Université Claude Bernard - Lyon 1 **22 juin 2022**
Préparation à l'agrégation interne J. Melleray

Dénombrabilité; fonctions continues d'une variable réelle

1.1 Dénombrabilité

Définition 1.1
Un ensemble X est *dénombrable* s'il existe une injection $f\colon X \to \mathbb{N}$.

Notons que, avec cette définition, X peut être fini ; on trouve aussi souvent la convention selon laquelle un ensemble dénombrable est nécessairement infini.

Exercice 1.2
Soit X un ensemble non vide. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une injection de X dans $\mathbb{N}$.
2. Il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur X.
3. Il existe une partie A de $\mathbb{N}$ et une bijection de A sur X (montrer aussi que, si X est infini, on peut prendre $A = \mathbb{N}$).

Il est important de bien remarquer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ (voir la fiche précédente !) ; en particulier, l'ensemble des nombres premiers est en bijection avec $\mathbb{N}$ (savez-vous montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers ?).
La dénombrabilité est surtout importante à l'agrégation externe, pour la théorie de la mesure ; à l'interne elle intervient un peu en probabilités mais ce n'est pas crucial. On va essayer de ne pas passer trop de temps dessus, mais il est important de comprendre la définition et de savoir montrer la dénombrabilité de certains ensembles (comme $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$).

Exercice 1.3
Soit X, Y deux ensembles.

1. Montrer que si X est dénombrable et $f\colon X \to Y$ est surjective alors Y est dénombrable.
2. Montrer que si Y est dénombrable et $f\colon X \to Y$ est injective alors X est dénombrable. En particulier, toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Exercice 1.4
Soit X un ensemble, et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X. On suppose que chaque A_i est dénombrable. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ est dénombrable.
Indication : commencer par se ramener au cas où les A_i sont disjoints. Puis énumérer l'ensemble des nombres premiers sous la forme d'une suite strictement croissante $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$; pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixer une injection $f_i\colon A_i \to \mathbb{N}$, puis considérer $f\colon \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{N}$ définie par $x \in A_i \mapsto p_i^{f_i(x)+1}$.

On a ainsi montré qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. En particulier, une union finie d'ensembles dénombrables est dénombrable (ci-dessus, certains A_i pouvaient être vides...).

Exercice 1.5
Soit X, Y deux ensembles dénombrables. Montrer que $X \times Y$ est dénombrable.

Exercice 1.6

1. Montrer que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k$ (pour k un entier) et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2. Un nombre réel est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable (on pourra commencer par prouver que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable).

On pourrait être tenté de croire que tout ensemble est dénombrable, mais on a déjà vu que ce n'était pas le cas de $\mathbb{R}$ (ni de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; pourquoi ?). Pour conclure cette section, un petit exercice hors programme mais intéressant pour la culture...

Exercice 1.7
Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Soit $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ une fonction. En considérant $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$, montrer que f n'est pas surjective.
En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

En particulier, si l'on part de $X_0 = \mathbb{N}$, puis qu'on pose $X_{i+1} = \mathcal{P}(X_i)$, on obtient une suite d'ensembles infinis "de plus en plus gros" ; mais on n'ira pas plus loin dans cette direction ici.
Notons que, si on identifie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (en identifiant un ensemble à sa fonction caractéristique), il suit de cela que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable (en fait, il est en bijection avec $\mathbb{R}$) ; un produit dénombrable d'ensembles dénombrables n'est pas dénombrable, en général !

1.2 Fonctions d'une variable réelle : continuité

On va se restreindre au cas de fonctions définies sur un intervalle, pour simplifier un peu, mais ça ne jouera pas un grand rôle ici (on pourrait considérer comme domaine une partie quelconque de $\mathbb{R}$, au moins dans les définitions).

Définition 1.8
Soit I un intervalle, et $x \in I$. On dit que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue en x si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Exercice 1.9
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x \in I$. Montrer que f est continue en x si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui converge vers x on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$.

On dit que f est continue *sur* I si elle est continue en x pour tout $x \in I$. On s'épargne les preuves que sommes, produits, composées de fonctions continues sont continues ; mais ce sont des choses à savoir faire.

