
Feuille d'exercices n° 1 : Compléments

Exercice 1. *Applications linéaires positives.*
On désigne par $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ et par $C_0(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. Ces deux espaces sont munis de la norme du supremum.
Soit $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ une application linéaire ayant la propriété suivante : $f \geqslant 0$ implique $(Tf) \geqslant 0$. Montrer que T est continue. Même question avec $T : C_0(\mathbf{R}) \to C_0(\mathbf{R})$.

Exercice 2. *Théorème de Mazur–Ulam.*
On souhaite démontrer le résultat suivant : soit X un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé et $f\colon X \to X$ une isométrie bijective telle que $f(0) = 0$. Alors f est linéaire.

On suppose que f satisfait les conditions ci-dessus.

1. Montrer que, pour obtenir le résultat, il suffit d'établir que
$$\forall x, y \in X \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
2. On fixe maintenant $x, y \in E$, et on note
$$M = \left\{ z \in X : \|z-x\| = \|z-y\| = \frac{\|x-y\|}{2} \right\}.$$
   (a) Montrer que M est borné.
   On définit par récurrence $M_0 = M$ et $M_{n+1} = \left\{ a \in M_n : \forall b \in M_n \ \|a-b\| \leqslant \frac{\operatorname{diam}(M_n)}{2} \right\}$.
   (b) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de fermés, et que $\operatorname{diam}(M_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{diam}(M_n)$ pour tout n.
   (c) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si $a \in M_n$ alors $x + y - a \in M_n$.
   (d) Prouver que $\frac{x+y}{2} \in M_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Conclure.
4. Quid du cas des espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$?
5. Donner un exemple de $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(0) = 0$, $\|f(x)\|_\infty = |x|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ mais f n'est pas linéaire.

Exercice 3. *Un Banach de dimension infinie ne peut avoir de base (algébrique) dénombrable.*
On suppose que X est un espace de Banach qui n'est pas de dimension finie, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X telle que $\{u_n : n \in \mathbf{N}\}$ soit une famille libre.

1. Montrer que, pour tout n, $F_n = \operatorname{Vect}(u_0, \ldots, u_n)$ est fermé dans X.
2. Construire une suite de réels strictement positifs $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ tels que
$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \alpha_{n+1}\|u_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{3} d(\alpha_n u_n, F_{n-1}) \,.$$
3. Montrer que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k u_k$ est bien défini, et que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $x \notin F_n$.
4. Montrer que X n'admet pas de base dénombrable.

Exercice 4. *Théorème de Banach–Steinhaus.*
Soit X, Y deux espaces vectoriels normés ; on suppose que X est un espace de Banach. On souhaite démontrer le résultat suivant : soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de X vers Y, telle que pour tout $x \in X$, la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée dans Y. Alors la suite des normes $(\|T_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

On se place sous les hypothèses du théorème.

1. *Préliminaire.* Soit $T\colon X \to Y$ une application linéaire continue.
   (a) Soit $x, u \in X$. Montrer que $\|T(u)\| \leqslant \max(\|T(u+x)\|, \|T(u-x)\|)$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$ on a
   $$r \cdot \|T\| \leqslant \sup\{\|T(y)\| : y \in B(x,r)\}.$$
2. *Preuve du théorème.* On raisonne par l'absurde et on suppose que $(\|T_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et telle que $\|T_{\varphi(n)}\| \geqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   Pour simplifier la notation dans la suite, on suppose $\|T_n\| \geqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (b) À l'aide du résultat de (1b), montrer qu'on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $x_0 = 0$ et
   $$\forall n \geqslant 1 \quad \|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 3^{-n} \text{ et } \|T_n(x_n)\| \geqslant \frac{2}{3}3^{-n}\|T_n\| .$$
   (c) Prouver qu'il existe $x \in X$ tel que $\|T_n(x)\|$ tend vers $+\infty$.
   (d) Conclure.
3. La conclusion du théorème de Banach–Steinhaus reste-t-elle valide si on ne suppose pas que X est complet ?

Les résultats des deux exercices précédents sont le plus souvent démontrés à l'aide du théorème de Baire (cf. le cours d'Analyse Fonctionnelle du second semestre).