Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2025-2026**

M1 - Mathématiques générales — UE : Analyse Fonctionnelle 1

Feuille d'exercices n° 2 : Compacité

__Exercice 1.__ *Théorème de Riesz.*
Dans cet exercice on fixe un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$.

1. (a) Soit Y un sous-espace vectoriel fermé de X, distinct de X, et $0 < r < 1$. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, Y) \geqslant r$.
   Indication. Fixer $u \in X \backslash Y$ de norme 1, $y \in Y$ tel que $\|u - y\| \leqslant \frac{1}{r} d(u, Y)$, et considérer $x = \frac{u-y}{\|u-y\|}$.
   (b) On suppose que Y est de dimension finie, contenu dans X et distinct de X. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, Y) = 1$.
2. Dans cette question on suppose que X n'est pas de dimension finie.
   (a) Construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de X tels que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ pour tout $n \neq m \in \mathbf{N}$.
   (b) Montrer que la boule unité fermée de $(X, \|\cdot\|)$ n'est pas compacte.

__Exercice 2.__ Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (X, d) est compact.
2. (X, d) est à la fois complet et *précompact*, autrement dit pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

Indication. Montrer que dans un espace précompact toute suite admet une sous-suite de Cauchy.

__Exercice 3.__ Pour $x \in \ell^1(\mathbf{N})$ et $N \in \mathbf{N}$ on note $R_N(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} |x(n)|$.

1. Supposons que $K \subseteq \ell^1(\mathbf{N})$ est compact. Montrer que $(R_N)_{N \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur K vers la fonction nulle.
2. Que pensez-vous de la réciproque du résultat de la question précédente ?

__Exercice 4.__ Montrer que tout espace métrique compact est séparable.
Indication. Utiliser la précompacité.

__Exercice 5.__ *Théorème de Dini.*
Soit (X, d) un espace métrique compact, et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbf{R}$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers 0, et que pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers 0.
Indication. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérer les fermés $F_n = \{x \in X : f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

__Exercice 6.__ Soit X, Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction.

1. Montrer que f est continue si, et seulement si, la restriction $f_{|K}$ est continue pour tout compact $K \subseteq X$.
2. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge vers f uniformément sur les compacts. Montrer que f est continue.

Exercice 7. *Théorème de Stone–Weierstrass.*
Dans cet exercice, on fixe un espace métrique compact (X,d), ainsi qu'un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ avec les propriétés suivantes :

- Pour tout $f,g \in \mathcal{A}$ leur produit fg appartient aussi à $\mathcal{A}$.
- Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
- Pour tout $x \neq y \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

(On dit alors que $\mathcal{A}$ est une *sous-algèbre* de $C(X,\mathbf{R})$).

Le premier objectif de l'exercice est de démontrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathcal{C}(X,\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Faire le lien entre cet énoncé et le théorème de Weierstrass, qu'on suppose connu (et qu'on va utiliser dans la question suivante).
2. (a) Montrer que si $f \in \mathcal{A}$ alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.
   (b) En déduire que si $f \in \overline{\mathcal{A}}$ alors $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.
3. (a) Montrer que si $f,g \in \mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ on a $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$; donner une formule analogue pour $\min(f,g)$.
   (b) Montrer que si $f,g \in \overline{\mathcal{A}}$ alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ appartiennent à $\overline{\mathcal{A}}$.
4. Montrer que si $x_1 \neq x_2 \in X$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ alors il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x_1) = \alpha_1$ et $f(x_2) = \alpha_2$.
5. On fixe $g \in \mathcal{C}(X,\mathbf{R})$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Soit $x \in X$. Pour tout $y \in X$ on fixe $f_y \in \mathcal{A}$ telle que $f_y(x) = g(x)$ et $f_y(y) = g(y)$.
   Montrer, à l'aide de la propriété de Borel–Lebesgue, qu'il existe $y_1, \ldots, y_n \in X$ tels que pour tout $z \in X$ il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $f_{y_i}(z) > g(z) - \varepsilon$.
   Indication. Considérer les ouverts $U_y = \{z : f_y(z) > g(z) - \varepsilon\}$.
   On pose $h_x = \max(f_{y_1}, \ldots, f_{y_n})$.
   (b) Montrer que $h_x \in \overline{\mathcal{A}}$, $h_x(x) = g(x)$ et que pour tout $z \in X$ on a $h_x(z) > g(z) - \varepsilon$.
   (c) En utilisant une idée similaire à celle qui nous a permis de construire les h_x, montrer qu'il existe $h \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que pour tout $x \in X$ on ait $g(x) - \varepsilon < h(x) < g(x) + \varepsilon$.
6. Application. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une partie dénombrable dense de (X,d). On note $f_n(x) = d(x_n, x)$ et on note $\mathcal{A}$ la $\mathbf{Q}$-algèbre engendrée par $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ et la fonction constante $x \mapsto 1$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}$ est dénombrable.
   (b) À l'aide du théorème de Stone–Weierstrass, montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathcal{C}(X,\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$, puis que $(\mathcal{C}(X,\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable.
7. (a) Soit $\mathbf{D}$ le disque unité fermé de $\mathbf{C}$. Les fonctions polynomiales sont-elles denses dans $\mathcal{C}(\mathbf{D},\mathbf{C})$?
   (b) Énoncer et démontrer un analogue du théorème de Stone–Weierstrass, valide pour des fonctions définies sur $\mathbf{D}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Exercice 8. Soit (X,d) un espace métrique et $K \subset X$ une partie compacte non vide. On note $\mathcal{C}_b(X)$ l'espace des fonctions continues bornées sur X, à valeurs réelles, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K, à valeurs réelles, qu'on munit également de $\|\cdot\|_\infty$.
On considère l'application $\Phi \colon \mathcal{C}_b(X) \to \mathcal{C}(K)$ qui à $f \in \mathcal{C}_b(X)$ associe sa restriction à K.

1. Montrer que Φ est continue et déterminer sa norme subordonnée.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Montrer qu'il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b(X)$ telle que $\Phi(\tilde{f}) = \Phi(f)$ et $\|\tilde{f}\|_\infty = \|\Phi(f)\|_\infty$.
3. Á l'aide du théorème de Stone–Weierstrass, démontrer que $\mathrm{Im}(\Phi)$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$.
4. Montrer que $(\mathrm{Im}(\Phi), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
   Indication. Considérer une série absolument convergente $\sum_n \Phi(f_n)$ dans $\mathrm{Im}(\Phi)$; justifier et exploiter le fait que $\sum_n \tilde{f}_n$ est aussi absolument convergente.
5. Montrer que toute $f \in \mathcal{C}(K)$ admet un prolongement continu $g \in \mathcal{C}(X)$ tel que $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.