espace SBV et la notion de partition de Caccioppoli étaient les outils adéquats pour représenter et manipuler des roto-translations par morceaux. On peut en effet définir une roto-translation par morceaux sur Ω comme une application de la forme

$$T = \sum_{i \in \mathbb{N}} (R_i \, x + t_i) \mathbb{1}_{E_i}$$

où $R_i \in \mathrm{SO}(N)$ désigne une rotation dans $\mathbb{R}^N$, t_i un vecteur de translation et $\{E_i\}$ une partition de Caccioppoli de Ω, c'est-à-dire une partition de Ω par des ensembles dont la somme des périmètres est finie [2].

Le principal modèle que nous proposons dans [SM-7] comme équivalent dans le domaine continu d'un algorithme de "copier-coller" générique est une adaptation de (1.8). Comme précédemment, Ω désigne le domaine de l'image et $A \subset \Omega$ le domaine manquant. On se donne une constante $C > 0$ telle que l'espace suivant ne soit pas vide :

$$\begin{aligned} V_1 = \ & \Big\{ T \in \mathrm{SBV}(\Omega, \mathbb{R}^N), \ T \text{ est une roto-translation par morceaux associée à une} \\ & \text{partition de Caccioppoli } \{E_i\}_{i \in I_T} \text{ telle que } \textstyle\sum_{i \in I_T} P(E_i, \Omega) \le C, \\ & T = \mathrm{Id} \text{ sur } \Omega \setminus (A + B_r), \ T(A + B_r) \subset (\Omega \setminus [(A + B_r) \cup (\partial\Omega + B_r)]) \Big\} \end{aligned}$$

On peut alors montrer le résultat suivant :

Théorème 1.10 ([SM-7], théorème 5.1) *Soit $u_0 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega \setminus A)$. Alors le problème*

$$\underset{T \in V_1}{Min} \quad E_1(T) = \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u_0(T(x+y)) - u_0(T(x) + \nabla T(x)\, y)|^2 dy\, dx$$

admet au moins une solution $T_{\text{opt}} \in V_1$. La fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = \begin{cases} u_0(x) & si\ x \in A \\ u_0(T_{\text{opt}}(x)) & si\ x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

est appelée inpainting optimal par "copier-coller" de u_0.

La preuve de ce théorème nécessite au préalable d'établir une propriété de compacité des roto-translations par morceaux ([SM-7], théorème 4.3) qui permet de construire une roto-translation par morceaux limite appartenant à V_1. On montre ensuite la *continuité* de l'énergie dans V_1, notamment grâce au fait que T étant inversible par morceaux, on peut contrôler l'image réciproque $T^{-1}(\mathcal{D}_0)$ de l'ensemble $\mathcal{D}_0$ des points où la fonction u_0 diffère d'une fonction continue fournie par le théorème de Lusin.

Que peut-on dire du lien entre cette fonctionnelle et l'algorithme de "copier-coller" ? On remarque que l'algorithme construit itérativement une roto-translation par morceaux sur le domaine manquant en utilisant un critère quadratique local. On peut donc considérer qu'il s'agit d'un algorithme glouton associé à E_1 et on peut espérer – mais le problème reste ouvert – qu'il réalise une minimisation discrète locale de l'énergie.

Le modèle précédent, à l'instar des algorithmes de "copier-coller" standard, recopie exactement l'image originale. Peut-on penser à un autre modèle permettant de faire varier la régularité de l'image reconstruite à l'intérieur du domaine manquant ? C'est l'esprit du deuxième modèle que nous proposons dans [SM-7] sous la forme suivante :

$$E_2(u,T) = \frac{1}{r^N} \int_{A+B_r} \int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)\, y)|^2 dy\, dx + \\ + \frac{1}{r^{N-1}} \int_{A+B_r} \Big(|Du|(B_r(x)) - |Du_0|(B_r(T(x))) \Big)^+ dx$$

où $\big(\cdot\big)^+$ est l'opérateur $\max(\cdot, 0)$ et les coefficients de normalisation assurent l'homogénéité de la fonctionnelle. On peut justifier ce modèle en invoquant le fait que, parmi les défauts des méthodes de "copier-coller" lorsque les paramètres sont mal choisis, l'effet de blocs est particulièrement gênant. Il s'agit de discontinuités artificielles entre blocs contigus dues à une mauvaise sélection des échantillons recopiés. Une façon d'y remédier consiste à pénaliser le fait que la fonction reconstruite ait localement des variations plus importantes que la fonction initiale, ce qui explique l'utilisation de la partie positive. Le fait de pénaliser la différence des variations totales n'est pas incompatible avec la volonté de pouvoir reconstruire une information de texture : deux échantillons de la même texture ont en effet des variations totales très proches. En outre, une régularisation supplémentaire de u aura pour effet de réduire localement sa variation totale sans affecter l'énergie E_2.

Un espace naturel pour étudier la fonctionnelle E_2 dans le contexte qui nous intéresse est :

$$V_2 = \Big\{(u,T),\ u \in BV(\Omega)\ ,\ \|u\|_\infty \le \|u_0\|_\infty\ ,\ u = u_0 \text{ sur } \Omega \setminus A,\ T \in \mathrm{SBV}(\Omega, \mathbb{R}^N), \\ \text{T est une roto-translation par morceaux associée à une partition de} \\ \text{Caccioppoli } \{E_i\}_{i \in I_T} \text{ telle que } \textstyle\sum_{i \in I_T} P(E_i, \Omega) \le \frac{C}{r^{N-1}}, \\ T = \mathrm{Id} \text{ sur } \Omega \setminus (A + B_r),\ T(A + B_r) \subset (\Omega \setminus [(A + B_r) \cup (\partial\Omega + B_r)])\Big\}.$$

En supposant C suffisamment grand, nous démontrons dans [SM-7] le résultat suivant :

Théorème 1.11 ([SM-7], théorème 6.1)

E_2 admet au moins un minimiseur $(u,T) \in V_2$.

