Feuille d'exercices n^o 1 : « Révisions »

Exercice 0. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et $f\colon X \to Y$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. f est continue en 0.
3. Il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in X$ on ait $\|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.
4. f est lipschitzienne.

Dans la suite, on utilise la notation $\|f\|$ pour la norme subordonée de f, définie par

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \neq 0\right\} = \sup\left\{\|f(x)\|_Y : \|x\|_X = 1\right\}.$$

Exercice 1.

1. Soit X, Y, Z trois espaces vectoriels normés, et f une application bilinéaire de $X \times Y$ dans Z. Montrer que f est continue si, et seulement si, il existe $M \geq 0$ telle que pour tout $(x, y) \in X \times Y$ on ait $\|f(x,y)\|_Z \leq M\|x\|_X \|y\|_Y$.
2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé ; on munit $\mathcal{L}(X, X)$ de la norme subordonnée. Montrer que $(f, g) \mapsto f \circ g$ est continue.
3. Soit $X = (C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Montrer que $(f, g) \mapsto fg$ est continue.

Exercice 2. Donner un exemple d'un espace de Banach X et d'une application linéaire continue $T : X \to X$ qui est injective et non surjective. Même question avec T surjective et non injective.

Exercice 3. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans Y.

1. Dans cette question on suppose que X est un espace de Banach. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Gl}(X)$ des applications linéaires continues inversibles est ouvert dans $\mathcal{L}(X, X)$ (on pourra commencer par justifier que $\mathrm{Id} - T$ est inversible dès lors que $\|T\| < 1$) et que $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathrm{Gl}(X)$.
2. Dans cette question, on considère l'espace $E = \mathbf{R}[X]$, muni de la norme
$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\| = \max\{|a_k| : 0 \leq k \leq n\}.$$
Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et $P \in E$ on définit $T_\lambda(P)(X) = \lambda X P(X)$. Montrer que T_λ est continue, et que $\mathrm{Id} - T_\lambda$ tend vers Id (pour la norme subordonnée) quand λ tend vers 0. L'ensemble $\mathrm{Gl}(E)$ est-il ouvert dans $\mathcal{L}(E, E)$?
3. Si X est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Gl}(X)$ est dense dans $\mathcal{L}(X, X)$.
4. Dans cette question on fixe $X = \ell^1(\mathbf{N})$ et on définit $S, T\colon X \to X$ par
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad S(u)(n) = u(n+1) \text{ et } T(u)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ u(n-1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}.$$
   (a) Déterminer les normes de ces applications linéaires ; calculer ST.
   (b) Supposons qu'il existe $V \in \mathrm{Gl}(X)$ telle que $\|T - V\| < 1$. Montrer que $\|\mathrm{Id} - SV\| < 1$ et en déduire que S est bijective.
   (c) Conclusion ?
5. Montrer que pour $A, B \in \mathrm{Gl}(X)$ on a $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$.
6. On suppose de nouveau que X est un espace de Banach. À l'aide de la formule obtenue à la question précédente, montrer que $A \mapsto A^{-1}$ est différentiable sur $\mathrm{Gl}(X)$ et donner une formule explicite pour la différentielle.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbf{R})$ muni d'une norme quelconque, et $T\colon E \to E$ définie par $T(f) = f'$. Montrer que T n'est pas continue.

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$. On fixe $g \in E$ et on pose $T_g(f) = fg$.

1. L'application $T_g\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_1)$ est-elle continue ? Si oui, déterminer sa norme subordonnée.
2. Même question pour $T_g\colon (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$.
3. Même question pour $T_g\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$.
4. Même question pour $T_g\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$.
5. Même question pour $T_g\colon (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et φ une forme linéaire.

1. Montrer que si φ est continue alors $\ker(\varphi)$ est fermé.
   On souhaite maintenant établir la réciproque de cet énoncé ; on suppose que φ n'est pas continue.
2. Montrer qu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E tels que $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\varphi(e_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Soit $x \in E$. En considérant la suite $(x - \varphi(x)e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que $\ker(\varphi)$ est dense dans E.

Exercice 7.

1. Soit $p \in [1, +\infty[$.
   (a) Montrer que l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dense dans $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$.
   (b) En déduire que $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$ est séparable.
2. Montrer que $(\ell^\infty(\mathbf{N}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser un argument diagonal.*

Exercice 8. Dans cet exercice on fixe $p \in \,]1, +\infty[$. On rappelle que l'*exposant conjugué* de p est l'unique $q \in \,]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Notons qu'alors $p(q-1) = q$ et $q(p-1) = p$.

Pour $u \in \ell^p(\mathbf{N})$ on définit $T_u\colon \ell^q(\mathbf{N}) \to \mathbf{C}$ en posant $T_u(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que T_u est bien définie, continue et que $\|T_u\| \leq \|u\|_p$.
2. Soit $\varphi \in \ell_q(\mathbf{N})'$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_n = \varphi(e_n)$, où $(e_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^q(\mathbf{N})$ est telle que $e_n(i) = 1$ si $n = i$ et $e_n(i) = 0$ si $n \neq i$.
   (a) Pour $n \in \mathbf{N}$ on choisit λ_n tel que $|\lambda_n| = 1$ et $\lambda_n u_n = |u_n|$. On pose $\mu_n = \lambda_n |u_n|^{p-1}$. Montrer que
   $$\forall N \in \mathbf{N} \quad \varphi\left(\sum_{n=0}^{N} \mu_n e_n\right) = \sum_{n=0}^{N} |u_n|^p.$$
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $\ell^p(\mathbf{N})$ et $\|u\|_p \leq \|\varphi\|$.
   (c) Montrer que $T_u = \varphi$ (on pourra essayer d'exploiter le fait que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $T_u(e_n) = u_n = \varphi(e_n)$).
3. Quel lien vient-on d'établir entre $\ell^q(\mathbf{N})'$ et $\ell^p(\mathbf{N})$? Énoncer et démontrer un résultat analogue sur le dual topologique de $\ell^1(\mathbf{N})$.