
Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que toute suite de Cauchy de X est bornée.
2. Montrer que toute suite de Cauchy de X qui admet une valeur d'adhérence converge.
3. Montrer que si (X, d) est compact alors (X, d) est complet.

Exercice 2. Applications linéaires continues

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est continue.
 - (ii) f est continue en 0.
 - (iii) Il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in X$ on ait $\|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.
 - (iv) f est lipschitzienne.

Dans la suite, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans Y .

Pour tout $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, on utilise la notation $\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ (ou $\|f\|$) pour la norme subordonnée de f , définie par

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. Montrer que $\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|f(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|f(x)\|_Y$.
3. Montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$.
4. Soit $(Z, \|\cdot\|_Z)$ un espace vectoriel normé. Soit $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Montrer que $g \circ f \in \mathcal{L}(X, Z)$ et

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}(X, Z)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|g\|_{\mathcal{L}(Y, Z)}$$

5. Montrer que $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)})$ est un espace de Banach.

Exercice 3. Prolongement des applications linéaires continues

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que F est un espace de Banach. Soit G un sous-espace vectoriel de E , dense dans E . Soit $f: G \rightarrow F$ une application linéaire continue.

Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $\tilde{f}: E \rightarrow F$ telle que

$$\text{pour tout } x \in G, \tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|f\|_{\mathcal{L}(G, F)}$$

Exercice 4. Donner un exemple d'un espace de Banach X et d'une application linéaire continue $T: X \rightarrow X$ qui est injective et non surjective. Même question avec T surjective et non injective.

Exercice 5. Applications linéaires continues bijectives

1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
 - (a) Soit $T \in \mathcal{L}(X, X)$ telle que $\|T\|_{\mathcal{L}(X, X)} < 1$. Montrer que la série $\sum T^k$ converge dans $\mathcal{L}(X, X)$, que $Id - T$ est inversible et que

$$(Id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

- (b) On note $Gl(X)$ l'ensemble des applications linéaires continues inversibles de X dans X . Montrer que $Gl(X)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(X, X)$.
- (c) Montrer que $\varphi: Gl(X) \rightarrow Gl(X)$, $A \mapsto A^{-1}$ est continue.
On pourra commencer par montrer que φ est continue au point Id .

2. Dans cette question, on considère l'espace $E = \mathbf{R}[X]$, et on le munit de la norme suivante :

$$\text{pour } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E, \|P\| = \max\{|a_k| : 0 \leq k \leq n\}.$$

- (a) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit $T_\lambda : E \rightarrow E, P \mapsto \lambda XP$. Montrer que T_λ est une application linéaire continue, et que $\text{Id} - T_\lambda$ tend vers Id (pour la norme subordonnée) quand λ tend vers 0.
 - (b) L'ensemble $\text{Gl}(E)$ est-il ouvert dans $\mathcal{L}(E, E)$?
3. Si X est de dimension finie, montrer que $\text{Gl}(X)$ est dense dans $\mathcal{L}(X, X)$.
4. Dans cette question on fixe $X = \ell^1(\mathbf{N})$ et on définit $S, T : X \rightarrow X$ par

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad S(u)(n) = u(n+1) \text{ et } T(u)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ u(n-1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}.$$

- (a) Déterminer les normes de ces applications linéaires ; calculer ST .
- (b) Supposons qu'il existe $V \in \text{Gl}(X)$ telle que $\|T - V\| < 1$. Montrer que $\|\text{Id} - SV\| < 1$ et en déduire que S est bijective.
- (c) Que peut-on en déduire?

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R})$ muni d'une norme quelconque, et $T : E \rightarrow E$ définie par $T(f) = f'$. Montrer que T n'est pas continue.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$. On fixe $g \in E$ non identiquement nulle, et on pose $T_g(f) = fg$.

1. L'application $T_g : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ est-elle continue ? Si oui, déterminer sa norme subordonnée.
2. Même question pour $T_g : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$.
3. Même question pour $T_g : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$.
4. Même question pour $T_g : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$.
5. Même question pour $T_g : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$.
6. Même question pour $T_g : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et φ une forme linéaire sur E .