La preuve est pour partie semblable à celle du théorème 1.10. Il faut en plus démontrer la semi-continuité inférieure du second terme où figurent les variations totales. C'est une conséquence de la semi-continuité inférieure de la variation totale d'une part et du fait que la mesure de variation totale $|Du_0|$ ne charge pas les bords des sphères de rayon r sauf pour un ensemble au plus dénombrable de centres. Notons que l'existence d'un minimiseur peut être étendue aux cas où l'on ajoute à E_2 une fonctionnelle semi-continue inférieurement (et coercice si nécessaire) permettant d'accroître la régularité de u.

Le troisième modèle que nous proposons dans [SM-7] part du constat suivant : si la pénalisation dans E_2 de la différence des variations locales n'est pas incompatible avec le traitement de la texture, elle semble cependant devoir plus naturellement porter sur l'information géométrique contenue dans l'image. Notre troisième modèle repose donc sur une décomposition de l'image en la somme d'une partie géométrique et d'une partie de texture [46, 62]. Parmi la multitude de modèles de décomposition qui existent désormais dans la littérature, nous avons choisi le modèle TV-L^1 [4, 23, 65] en raison de sa simplicité et de la qualité des décompositions obtenues, notamment pour les images où la texture est structurée – pour lesquelles précisément les algorithmes de "copier-coller" sont notablement plus performants que les autres méthodes d'*inpainting*.

Nous considérons ainsi dans [SM-7] que la partie géométrique d'une fonction $v \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ est une solution, non nécessairement unique, du problème [3]

$$\operatorname*{Min}_{v^g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega) \cap \mathrm{BV}(\Omega)} |Dv^g|(\Omega) + \|v - v^g\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}.$$

3. on peut bien sûr utiliser une combinaison plus générale de la forme $|Dv^g|(\Omega) + \lambda\|v - v^g\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}$ avec $\lambda > 0$ sans que cela modifie l'analyse théorique du problème.

Un résultat classique indique qu'on peut toujours choisir une solution vérifiant $\|v^g\|_\infty \leq \|v\|_\infty$. Dans la mesure où notre fonction reconstruite doit être semblable à l'image définie à l'extérieur du domaine, il nous a paru nécessaire de choisir une partie géométrique u_0^g de u_0 sur $\Omega \setminus A$ et de définir la notion de *partie géométrique contrainte par* u_0 comme une solution du problème

$$\operatorname*{Min}_{\substack{u^g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)\cap \mathrm{BV}(\Omega) \\ u^g = u_0^g \text{ sur } \Omega\setminus A}} |Du^g|(\Omega) + \|u - u^g\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}$$

sous la contrainte que $\|u^g\|_\infty \leq \|u\|_\infty$.

On considère ensuite la nouvelle fonctionnelle

$$E_3(u, u^g, T) = \frac{1}{r^N}\int_{A+B_r}\int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)\, y)|^2 dy\, dx + \\ + \frac{1}{r^{N-1}}\int_{A+B_r} \Big(|Du^g|(B_r(x)) - |Du_0^g|(B_r(T(x)))\Big)^+ dx$$

que l'on examine dans l'espace

$$V_3 = \Big\{(u, u^g, T),\ u \in BV(\Omega)\ ,\ \|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty,\ |Du|(\Omega) \leq \tfrac{\tilde{C}}{r^{N-1}},\ u = u_0 \text{ sur } \Omega \setminus A, \\ u^g \text{ partie géométrique de } u \text{ contrainte par } u_0,\ T \in \mathrm{SBV}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ est une roto-} \\ \text{-translation par morceaux associée à une partition de Caccioppoli } \{E_i\}_{i\in I_T} \\ \text{telle que } \textstyle\sum_{i \in I_T} P(E_i, \Omega) \leq \tfrac{C}{r^{N-1}},\ T = \mathrm{Id} \text{ sur } \Omega \setminus (A + B_r), \\ T(A + B_r) \subset (\Omega \setminus [(A + B_r) \cup (\partial\Omega + B_r)])\Big\}.$$

Nous démontrons alors dans [SM-7] le résultat suivant :

Théorème 1.12 ([SM-7], théorème 6.8)

E_3 admet au moins un minimiseur $(u, u^g, T) \in V_3$.

La seule différence avec la preuve du théorème 1.11 concerne la partie géométrique. Lorsqu'on se donne une suite minimisante (u_n, u_n^g, T_n), on peut en extraire par compacité une suite qui converge vers un triplet (u, w, T) dont on doit vérifier qu'il appartient bien à V_3. Il faut en particulier s'assurer que w est une partie géométrique de u contrainte par u_0. Il suffit pour cela d'établir que la suite de fonctionnelles

$$F_n(v) = |Dv|(\Omega) + \|v - u_n\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}$$

Γ-converge vers $F(v) = |Dv|(\Omega) + \|v - u\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}$ et le résultat découle du lien entre Γ-convergence et minimiseurs [22]. On conclut en établissant la semi-continuité inférieure de E_3 dans V_3.

