

Feuille d'exercices n° 3

Dans toute la feuille, sauf mention contraire, les espaces de Hilbert considérés sont réels.

Exercice 1. Identité du parallélogramme et conséquences.

Soit H un espace de Hilbert réel.

1. Montrer l'égalité suivante, dite *identité du parallélogramme* : pour tout $x, y \in H$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. (a) Soit $x, y, z \in H$. Montrer que $\left(\|z - x\| = \|z - y\| = \frac{\|x - y\|}{2}\right) \iff \left(z = \frac{x + y}{2}\right)$.
(b) Soit $f: H \rightarrow H$ une isométrie : pour tout $x, y \in H$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. On suppose de plus que $f(0) = 0$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 2. Dans cet exercice on note $H = (L^2([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_2)$. Pour $f \in H$ et $x \in [0, 1]$ on pose

$$T(f)(x) = \int_0^x f(u) du.$$

1. Montrer que $T: H \rightarrow H$ est bien définie et continue.
2. Déterminer T^* , l'adjoint de T .
3. Montrer que l'image de T est contenue dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$.
4. On note B la boule unité fermée de H . Montrer que $T(B)$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
En déduire que $T(B)$ est relativement compact dans H .

Exercice 3. Soit E, F deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert H .

Montrer que $(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$ et que $(E \cap F)^\perp = \overline{E^\perp + F^\perp}$.

Exercice 4.

1. Soit $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert réel, a un élément non nul dans H . Montrer que pour tout $x \in H$,

$$d\left(x, (\mathbf{R}a)^\perp\right) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}.$$

2. Dans cette question, on considère $H = L^2([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

$$\text{On note } F = \left\{ f \in H : \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}.$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de H .
(b) Montrer que $F^\perp$ est l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$.
(c) Calculer $d(g, F)$ pour $g: t \mapsto e^t$.

Exercice 5.

Soit $a < b$ deux réels. Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1], \mathbf{R})$, muni de $\|\cdot\|_2$, on considère le sous-ensemble

$$C = \{f \in L^2([0, 1]) : a \leq f \leq b \text{ presque partout}\}.$$

1. Montrer que C est convexe et fermé dans H .
2. Soit $g \in H$. Déterminer $P_C(g)$.

Exercice 6.

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni du produit scalaire de $L^2([0, 1])$, et de la norme associée. Pour $a \in]0, 1[$ on note F_a l'ensemble des éléments de E qui sont nuls sur $[0, a]$.

1. Montrer que F_a est fermé dans E et déterminer $F_a^\perp$.
2. Montrer que $F_a \oplus F_a^\perp \neq E$. Expliquer.

Exercice 7. Projecteurs et projecteurs orthogonaux.

Soit H un espace de Hilbert réel et $P: H \rightarrow H$ une application linéaire telle que $P \circ P = P$ (on dit que P est un projecteur).

1. Montrer que $\text{Im}(P) = \ker(\text{Id}_H - P)$, puis que $H = \ker(P) \oplus \text{Im}(P)$.
2. On suppose de plus que P est continue et non nulle.
 - (a) Montrer que $\ker(P)$ et $\text{Im}(P)$ sont des sous-espaces vectoriels fermés de H .
 - (b) Montrer que P est la projection orthogonale sur $\text{Im}(P)$ si et seulement si $P^* = P$.
 - (c) Montrer que P est la projection orthogonale sur $\text{Im}(P)$ si et seulement si $\|P\|_{\mathcal{L}} = 1$.

Indication. Pour la réciproque, on pourra pour $x \in H$, $y \in \text{Im}(P)$, et $t \in \mathbf{R}$, développer et majorer $\|P(y + tx)\|^2$.

Exercice 8. Des propriétés de l'adjoint.

Soit H un espace de Hilbert réel et $T: H \rightarrow H$ une application linéaire continue. On rappelle que l'adjoint de T , noté T^* , est l'unique élément de $\mathcal{L}(H, H)$ tel que, pour tout $x, y \in H$, on ait $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$.