Exercice 1.10

1. Disons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *vraiment très continue* si :

$$\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\ .$$

   (autrement dit, le même δ marche pour tout ε et pour tout x).

2. Disons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *assez peu continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\ .$$

   (cette fois, δ dépend à la fois de ε, x, et y)

Montrer que les seules fonctions vraiment très continues sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes ; et que n'importe quelle fonction est assez peu continue.

(Les termes "vraiment très continue" et "assez peu continue" ont été inventés pour l'exercice précédent et ne sont bien sûr pas à retenir ! Le but de l'exercice est surtout d'insister sur le fait que l'emplacement des quantificateurs joue un rôle crucial sur le sens d'un énoncé mathématique...).
Passons aux deux premiers théorèmes à connaître absolument sur les fonctions continues d'une variable réelle (avoir une idée de la preuve ne peut pas faire de mal !)

Exercice 1.11 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Dans cet exercice, on fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue ainsi que $a < b \in I$ tels que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

1. Montrer que $E = \{x \in [a, b] : \forall y \in [a, x]\ f(y) < 0\}$ admet une borne supérieure $M \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $a \leq M \leq b$, et que $f(M) \leq 0$.
3. En supposant que $f(M) < 0$, obtenir une contradiction ; conclure que $f(M) = 0$.
4. À l'aide des résultats établis dans les questions précédentes, montrer que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exercice 1.12 (Théorème des extrémums)

Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Rappeler pourquoi il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que $f(x_n)$ tend vers M.
2. En utilisant le fait que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, démontrer que $M < +\infty$ et qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = M$.
3. Établir le *théorème des extrémums* : une fonction continue sur un segment, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes.

(Note : j'ai utilisé la graphie "extrémums" parce que c'est celle du programme ; on pourrait aussi écrire "extrema" ou "extremums" mais il faudra absolument éviter l'abominable "extréma").
Dans l'énoncé ci-dessus on pourrait plus généralement supposer que le domaine de f est un *compact* de $\mathbb{R}$ (et la preuve serait la même) ; on reviendra sur cela plus tard.
Si $I = [a, b]$ est un segment, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. C'est un réel positif (et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel formé par les fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$).

Définition 1.13
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in I \ |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \ .$$

Autrement dit : δ ne dépend plus que de ε et pas du point x. Manifestement, cette définition est plus forte que celle de la continuité et est en fait, en général, strictement plus forte.

Exercice 1.14
1. Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $x \mapsto P(x)$ soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On voit que, sur un intervalle non borné, même des fonctions très sympathiques comme $x \mapsto x^2$ ne vont pas être uniformément continues ; et qu'une fonction qui a une limite infinie en 0 ne risque pas d'être uniformément continue sur $]0, 1]$ (pourquoi ?). En utilisant les mêmes idées, on peut se convaincre que, quand l'intervalle I n'est pas un segment, il y a des fonctions continues sur I qui n'y sont pas uniformément continues. Remarquablement, cela n'arrive pas quand I est un segment.

Exercice 1.15 (Théorème de Heine)
Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On souhaite montrer que f est uniformément continue. On raisonne par l'absurde, et on suppose que ce n'est pas le cas.
1. Justifier l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que : pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in [a, b]$ satisfaisant $|x - y| \le \delta$ et $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$.
2. Justifier qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ telles que $|x_n - y_n| \to 0$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$ pour tout $\mathbb{N}$.
3. En utilisant judicieusement le théorème de Bolzano–Weierstrass, obtenir une contradiction.

On continuera dans la séance suivante par une discussion des fonctions dérivables (et on reviendra un peu à cette occasion sur la continuité) ; dans l'immédiat, essayez de démêler l'exercice sur le théorème de Korovkin présenté dans *Analystan* (exercice 4 dans ma version, du 10 mai 2021), qui permet en particulier d'obtenir une preuve du théorème suivant (exercice 5, à faire aussi !).

Théorème 1.16 (Théorème de Weierstrass)
Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge vers f *uniformément*, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup\{|P_n(x) - f(x)|\colon x \in I\}\right) = 0$$

Exercice 1.17
Caractériser toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.