De la même façon que pour E_2, il est possible d'établir l'existence de minimiseurs lorsqu'on ajoute à E_3 une fonctionnelle semi-continue inférieurement (et coercice si nécessaire) dans le but, par exemple, d'accroître la régularité de u^g. En reprenant les notations de la section 1.4, il est ainsi immédiat que la fonctionnelle

$$E_3(u, u^g, T) + \lambda \overline{F}_p(u^g, \Omega)$$

admet un minimiseur dans V_3 et on peut, en faisant varier le paramètre λ, jouer sur la régularité des lignes de niveau de la partie géométrique de la fonction reconstruite.

Que peut-on dire de la capacité de ces différents modèles à bien restaurer la géométrie d'une image ? C'est l'objet de la section 7 de [SM-7] où nous étudions un cas très simple d'*inpainting* binaire en dimension 2. N'étant pas en mesure de calculer numériquement des minimiseurs globaux, nous examinons trois configurations qui correspondent à trois interpolations différentes des contours de l'image : par plus court chemin, par "bonne continuation" et, enfin, par interpolation à l'aide de courbes régulières. Un algorithme générique de "copier-coller" donnera une solution proche de la "bonne continuation". Les calculs numériques que nous avons effectués indiquent que E_1 et E_2 favorisent au contraire des courbes régulières correspondant à une reconstruction non locale de la géométrie. Ceci confirme l'intérêt qu'il y aurait à mettre au point des méthodes de minimisation *globale* de E_1 et E_2.

La section 8 de [SM-7] porte sur l'examen de généralisations de E_2 de la forme :

$$E_2^{a,b,c}(u,T) = \frac{1}{r^N}\int_{A+B_r}\int_{B_r} |u(x+y) - u_0(T(x) + \nabla T(x)\, y)|^a dy\, dx \\ + \frac{1}{r^{N-1+b}}\int_{A+B_r}\left[\Big(|Du|(B_r(x)) - |Du_0|(B_r(T(x)))\Big)^+\right]^c dx.$$

Nous établissons en particulier que les minimiseurs de $E_2^{2,2,N-1}$ sont stables par changement de contraste multiplicatif et changement d'échelle, et que l'énergie a un bon comportement asymptotique quand r tend vers 0.

Pour conclure cette section, notre contribution dans [SM-7] est un premier pas vers la compréhension des formulations variationnelles globales des méthodes de "copier-coller" dans le domaine continu. Nous avons démontré qu'il existe une variété de modèles bien posés qui semblent permettre une meilleure reconstruction de la géométrie. On peut à présent envisager les perspectives suivantes :

1. Analyser plus finement les capacités de ces modèles à reconstruire des structures géométriques non locales sans obérer la capacité à reproduire parfaitement la texture ;
2. Déterminer des méthodes de minimisation globale discrètes qui permettraient, espérons-le, d'avoir des algorithmes d'*inpainting* encore plus performants ;

3. Comprendre le comportement asymptotique des modèles quand la taille r de l'échantillon tend vers 0, en utilisant éventuellement des coefficients d'homogénéité plus appropriés. Il est bien clair que les méthodes de “copier-coller” ne sont efficaces en pratique que pour des valeurs suffisamment grandes de r. Il nous semble néanmoins pertinent d'examiner, par une étude asymptotique, si ces méthodes sont des extensions non locales de modèles d'évolution locale. Cela permettrait de mieux comprendre leurs qualités et leur défauts, notamment pour la reconstruction de la géométrie.

1.8 Un modèle de segmentation faisant intervenir la courbure

L'article [SM-8] écrit en collaboration avec D. Cremers et T. Schoenemann porte sur l'étude d'un modèle de segmentation d'images. Il ne s'agit donc pas de reconstruction comme précédemment mais nous avons choisi d'évoquer ici ce travail car il fait intervenir l'énergie de l'elastica qui est au centre de presque tous les articles dont nous avons fait un résumé.

Le modèle de segmentation proposé consiste, étant donné une image, à identifier un objet dont le contour est particulièrement marqué et présente une bonne régularité. Autrement dit, si I désigne l'image que l'on suppose régulière, on cherche une courbe orientée C qui minimise l'énergie

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\mathcal{L}(C)} \nabla I(C(s)) \cdot C'(s)^{\perp}\, ds}{\displaystyle\nu\, \mathcal{L}(C) + \int_0^{\mathcal{L}(C)} |\kappa_C(s)|^p\, ds} \tag{1.9}$$

où s désigne l'abscisse curviligne et $C'(s)^{\perp}$ coïncide avec le vecteur tangent $C'(s)$ tourné de $\frac{\pi}{2}$. Ce modèle a d'abord été proposé par D. Cremers et T. Schoenemann dans l'article [57] en vue d'améliorer un critère dû à Jermyn et Ishikawa [37] ne faisant intervenir que la longueur et ayant pour défaut d'extraire souvent des courbes très petites. L'introduction de la courbure permet de pénaliser à la fois les petites courbes et celles qui sont trop oscillantes.