1. Montrer que si φ est continue alors $\ker(\varphi)$ est fermé.
2. On suppose maintenant que φ n'est pas continue.
 - (a) Montrer qu'il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E tels que $e_n \rightarrow 0$ et $\varphi(e_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
 - (b) Soit $x \in E$. En considérant la suite $(x - \varphi(x)e_n)_{n \in \mathbf{N}}$, montrer que $\ker(\varphi)$ est dense dans E .
 - (c) Montrer que $\ker(\varphi)$ n'est pas fermé dans E .
3. Quel résultat a-t-on démontré ?

Exercice 9. Continuité des applications bilinéaires

1. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ et $(Z, \|\cdot\|_Z)$ trois espaces vectoriels normés. Soit $f : X \times Y \rightarrow Z$ une application bilinéaire.
 - (a) Montrer que f est continue si et seulement s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in X \times Y$ on ait $\|f(x, y)\|_Z \leq M\|x\|_X\|y\|_Y$.
 - (b) On suppose dans cette question que X et Y sont de dimension finie. Montrer que f est continue.
2. Des exemples.
 - (a) Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, on note $E = \mathcal{L}(X, X)$ et on le munit de la norme subordonnée. Montrer que $\phi : E \times E \rightarrow E, (f, g) \mapsto f \circ g$ est continue.
 - (b) On note $X = \mathcal{C}([0, 1])$, on le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $\phi : X \times X \rightarrow X, (f, g) \mapsto fg$ est continue.
 - (c) Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés, on munit $\mathcal{L}(X, Y)$ de la norme subordonnée. Montrer que $\phi : \mathcal{L}(X, Y) \times X \rightarrow Y, (f, x) \mapsto f(x)$ est continue.

Exercice 10. Révisions : normes p sur $\mathbf{K}^N$

Soit $p \in [1, \infty]$. On note q l'exposant conjugué de p défini par : $q \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On rappelle que pour tout $x = (x_j)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbf{K}^N$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{1/p} \quad \text{si } p \in [1, \infty[, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |x_j|$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes sur $\mathbf{K}^N$.
2. On suppose que $p \neq 1, \infty$. Montrer l'inégalité de Young, en utilisant par exemple la concavité de la fonction $\ln$: pour tout $a, b > 0$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

3. Montrer l'inégalité de Hölder : pour tout $u, v \in \mathbf{K}^N$, $\left| \sum_{j=1}^N u_j v_j \right| \leq \|u\|_p \|v\|_q$.

On commencera par le cas où $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$.

4. On suppose que $p \neq 1, \infty$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{K}^N$, $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
On appliquera l'inégalité de Hölder avec $u_j = |x_j|$ ou $|y_j|$ et $v_j = |x_j + y_j|^{p-1}$.
5. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbf{K}^N$.

Exercice 11. Espaces ℓ^p , normes ℓ^p

Soit $p \in [1, \infty]$. On note q son exposant conjugué.

Pour $p = \infty$, $\ell^\infty(\mathbf{N})$ est l'espace des suites bornées à valeurs dans $\mathbf{K}$. On définit pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbf{N})$, $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbf{N}} |x(k)|$.

Pour $p \in [1, \infty[$, $\ell^p(\mathbf{N})$ est l'espace des suites x à valeurs dans $\mathbf{K}$ telles que $\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{1/p} < +\infty$.

1. Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ est un espace vectoriel normé.
2. Montrer l'inégalité de Hölder : pour tout $x = (x(k))_{k \in \mathbf{N}} \in \ell^p$, tout $y = (y(k))_{k \in \mathbf{N}} \in \ell^q$,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} x(k)y(k) \right| \leq \|x\|_{\ell^p} \|y\|_{\ell^q}$$

3. Soit $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ tels que $p_1 \leq p_2$. Montrer que $\ell^{p_1}(\mathbf{N}) \subset \ell^{p_2}(\mathbf{N})$.

Exercice 12. Espaces ℓ^p , complétude

1. Justifier en utilisant un résultat donné en cours que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ est un espace de Banach.
2. Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$ est un espace de Banach.

