

## INTRODUCTION

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}.$$

On étudie la série de terme général  $a_n$ . On montre qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée  $\gamma$ , et appelée **Constante d'Euler**. Pour cela on commence par étudier la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^n a_p = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $H_0 = 0$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$H_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}.$$

### PARTIE I : PREMIÈRE APPROCHE DE LA CONSTANTE D'EULER

1) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . En encadrant l'intégrale  $\int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$ , montrer que

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

- 2) En déduire que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite  $\gamma$  appartient à l'intervalle  $[0, 1]$ .
- 3) Vérifier que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p} dt,$$

puis montrer que pour tout entier  $p \geq 2$  on a :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq a_p \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right).$$

4) En déduire un encadrement de  $S_m - S_n$  pour  $m$  et  $n$  des entiers vérifiant  $m > n \geq 1$ . Puis montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$

5) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  :

$$H_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$ . Montrer que

$$0 \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Déterminer un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  pour lequel  $T_n$  est une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-2}$  près. Donner alors un encadrement de  $\gamma$  à  $10^{-2}$  près.

**PARTIE II : DEUX REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DE LA CONSTANTE D'EULER**

Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , borné ou non et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux. On dira que  $f$  est **intégrable** sur  $I$  si l'intégrale impropre de  $f$  sur  $I$  est absolument convergente.

On admettra le résultat suivant : Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , borné ou non et soit  $\sum u_n$  une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle  $I$ . Si la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique  $\sum \int_I u_n$  converge, alors, la fonction somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est intégrable sur  $I$  et on a :

$$\int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

1) Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b) Déterminer la limite de  $\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}$  quand  $t \rightarrow 0^+$ .

c) Conclure.

2) Dans cette question on se propose de démontrer que si  $a$  et  $b$  sont deux réels strictement positifs, alors la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}.$$

Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs.

a) Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b) Montrer que pour  $a \leq b$  on a pour tout réel  $z > 0$  :

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}$$

c) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Une première représentation intégrale de la constante d'Euler.

a) Démontrer que pour tout réel  $t > 0$  on a :

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) En déduire que pour tout réel  $t > 0$  on a :

$$e^{-t} \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} \right).$$

c) Démontrer que pour tout réel  $t > 0$ , on a :

$$1 - \frac{1 - e^{-t}}{t} \geq 0.$$

d) Retrouver alors la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$  et démontrer l'égalité :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

#### 4) Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler.

Soit  $y$  un réel strictement positif.

a) Calculer  $\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$ , puis déduire que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \right) = 0.$$

b) Démontrer que :

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^y e^{-t} \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

c) En déduire que :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = 0.$$

d) Démontrer que la fonction  $t \mapsto e^{-t} \ln t$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right).$$

e) Conclure alors que :

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

### PARTIE III : POUR UNE VALEUR APPROCHÉE DE LA CONSTANTE D'EULER

1) a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

(Indication : on pourra calculer chacune des deux intégrales).

b) En utilisant l'égalité obtenue en II.3)d), démontrer que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

2) Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$ .

(On rappelle que  $H_0 = 0$  et pour  $k \geq 1$ ,  $H_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{p}$ .)

a) Montrer que  $F$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

b) Démontrer que pour tout réel  $x > 0$  on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1).$$

c) Montrer alors que pour tout réel  $x > 0$  on a :

$$F(x) = e^x \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

3) Dédire des questions précédentes que pour tout réel  $x > 0$  on a :

$$\gamma + \ln x = e^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

4) Soit un entier  $n \geq 1$  et soit un entier  $a \geq 2$ . Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leq \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leq \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an}.$$

(**Indication** : on pourra admettre et utiliser l'inégalité :  $n! \geq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .)

5) En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$  on a :

$$\left| \gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leq \frac{a}{a-1} \frac{e^{-n} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{e^{-n}}{n}.$$

6) Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-10}$  près. (On ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée.)