Au delà de la question de son intérêt pratique, le modèle est surtout intéressant parce qu'on peut l'associer à un algorithme discret de minimisation globale qui repose sur une équivalence élégante avec la recherche de cycles négatifs dans un graphe. Or rares sont les modèles de segmentation dont on sait déterminer les minimiseurs globaux. C'est ici à la fois un avantage et un inconvénient : la possibilité d'extraire des minimiseurs globaux permet d'identifier les catégories d'images pour lesquelles le modèle est pertinent mais, par ailleurs, il est extrêmement difficile – sauf cas particulier – d'anticiper quel contour

FIGURE 1.13: Minima globaux pour le modèle de segmentation (1.9). D'autres formes seront segmentées si on change la valeur de λ.

va être segmenté. C'est la différence avec les méthodes, du type *snakes*, où l'on part d'un contour prédéfini que l'on fait évoluer en sachant à peu près vers quoi il va converger. Néanmoins, en dépit de son manque de prédictibilité, le modèle peut dans certains cas fournir des résultats tout à fait satisfaisants de segmentation comme le montre la figure 1.13. Il est intéressant de noter une certaine inertie du résultat de la segmentation relativement au choix du paramètre λ et une bonne résistance au bruit uniforme, comme l'indiquent d'autres expériences présentées dans [SM-8], ce qui permet d'envisager une application à la segmentation *non supervisée* de certaines bases d'images médicales.

Notre première contribution dans ce travail a consisté à prouver l'existence d'au moins un minimiseur de (1.9) dans l'espace des courbes de classe $W^{2,p}$ et de longueur inférieure à une constante que l'on peut choisir arbitrairement grande. Ce résultat est une conséquence de la semi-continuité de la norme $W^{2,p}$.

Notre seconde contribution a été d'établir un résultat de convergence des suites de minimiseurs discrets (ou d'une sous-suite) vers un minimiseur dans le plan continu lorsque la résolution de l'image augmente, c'est-à-dire lorsqu'on fait tendre la taille des pixels vers 0. Nous avons pour cela utilisé une propriété démontrée dans [14] de Γ-convergence d'une énergie discrète adaptée vers l'énergie de l'elastica.

2 Deux problèmes impliquant la notion de périmètre

Les articles [SM-9] et [SM-10] que nous allons résumer dans cette partie font tous deux intervenir la notion de périmètre mais dans des contextes différents, $\mathbb{R}^N$ pour [SM-9] et les groupes d'Heisenberg pour [SM-10].

2.1 Composantes connexes au sens de la mesure dans $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$

La publication [SM-9] est un article écrit avec Luigi Ambrosio, Vicent Caselles et Jean-Michel Morel ayant pour objet l'étude détaillée d'une notion faible de connexité pour les ensembles de périmètre fini. Une des motivations de ce travail était de faire le lien entre des problèmes de traitement d'images où l'on manipule des composantes connexes au sens discret – en segmentation, en débruitage, en reconnaissance de formes, en compression, etc. – et l'espace BV comme modèle d'image géométrique dans le domaine continu. Il existe cependant d'autres contextes, physiques ou mathématiques, dans lesquels cette notion de composante connexe d'ensembles de périmètre fini est utile [9, 17, 27, 42].

Une fonction BV étant définie presque partout, la notion topologique classique de composante connexe est a priori inopérante pour les ensembles de périmètre fini – on verra cependant que le cas du plan est particulier. On a donc recours à une définition proposée initialement par Federer [33] dans le cadre des courants géométriques.

On dit qu'un ensemble de périmètre fini $E \subset \mathbb{R}^N$ est *décomposable* s'il existe une partition (A, B) de E telle que $|A|, |B| > 0$ et

$$P(E) = P(A) + P(B).$$

Si une telle partition n'existe pas alors l'ensemble est dit *indécomposable*. Nous avons procédé dans [SM-9] à une analyse complète de la notion de décomposabilité d'un ensemble de périmètre fini. Voici quelques résultats obtenus que l'on peut mettre en exergue :

1) Tout ensemble de périmètre fini E peut se décomposer ([SM-9], théorème 1) de façon essentiellement unique en une famille au plus dénombrable d'ensembles indécomposables

$\{E_i\}_{i\in I}$ tels que $|E_i| > 0$ et $\sum_{i\in I} P(E_i) < +\infty$. On appelle ces ensembles les M-composantes connexes de E. Ce théorème est démontré dans [SM-9] par un argument variationnel faisant intervenir une mesure de Lebesgue pondérée et l'inégalité isopérimétrique.

2) Afin de disposer d'outils pour manipuler les M-composantes connexes, on définit et on étudie les notions de trous, de saturation et d'ensembles simples ([SM-9], section 5). Les *trous* d'un ensemble indécomposable E sont les M-composantes connexes de mesure finie de $\mathbb{R}^N \setminus E$. La *saturation* d'un ensemble indécomposable est l'union de E et de ses trous. Enfin, un ensemble *simple* est un ensemble indécomposable et saturé.

3) On appelle *frontière de Jordan* tout ensemble qui est la frontière essentielle d'un ensemble simple. On démontre alors ([SM-9], théorème 4) que la frontière essentielle d'un ensemble de périmètre fini se décompose de façon unique en frontières de Jordan internes et frontières de Jordan externes. Un autre résultat permet de conclure à l'équivalence entre la représentation d'un ensemble par ses composantes connexes et la représentation par ses frontières de Jordan. En effet, le théorème 5 dans [SM-9] établit qu'il est possible de reconstruire un ensemble à partir de la donnée d'une famille de frontières de Jordan vérifiant certaines hypothèses de compatibilité. Cette équivalence est particulièrement pertinente dans le contexte du traitement des images puisqu'elle permet de travailler indifféremment avec les composantes d'ensembles de niveau ou avec les composantes de lignes de niveau.