Exercice 13. Espaces ℓ^p , sous-espaces, séparabilité

1. Soit $p \in [1, +\infty[$.
 - (a) On note $s_0(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que $s_0(\mathbf{N})$ est dense dans $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$.
 - (b) En déduire que $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$ est séparable.
2. Montrer que $(\ell^\infty(\mathbf{N}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable.
3. On note $c_0(\mathbf{N}) = \left\{ x = (x(k))_{k \in \mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \mid x(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \right\}$.

Montrer que $c_0(\mathbf{N})$ est un sous-espace vectoriel fermé dans $(\ell^\infty(\mathbf{N}), \|\cdot\|_\infty)$.

Montrer que $c_0(\mathbf{N})$ est l'adhérence de $s_0(\mathbf{N})$ dans $(\ell^\infty(\mathbf{N}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 14. Identification d'un espace avec un dual

1. Soit E et F des espaces de Banach, $\mathcal{B}$ une forme bilinéaire continue sur $F \times E$. On note $E' = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ le dual topologique de E . On définit $T_{\mathcal{B}}: F \rightarrow E'$ par : pour tout $y \in F$, tout $x \in E$,

$$T_{\mathcal{B}}(y)(x) = \mathcal{B}(y, x)$$

Montrer que $T_{\mathcal{B}}$ est une application linéaire continue.

On dit que $\mathcal{B}$ identifie E' et F si $T_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.

2. Cas de la dimension finie. Soit E un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension N , $(e_1, \dots, e_N)$ une base de E . On définit $\mathcal{B}: E \times E \rightarrow \mathbf{K}$ par : pour tout $x = \sum_{j=1}^N x_j e_j$, tout $y = \sum_{j=1}^N y_j e_j$,

$$\mathcal{B}(y, x) = \sum_{j=1}^N y_j x_j$$

Montrer que $\mathcal{B}$ identifie E' à E . On pourra utiliser la base duale $(e_1^*, \dots, e_N^*)$.

Exercice 15. Espaces ℓ^p , dualité

Soit $p \in]1, +\infty[$. On note q l'exposant conjugué de p . On remarque que $p(q-1) = q$ et $(p-1)q = p$.

Dans la suite, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note e_n la suite telle que $e_n(j) = 1$ si $j = n$, et $e_n(j) = 0$ sinon.

On veut montrer que $(\ell^p(\mathbf{N}))'$ s'identifie à $\ell^q(\mathbf{N})$.

Pour cela, on définit $\mathcal{B}: \ell^q(\mathbf{N}) \times \ell^p(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{K}$ par : pour tout $(y, x) \in \ell^q(\mathbf{N}) \times \ell^p(\mathbf{N})$,

$$\mathcal{B}(y, x) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)y(j)$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une forme bilinéaire continue.
2. Avec les notations de l'exercice précédent, on veut montrer que $T_{\mathcal{B}}$ est bijective.
 - (a) Soit $\varphi \in (\ell^p(\mathbf{N}))'$. On pose pour tout $j \in \mathbf{N}$, $y(j) = \varphi(e_j)$. Pour tout $j \in \mathbf{N}$, on choisit $\lambda_j \in \mathbf{K}$ tel que $\lambda_j y(j) = |y(j)|$ et on pose $\mu_j = \lambda_j |y(j)|^{q-1}$. Soit $J \in \mathbf{N}$, on définit $x_J = \sum_{j=0}^J \mu_j e_j$. Montrer que

$$\varphi(x_J) = \sum_{j=0}^J |y(j)|^q \quad \text{et} \quad \|x_J\|_{\ell^p}^p = \sum_{j=0}^J |y(j)|^q$$

- (b) En déduire que $y \in \ell^q(\mathbf{N})$ et $\|y\|_{\ell^q} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'}.$
 - (c) Montrer que pour toute $x \in \ell^p(\mathbf{N})$ nulle à partir d'un certain rang, $\mathcal{B}(y, x) = \varphi(x)$. En déduire que $T_{\mathcal{B}}(y) = \varphi$.
 - (d) Conclure.
 - (e) Montrer que $T_{\mathcal{B}}$ est une isométrie.
3. Montrer de même que $(\ell^1(\mathbf{N}))'$ s'identifie à $\ell^\infty(\mathbf{N})$.
4. Montrer de même que $(c_0(\mathbf{N}))'$ s'identifie à $\ell^1(\mathbf{N})$.