

---

Feuille d'exercices n° 2 : Compacité

---

**Exercice 1.** *Théorème de Riesz.*

Dans cet exercice on fixe un espace vectoriel normé  $(X, \|\cdot\|)$ .

1. (a) Soit  $Y$  un sous-espace vectoriel fermé de  $X$ , distinct de  $X$ , et  $0 < r < 1$ . Montrer qu'il existe  $x \in X$  tel que  $\|x\| = 1$  et  $d(x, Y) \geq r$ .

**Indication.** Fixer  $u \in X \setminus Y$  de norme 1, un vecteur  $y \in Y$  tel que  $\|u - y\| \leq \frac{1}{r}d(u, Y)$ , et considérer  $x = \frac{u-y}{\|u-y\|}$ .

- (b) On suppose que  $Y$  est de dimension finie, contenu dans  $X$  et distinct de  $X$ . Montrer qu'il existe  $x \in X$  tel que  $\|x\| = 1$  et  $d(x, Y) = 1$ .

2. Dans cette question on suppose que  $X$  n'est pas de dimension finie.

- (a) Construire une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $X$  tels que  $\|x_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , et  $\|x_n - x_m\| \geq 1$  pour tout  $n \neq m \in \mathbf{N}$ .

- (b) Montrer que la boule unité fermée de  $(X, \|\cdot\|)$  n'est pas compacte.

**Exercice 2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(X, d)$  est compact.
- $(X, d)$  est à la fois complet et *précompact*, autrement dit pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $x_1, \dots, x_n \in X$  tels que  $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ .

**Indication.** Montrer que dans un espace précompact toute suite admet une sous-suite de Cauchy.

**Exercice 3.** Montrer que tout espace métrique compact est séparable.

**Indication.** Utiliser la précompacité.

**Exercice 4.** *Théorème de Dini.*

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact, et  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbf{R}$ . On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge simplement vers 0, et que pour tout  $x \in X$  la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers 0.

**Indication.** Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, considérer les fermés  $F_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \varepsilon\}$  pour  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**Exercice 5.** Soit  $X, Y$  deux espaces métriques et  $f : X \rightarrow Y$  une fonction.

- Montrer que  $f$  est continue si, et seulement si, la restriction  $f|_K$  est continue pour tout compact  $K \subseteq X$ .
- On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de fonctions continues qui converge vers  $f$  uniformément sur les compacts. Montrer que  $f$  est continue.

**Exercice 6.** *Théorème de Stone–Weierstrass.*

Dans cet exercice, on fixe un espace métrique compact  $(X, d)$ , ainsi qu'un sous-espace vectoriel  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  avec les propriétés suivantes :

- Pour tout  $f, g \in \mathcal{A}$  leur produit  $fg$  appartient aussi à  $\mathcal{A}$ .
- Les fonctions constantes appartiennent à  $\mathcal{A}$ .
- Pour tout  $x \neq y \in X$ , il existe  $f \in \mathcal{A}$  tel que  $f(x) \neq f(y)$ .

Le premier objectif de l'exercice est de démontrer que  $\mathcal{A}$  est dense dans  $(\mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .

- Faire le lien entre cet énoncé et le théorème de Weierstrass, qu'on suppose connu (et qu'on va utiliser dans la suite).

2. (a) Montrer que si  $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  on a  $\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ ; donner une formule analogue pour  $\min(f, g)$ .
- (b) Montrer que si  $f, g \in \mathcal{A}$  alors  $\max(f, g)$  et  $\min(f, g)$  appartiennent à  $\overline{\mathcal{A}}$ .  
**Indication.** Commencer par traiter le cas où  $\|f\|_\infty$  et  $\|g\|_\infty$  sont plus petits que  $\frac{1}{2}$ , et utiliser le fait que  $t \mapsto |t|$  est limite uniforme de fonctions polynômes sur  $[-1, 1]$ .
3. Montrer que si  $x_1 \neq x_2 \in X$  et  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$  alors il existe  $f \in \mathcal{A}$  telle que  $f(x_1) = \alpha_1$  et  $f(x_2) = \alpha_2$ .
4. On fixe  $g \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  et  $\varepsilon > 0$ .
- (a) Soit  $x \in X$ . Pour tout  $y \in X$  on fixe  $f_y \in \mathcal{A}$  telle que  $f_y(x) = g(x)$  et  $f_y(y) = g(y)$ .  
Montrer, à l'aide de la propriété de Borel–Lebesgue, qu'il existe  $y_1, \dots, y_n \in X$  tels que pour tout  $z \in X$  il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $f_{y_i}(z) > g(z) - \varepsilon$ .  
**Indication.** Considérer les ouverts  $U_y = \{z: f_y(z) > g(z) - \varepsilon\}$ .  
On pose  $h_x = \max(f_{y_1}, \dots, f_{y_n})$ .
- (b) Montrer que  $h_x \in \overline{\mathcal{A}}$ ,  $h_x(x) = g(x)$  et que pour tout  $z \in X$  on a  $h_x(z) > g(z) - \varepsilon$ .
- (c) En utilisant une idée similaire à celle qui nous a permis de construire les  $h_x$ , montrer qu'il existe  $h \in \overline{\mathcal{A}}$  telle que pour tout  $x \in X$  on ait  $g(x) - \varepsilon < h(x) < g(x) + \varepsilon$ .
5. Application. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une partie dénombrable dense de  $(X, d)$ . On note  $f_n(x) = d(x_n, x)$  et on note  $\mathcal{A}$  la  $\mathbf{Q}$ -algèbre engendrée par  $\{f_n: n \in \mathbf{N}\}$  et la fonction constante  $x \mapsto 1$ .
- (a) Montrer que  $\mathcal{A}$  est dénombrable.
- (b) À l'aide du théorème de Stone–Weierstrass, montrer que  $\mathcal{A}$  est dense dans  $(\mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$  et obtenir une nouvelle preuve du résultat vu en cours selon lequel  $(\mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$  est séparable.
6. (a) Soit  $\mathbf{D}$  le disque unité fermé de  $\mathbf{C}$ . Les fonctions polynomiales sont-elles denses dans  $\mathcal{C}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$ ?
- (b) Énoncer et démontrer un analogue du théorème de Stone–Weierstrass, valide pour des fonctions définies sur  $\mathbf{D}$  et à valeurs dans  $\mathbf{C}$ .