4) L'un des inconvénients de la représentation d'un ensemble de périmètre fini par ses frontières de Jordan est qu'elle n'est pas stable par passage au complémentaire. Nous proposons dans la section 7 de [SM-9] une définition alternative de frontières externes et internes qui satisfont cette propriété de stabilité. Il s'agit des frontières de niveau de la *fonction topographique* de l'ensemble, qui est l'unique fonction associant à presque tout point le nombre de frontières de Jordan qui le séparent de l'extérieur de l'ensemble. La preuve de l'existence et de l'unicité d'une telle fonction est purement constructive.

5) Le cas du plan est particulier : on peut y caractériser de façon particulièrement fine les composantes connexes et les frontières de Jordan au sens de la mesure. On montre d'abord (théorème 7) que si un ensemble est simple alors sa frontière essentielle coïncide presque partout avec une courbe de Jordan rectifiable (au sens classique). Ceci fournit une unique décomposition de la frontière en courbes de Jordan rectifiables (au sens classique) dans le cas général d'un ensemble de périmètre fini (corollaire 1). Ces propriétés avaient déjà été démontrées par Federer dans le cadre des courants entiers unidimensionnels. La preuve que nous donnons dans [SM-9] utilise un formalisme plus simple.

6) Nous montrons enfin dans le théorème 8 le lien qui existe dans le *plan* entre la notion

de composante connexe au sens de la mesure et la notion topologique classique. Nous prouvons en effet qu'étant donné un ensemble de périmètre fini dans le plan, l'intérieur de chacune de ses composantes connexes coïncide, modulo un ensemble $\mathcal{H}^1$-négligeable et à condition de retirer un ensemble particulier de points de la frontière, avec un ensemble *connexe par arcs*.

La dernière partie de l'article est consacrée à l'espace des fonctions à variation faiblement bornée (WBV) : c'est l'espace des fonction boréliennes dont presque tout ensemble de niveau est de périmètre fini. Contrairement à l'espace BV et sa formule de la coaire, la fonction $t \mapsto P(\{u \geq t\})$ n'est donc pas nécessairement intégrable si $u \in \mathrm{WBV}$. On montre d'ailleurs que si Ω est un domaine borné alors $\mathrm{BV}(\Omega) \subset \mathrm{GBV}(\Omega) \subset \mathrm{WBV}(\Omega)$ et les inclusions sont strictes. On a cependant une relation intéressante entre WBV et BV : si Ω est borné, connexe et à frontière Lipschitz et si $u \in \mathrm{WBV}$ il existe un changement de contraste strictement croissant ϕ tel que $\phi \circ u \in \mathrm{BV}$ ([SM-9], théorème 9).

L'espace WBV est l'espace naturel pour étudier, dans le domaine continu, divers opérateurs agissant sur les composantes connexes d'ensembles de niveau dans des contextes aussi divers que le débruitage, la segmentation ou la compression d'images. On peut en particulier mentionner deux opérateurs de débruitage très simples, dus à Luc Vincent [63], qui permettent de retirer efficacement le bruit impulsionnel d'une image et qui consistent simplement à supprimer les petites composantes connexes des ensembles de niveau supérieur et inférieur. Contrairement au filtre médian, qui est un opérateur de débruitage très efficace pour le bruit impulsionnel mais qui fait évoluer toute ligne de niveau aux points où elle est courbe, les filtres de Luc Vincent n'affectent pas la structure principale des lignes de niveau. Nous donnons dans [SM-9] une définition rigoureuse de ces filtres dans l'espace WBV et nous établissons quelques-unes de leurs propriétés, notamment le fait qu'ils réduisent la variation totale de toute fonction BV à laquelle on les applique.

2.2 Problème isopérimétrique dans les groupes d'Heisenberg

Les espaces sous-riemanniens jouent un rôle central dans de nombreux domaines des mathématiques, par exemple dans l'étude de la géométrie des espaces métriques, en théorie des opérateurs différentiels du second ordre, dans l'étude de certaines équations différentielles stochastiques mais aussi dans des domaines d'application comme le contrôle robotique, la mécanique quantique, la planification, la modélisation du cortex visuel voire la reconstruction d'images. A la différence de la géométrie riemannienne, les mouvements d'un point sont beaucoup plus limités en géométrie sous-riemannienne : tout vecteur vitesse est contraint d'appartenir à un espace de dimension inférieure à la dimension topologique.

Au sein des espaces sous-riemanniens, les groupes d'Heisenberg $\mathbb{H}^N$ sont l'objet de beaucoup d'attention car ils sont à la fois relativement simples tout en présentant une complexité métrique et géométrique très caractéristique du cadre sous-riemannien.

Parmi l'ensemble des problèmes qui se posent dans la compréhension de la géométrie des groupes d'Heisenberg, la question des ensembles isopérimétriques a ceci d'emblématique qu'elle concerne les ensembles canoniques de cette géométrie, à l'instar des boules dans le cas euclidien.

La formulation même du problème isopérimétrique n'est pas triviale : de nombreuses contributions ont été nécessaires pour :

1. exhiber une notion naturelle de périmètre et étudier les propriétés des ensembles de périmètre fini dans $\mathbb{H}^N$ [34, 48] ;
2. démontrer la validité d'une inégalité isopérimétrique [50, 51, 35] ;
3. prouver l'existence d'ensembles isopérimétriques [43].

La question de l'identification précise des ensembles isopérimétriques est encore un problème ouvert, malgré de nombreuses tentatives depuis le premier article de Pansu [51] sur le sujet. On trouvera dans [47] un récapitulatif bref et extrêmement clair de l'état des connaissances et dans [15] une description exhaustive des problèmes en jeu.

