Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2024-2025**
M1 - Mathématiques générales | UE : Analyse Fonctionnelle 1

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. *Un cas particulier du théorème de prolongement de Tietze.*
Soit (X, d) un espace métrique et $K \subseteq X$ une partie compacte non vide. On note $\mathcal{C}_b(X)$ l'espace des fonctions continues bornées sur X, à valeurs réelles, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K, à valeurs réelles, qu'on munit également de $\|\cdot\|_\infty$.
On considère l'application $\Phi\colon \mathcal{C}_b(X) \to \mathcal{C}(K)$ qui à $f \in \mathcal{C}_b(X)$ associe sa restriction à K.

1. Montrer que Φ est continue et déterminer sa norme subordonnée.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Montrer qu'il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b(X)$ telle que $\Phi(\tilde{f}) = \Phi(f)$ et $\|\tilde{f}\|_\infty = \|\Phi(f)\|_\infty$.
3. Á l'aide du théorème de Stone–Weierstrass, démontrer que $\mathrm{Im}(\Phi)$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$.
4. Montrer que $(\mathrm{Im}(\Phi), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
   Indication. Considérer une série absolument convergente $\sum_n \Phi(f_n)$ dans $\mathrm{Im}(\Phi)$; justifier et exploiter le fait que $\sum_n \tilde{f}_n$ est aussi absolument convergente.
5. Montrer que toute $f \in \mathcal{C}(K)$ admet un prolongement continu $g \in \mathcal{C}(X)$ tel que $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Exercice 2. *Convergence faible dans un espace de Hilbert.*

1. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de H *converge faiblement* vers $x \in H$ si $\langle x_n, y\rangle$ tend vers $\langle x, y\rangle$ pour tout $y \in H$.
   On suppose que H est séparable. Montrer, à l'aide du théorème de Banach–Alaoglu, que toute suite bornée d'éléments de H admet une sous-suite qui converge faiblement.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de H qui converge faiblement vers $x \in H$.
   (a) Montrer que $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.
   (b) On suppose de plus que $\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x.
3. Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que (e_n) converge faiblement vers 0.

Exercice 3.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$. On suppose que $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et qu'il existe une constante M telle que $\|f_n'\|_\infty \leqslant M$ pour tout $n \in N$.
   Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément. La limite appartient-elle nécessairement à $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$?
2. Soit F l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $f \in F$ telle que
$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sup\left\{\int_0^1 g(t)\,dt \colon g \in F\right\}$$

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue à support compact différente de la fonction nulle.
Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ on pose $f_n(x) = f(x+n)$. Montrer que :

1. La famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équicontinue.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est relativement compact.
3. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente dans $(C_b(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 5. Dans cet exercice on note $H = (L^2([0,1]), \|\cdot\|_2)$. Pour $f \in H$ et $x \in [0,1]$ on pose
$$T(f)(x) = \int_0^x f(u)du$$

1. Montrer que $T\colon H \to H$ est bien définie, continue, et que l'image de T est contenue dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$.
2. On note B la boule unité fermée de H. Montrer que $T(B)$ est relativement compact dans H (on pourra commencer par essayer de montrer que $T(B)$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.