#### PARTIE IV : LA CONSTANTE D'EULER SOMME DE LA SÉRIE DE VACCA (1910)

Pour tout entier  $p \geq 0$ , on pose :

$$v_p = p \left( \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right).$$

1) a) En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans l'expression de  $v_p$ , montrer que pour tout entier  $p \geq 1$  on a :

$$v_p = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p) \quad \text{où} \quad \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}.$$

b) En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$  on a :

$$\sum_{p=1}^n v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d) En utilisant le développement asymptotique de  $H_n$ , obtenu en **I. 5**), conclure que la série de terme général  $v_p$  est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = (-1)^n \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{n}$$

où  $\log_2$  désigne la fonction logarithme en base 2 et  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière du réel  $x$ .

a) Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général  $u_n$ .

b) Soit  $n$  un entier naturel et soit  $m$  un entier tel que :  $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$ . Montrer que

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

puis en déduire que :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| \leq \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soit  $n$  un entier naturel et soit  $m$  un entier tel que :  $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$ . Montrer que

$$\sum_{k=1}^m u_k = \sum_{p=0}^n v_p + \mathcal{O}\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

et en déduire que la série de terme général  $u_n$  converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

3) On pose pour tout entier naturel  $n$  :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

a) Montrer que la série de terme général  $r_n$  est absolument convergente.

b) Exprimer  $v_k$  en fonction de  $k, r_k$  et  $r_{k+1}$ . Montrer ensuite que

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n r_k - nr_{n+1}.$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right)$$

### PARTIE V : LA FORMULE DE GOSPER (1972)

Dans cette partie on désigne par  $\mathcal{F}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles indexées par  $\mathbb{N}$ . Si  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est un élément de  $\mathcal{F}$ , on notera aussi  $x[k]$  le terme  $x_k$  de la suite  $x$ . On considère l'endomorphisme  $\Delta$  de  $\mathcal{F}$  défini par :

$$\forall x \in \mathcal{F}, \forall k \in \mathbb{N}, \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1].$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\Delta^n$  l'endomorphisme de  $\mathcal{F}$  obtenu en composant  $\Delta$  avec lui même  $n$  fois et on pose  $\Delta^0 = \text{Id}_{\mathcal{F}}$ .

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout entier  $p \in [0, n]$ ,  $\binom{n}{p}$  désigne le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in \mathcal{F}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}.$$

(**Indication** : écrire  $\Delta = \text{Id}_{\mathcal{F}} - T$  où  $T$  est l'endomorphisme de  $\mathcal{F}$  défini, pour tout  $x \in \mathcal{F}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , par :  $T(x)[k] = x[k+1]$ .)

2) Soit  $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergente et de limite  $\ell$ . On se propose de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = \ell.$$

a) Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que la suite  $\left( \frac{\binom{n}{p}}{2^n} \right)_{n \geq p}$  converge vers 0.

b) On suppose dans cette question  $\ell = 0$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = 0.$$

(**Indication** : On pourra utiliser l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} u_p + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} u_p$$

et, étant donnée un réel  $\varepsilon > 0$ , choisir un entier  $k$  suffisamment grand pour que l'on ait

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^n \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Conclure pour le cas général où  $\ell$  est quelconque.

- 3) Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante : Soit  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ . Si la série  $\sum (-1)^k x_k$  converge, alors, la série de terme général  $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$  converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

On pose, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$U_N = \sum_{k=0}^N (-1)^k x_k \quad \text{et} \quad V_N = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

a) Démontrer que

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^N \binom{N+1}{q} U_q.$$

(on pourra observer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(-1)^k x_k = U_k - U_{k-1}$ , avec, par convention,  $U_{-1} = 0$ ).

b) En déduire que la série de terme général  $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$  converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.$$

- 4) On considère dans cette question un entier  $n \geq 1$  ainsi que la suite  $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$x_j = \frac{1}{2^n + j}.$$

a) Montrer que pour tout entier  $m \geq 0$  on a :

$$\Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

**Indication :** On pourra admettre et utiliser le résultat suivant : Pour  $m, n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

b) En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

c) Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}.$$