On notera que, contrairement au cas euclidien, les boules relatives à la métrique de Carnot-Carathéorody – qui est la métrique naturelle dans $\mathbb{H}^N$ – ne sont pas isopérimétriques, pas plus que les boules relatives à la métrique de jauge.

Une conjecture due à Pansu [51] affirme qu'un ensemble isopérimétrique de $\mathbb{H}^N$ coïncide, modulo une dilatation, une translation à gauche et un ensemble $\mathcal{L}^{2N+1}$ négligeable avec

$$E_{\text{isop}} = \{(z,t) \in \mathbb{H}^N : \ |t| < \arccos|z| + |z|\sqrt{1-|z|^2},\ |z| < 1\}$$

où l'on a fait l'identification usuelle $\mathbb{H}^N \simeq \mathbb{C}^N \times \mathbb{R}$. La figure 2.1 montre une représentation de cet ensemble dans le cas particulier du groupe $\mathbb{H}^1 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. On remarque notamment que la frontière de cet ensemble est feuilletée par toutes les géodésiques reliant les deux pôles : c'est une situation très différente du cas euclidien !

Lorsque nous nous sommes intéressés à ce problème avec Gian Paolo Leonardi, le seul résultat connu était que E_{isop} était effectivement l'ensemble isopérimétrique générique dans la classe réduite des ensembles de périmètre fini dont la frontière est régulière et, modulo une translation à gauche, symétrique par rapport à $\{t = 0\}$ et à symétrie axiale. Notre première contribution dans [SM-10] a été de montrer que la frontière de E_{isop} est à courbure moyenne de Heisenberg constante et, comme nous l'avons dit précédemment et

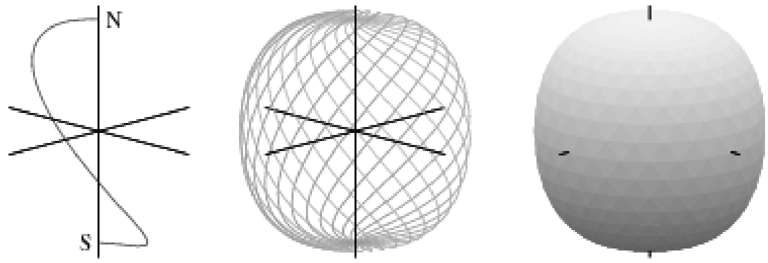


FIGURE 2.1: De gauche à droite : une géodésique reliant les deux pôles de l'ensemble isopérimétrique de référence E_{isop} dans $\mathbb{H}^1$, quelques géodésiques et l'enveloppe entière ∂E_{isop}.

redécouvrant ainsi involontairement une remarque faite au préalable par Pansu, qu'elle peut être feuilletée par les géodésiques reliant ses deux pôles ([SM-10], théorème 3.3). Ces deux résultats sont très simples à établir. La seule difficulté fut en fait de conjecturer – sans connaître la remarque de Pansu ! – que la frontière pouvait être feuilletée par des géodésiques. Le reste n'est qu'une vérification purement calculatoire utilisant une paramétrisation bien connue des géodésiques.

Notre seconde contribution dans [SM-10] est un résultat négatif : il n'est pas possible d'adapter aux groupes d'Heisenberg $\mathbb{H}^N$ la stratégie qui permet dans $\mathbb{R}^N$ de prouver que les boules sont isopérimétriques en utilisant l'inégalité de Brunn-Minkowski et le lien entre périmètre et contenu de Minkowski. Pourtant une inégalité de Brunn-Minkowski existe dans $\mathbb{H}^N$ ([SM-10], théorème 4.1), le contenu de Minkowski relativement à la boule unité B_{cc} pour la distance de Carnot-Carathéodory permet de calculer le périmètre des ensembles réguliers [48] et on ne modifie pas le contenu de Minkowski si on le calcule relativement à n'importe quel autre ensemble D dont la projection sur $\{t = 0\}$ coïncide avec celle de B_{cc} ([SM-10], théorème 4.7). En d'autres termes, dans les groupes d'Heisenberg, seule la partie horizontale compte pour le calcul du contenu de Minkowski, ce qui est cohérent avec la nature horizontale de la structure différentielle du groupe.

Tout ceci est cependant insuffisant : les exposants apparaissant dans l'inégalité de Brunn-Minkowski que nous établissons ([SM-10], théorème 4.1) ne permettent pas de transposer dans Heisenberg la stratégie euclidienne et aucune autre inégalité pondérée faisant intervenir les bons coefficients (voir [SM-10], proposition 1) n'est valable dans $\mathbb{H}^N$ ([SM-10], proposition 4.10). Une autre stratégie doit donc être élaborée.

Nous concluons cette évocation du problème isopérimétrique dans $\mathbb{H}^N$ avec le dernier résultat en date, dû à R. Monti [47] : si un ensemble isopérimétrique quelconque est (modulo une translation à gauche) à symétrie axiale alors il coïncide avec E_{isop} (modulo une dilatation).

Nous avons, au début de ce mémoire, décrit une adaptation au problème de l'*inpainting* d'une théorie de la complétion amodale et nous terminons notre synthèse avec un problème en géométrie sous-riemannienne. Il est surprenant de réaliser qu'il existe un lien entre les deux : Citti et Sarti [19], en se basant sur des travaux de représentation du cortex visuel dus à Petitot et Tondut [52], proposent en effet un modèle séduisant de complétion amodale dans le groupe des translations-rotations $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ qui équivaut à ramener la minimisation contrainte de

$$\int_\Omega |\nabla u| \Big(1 + \Big| \mathrm{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \Big|^2 \Big) \, dx$$

à la "simple" résolution de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Bibliographie

[1] W.K. Allard, On the first variation of a varifold, *Ann. of Math. (2)*, 95 :417–491, 1972.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford University Press, 2000.

[3] F.J. Almgren, *The theory of varifolds*, Mimeographed notes, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965.

[4] J-F. Aujol, G. Gilboa, T. Chan and S. Osher, Structure-texture image decomposition - Modeling, Algorithms, and Parameter selection. *Int. J. Comp. Vision*, 67(1) :111–136, 2006.

[5] C. Ballester, M. Bertalmio, V. Caselles, G. Sapiro, and J. Verdera, Filling-in by joint interpolation of vector fields and gray levels, *IEEE Trans. On Image Processing*, 10(8) :1200–1211, 2001.

[6] G. Bellettini, G. Dal Maso and M. Paolini, Semicontinuity and relaxation properties of a curvature depending functional in 2D, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci* (4), 20(2) :247–297, 1993.

[7] G. Bellettini and L. Mugnai, Characterization and representation of the lower semicontinuous envelope of the elastica functional, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lin.*, 21 (6) :839–880, 2004.

[8] G. Bellettini and L. Mugnai, A varifolds representation of the relaxed elastica functional, *J. Conv. Analysis*, 14(3) :543–564, 2007.

[9] G. Bellettini, M. Novaga and M. Paolini, Characterization of facet breaking for nonsmooth mean curvature flow in the convex case. *Interfaces Free Bound.*, 3(4) :415–446, 2001.

[10] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles and C. Ballester, Image inpainting, In *Proc. ACM Conf. Comp. Graphics (SIGGRAPH), New Orleans, USA*, 417–424, 2000.

[11] M. Bertalmio, L. Vese, G. Sapiro, and S. Osher, Simultaneous structure and texture image inpainting, *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(8) :882–889, 2003.

[12] F. Bornemann and T. März, Fast Image Inpainting based on coherence transport, *J. Math. Imaging and Vision* 28(3) :259–278, 2007.

[13] K. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, 1978.

[14] A.M. Bruckstein, A.N. Netravali and T.J. Richardson, Epi-convergence of discrete elastica, In *Applicable Analysis, Bob Carroll Special Issue*, 79 :137–171, 2001.

[15] L. Capogna, D. Danielli, S. Pauls and J. Tyson, *An introduction to the Heisenberg Group and to the sub-Riemannian Isoperimetric problem*, In "Progress in Mathematics", Birkhäuser, 2007.

[16] V. Caselles, J.M. Morel and C. Sbert, An Axiomatic Approch to Image Interpolation, *IEEE Trans. Image Processing*, 7(3) :376–386, 1998.

[17] A. Chambolle, A. Giacomini and M. Ponsiglione Piecewise Rigidity. *J. Funct. Anal.* 244 :134-153, 2007.

[18] T.F. Chan, S.H. Kang and J. Shen, Euler's elastica and curvature based inpainting, *SIAM Journal of Applied Math.*, 63(2) :564–592, 2002.

[19] G. Citti and A. Sarti, A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space, *J. Math. Imaging Vision*, 24(3) :307–326, 2006.

[20] I D. Coope, Curve interpolation with nonlinear spiral splines, *IMA J. Numer. Anal.*, 13 :327–341, 1993.

[21] A. Criminisi, P. Pérez, and K. Toyama, Object removal by exemplar-based inpainting, In *IEEE Int. Conf. Comp. Vision and Pattern Recog.*, 2 :721–728, 2003.

[22] G. Dal Maso, *An introduction to* Γ*-convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8, Birkhaüser, Boston, 1993.

[23] J. Darbon and M. Sigelle, Image restoration with discrete constrained total variation part I : Fast and exact optimization, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 26(3) :277–291, 2006.

[24] L. Demanet, B. Song and T. Chan, Image inpainting by correspondence maps : A deterministic approach, *UCLA CAM Report 03-40*, Aug. 2003. *Proc. VLSM Conf., Nice*, October 2003.

[25] A. Desolneux, L. Moisan, and J.M Morel, Edge detection by Helmohltz principle, *Int. Journal Computer Vision*, 14 :271–284, 2001.

[26] V. Do, G. Lebrun, L. Malapert, C. Smet, and D. Tschumperlé, Inpainting d'Images Couleurs par Lissage Anisotrope et Synthèse de Textures, In *Proc. RFIA'06, Tours, France*, Jan. 2006.

[27] G. Dolzmann and S. Müller, Microstructures with finite surface energy : the two-well problem, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 132 : 101–141, 1995.

[28] A. Efros and T. Leung, Texture synthesis by non-parametric sampling, In *Proc. Int. Conf. on Comp. Vision, Kerkyra, Greece*, 2 :1033–1038, 1999.

[29] M. Elad, J.-L Starck, D. Donoho and P. Querre, Simultaneous Cartoon and Texture Image Inpainting using Morphological Component Analysis, *Appl. Comp. Harm. Analysis*, 19(3) :340–358, 2005.

[30] S. Esedoglu and J. Shen, Digital image inpainting by the Mumford-Shah-Euler image model, *Europ. J. Appl. Math.*, 13 :353–370, 2002.

[31] S. Esedoglu, S. Ruuth, and R. Tsai, Threshold dynamics for shape reconstruction and disocclusion, *UCLA CAM Report 05-22*, April 2005, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing*, (2) :502–505, 2005.

[32] C. Fantoni and W. Gerbino, Contour interpolation by vector field combination, *J. of Vision*, 3 :281–303, 2003.

[33] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer Verlag, 1969.

[34] B. Franchi, R. Serapioni and F. Serra Cassano, Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group, *Math. Ann.*, 321 :479–531, 2001.

[35] N. Garofalo and D.-M. Nhieu, Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, 49 :1081–1144, 1996.

[36] B.K.P. Horn, The curve of least energy, *ACM Trans. on Math. Software*, 9 :441–460, 1983.

[37] I. H. Jermyn and H. Ishikawa, Globally optimal regions and boundaries as minimum ratio weight cycles, *IEEE Trans. on Patt. Anal. and Mach. Intell.*, 23(10) :1075–1088, 2001.

[38] J. Jia and C.-K. Tang, Image repairing : Robust image synthesis by adpative ND tensor voting, In *CVPR'03*, 643-650, 2003.

[39] B. Julesz, Visual pattern discrimination, *IRE Trans. Information Theory*, 8 :84-92, 1962.

[40] G. Kanizsa, *Organisation in Vision*, New-York : Praeger, 1979.

[41] B.B. Kimia, I. Frankel, and A.-M. Popescu, Euler spiral for shape completion, *Int. J. Comp. Vision*, 54 :159–182, 2003.

[42] B. Kirchheim, Lipschitz minimizers of the 3-well problem having gradients of bounded variation, Preprint 12, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig, 1998.

[43] G.P. Leonardi and S. Rigot, Isoperimetric sets on Carnot groups, *Houston J. Maths*, 29 :609–637, 2003.

[44] E. Levina and P. Bickel, Texture Synthesis and Non-parametric Resampling of Random Fields, *Annals of Statistics*, 34(4) :1751–1773, 2006.

[45] U. Menne, Second order rectifiability of integral varifolds of locally bounded first variation, submitted, 2008, available at arXiv :0808.3665

[46] Y. Meyer, *Oscillating patterns in image processing and in some nonlinear evolution equations*, The Fifteenth Dean Jacquelines B. Lewis Memorial Lectures, March 2001.

[47] R. Monti, Heisenberg isoperimetric problem. The axial case, *Adv. Calc. Var.*, 1(1) :93–122, 2008.

[48] R. Monti and F. Serra Cassano, Surfaces measures in Carnot-Carathéodory spaces, *Calc. Var.*, 13 :339–376, 2001.

[49] M. Nitzberg, D. Mumford and T. Shiota, *Filtering, Segmentation and Depth*, volume 662 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 1993.

[50] P. Pansu, Une inégalité isopérimétrique sur le groupe de Heisenberg, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 295 :127–130, 1982.

[51] P. Pansu, An isoperimetric inequality on the Heisenberg group, Conf. on differential geometry on homogeneous spaces (Turin, 1983), *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Special Issue*, 159–174, 1984.

[52] J. Petitot and Y. Tondut, Vers une neurogéométrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux, *Math. Inform. Sci. Humaines*, 145 :5-101, 1999.

[53] P. Pérez, M. Gangnet and A. Blake, PatchWorks : Example-Based Region Tiling for Image Editing, *Research Report Microsoft Research, MSR-TR-2004-04*, 2004.

[54] M. Röger and R. Schätzle, On a modified conjecture of De Giorgi. *Math. Z.*, 254(4) :675–714, 2006.

[55] R. Schätzle, Quadratic tilt-excess decay and strong maximum principle for varifolds, *Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa - Cl. Sci.*, (5), 3(1) :171–231, 2004.

[56] R. Schätzle, Lower semicontinuity of the Willmore functional for currents, to appear in *J. Diff. Geometry*, 2008.

[57] T. Schoenemann and D. Cremers, Introducing curvature into globally optimimal image segmentation : Minimum ratio cycles on product graphs, In *IEEE Int. Conf. on Comp. Vision*, Rio de Janeiro, Brazil, October 2007.

[58] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proc. Centre for Math. Anal., Australian Nat. Univ., 3, 1983.

[59] J. Sun, L. Yuan, J. Jia, and H.-Y. Shum, Image completion with structure propagation, In *ACM Trans. Graphics, SIGGRAPH'05*, 24(3) :861–868, 2005.

[60] D. Tschumperlé, Fast anisotropic smoothing of multi-valued images using curvature-preserving PDE's, *Int. J. of Comp. Vision*, 68(1) :65–82, 2006.

[61] S. Ullman, Filling-in the gaps : the shape of subjective contours and a model for their generation, *Biological Cybernetics*, 25 :1–6, 1976.

[62] L.A. Vese and S. J. Osher, Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing, *J. Scient. Computing*, 19(1–3) :553–572, 2003.

[63] L. Vincent, Morphological area openings and closings for grey-scale images, In *Proc. of "Shape in Picture", 1992, Driebergen, The Netherlands*, Springer-Berlin, 197–208, 1994.

[64] L.Y. Wei and M. Levoy, Fast texture synthesis using tree-structured vector quantization, In *SIGGraph-00*, 479–488, 2000.

[65] W. Yin, D. Goldfarb and S. Osher, A comparison of three total variation based texture extraction models, *J. Visual Comm. Image Rep.*, 18(3) :240–252, 2007.