1. Montrer que $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup\{|\langle T(x), y \rangle| : x, y \in H, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.
2. On suppose que $T^* = T$. Montrer que

$$\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup\{|\langle T(x), x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Indication. On pourra pour $x, y \in H$, exprimer $\langle T(x), y \rangle$ en fonction de $\langle T(x + y), x + y \rangle$ et $\langle T(x - y), x - y \rangle$.

3. On suppose à nouveau que $T^* = T$.
 - (a) On dit que T est *positif* si pour tout $x \in H$, $\langle T(x), x \rangle \geq 0$.
Montrer que $\ker(T) = \{x \in H : \langle T(x), x \rangle = 0\}$.
Indication. On pourra développer $\langle T(x + ty), x + ty \rangle$.
 - (b) On suppose qu'il existe $x_0 \in H$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\langle T(x_0), x_0 \rangle = \|T\|_{\mathcal{L}}$. Montrer que x_0 est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\|T\|_{\mathcal{L}}$.
Indication. Commencer par établir que $\|T\|_{\mathcal{L}}\text{Id} - T$ est autoadjoint et positif.
 - (c) Montrer que si H est de dimension finie alors T est diagonalisable dans une base orthonormale (on a ainsi retrouvé le théorème spectral).
4. Soit $H = L^2([0, 1])$, et T défini par

$$\forall f \in H \forall t \in [0, 1] \quad T(f)(t) = tf(t).$$

Montrer que T est continu, autoadjoint et n'admet pas de valeur propre.

Exercice 9. Théorème de Lax-Milgram.

Soit $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert réel, $a: H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ une forme bilinéaire sur H et $L: H \rightarrow H$ une forme linéaire sur H . On suppose que :

- (i) a est continue : il existe $C \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x, y \in H$, $|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$;
- (ii) a est coercive : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in H$, $a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$;
- (iii) L est continue.

Le premier objectif de cet exercice est de montrer que sous ces hypothèses, il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $a(u, y) = L(y)$ (théorème de Lax-Milgram).

1. *Préliminaire : caractérisation des isomorphismes.* Soit $T : H \rightarrow H$ une application linéaire continue. Montrer que T est inversible, d'inverse continu, si et seulement si il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in H$, $\|T(x)\| \geq m\|x\|$.

Indication. Pour la réciproque, on montrera que $\text{Im}(T)$ est fermé et dense dans H .

2. *Preuve du théorème de Lax-Milgram.*

- (a) Montrer qu'il existe $v \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $L(y) = \langle v, y \rangle$.
- (b) Montrer que pour tout $x \in H$, il existe un unique w_x tel que pour tout $y \in H$, $a(x, y) = \langle w_x, y \rangle$.
On note $A : H \rightarrow H$, $x \mapsto w_x$.
- (c) Montrer que A est une application linéaire et continue.
- (d) Montrer que A est inversible.
- (e) Conclure.

3. *Cas où a est de plus symétrique.*

- (a) Montrer que dans ce cas, a définit un produit scalaire sur H et que la norme associée, est équivalente à $\|\cdot\|$. En déduire une preuve directe du théorème précédent dans ce cas.
- (b) Montrer que dans ce cas, l'élément $u \in H$ obtenu précédemment est caractérisé par

$$J(u) = \min_{x \in H} J(x), \quad \text{où} \quad J : H \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2} a(x, x) - L(x)$$

4. Dans cette question, on montre un résultat utile pour construire des solutions approchées (méthode de Galerkin).

L'élément u est celui construit à la question 2. Supposons que $(F_n)_n$ est une suite de sous-espaces vectoriels de dimension finie de H , croissante pour l'inclusion et telle que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$ soit dense dans H .

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique $u_n \in F_n$ tel que pour tout $y \in F_n$, $a(u_n, y) = L(y)$.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|u_n - u\| \leq \frac{C}{\alpha} d(u, F_n)$.
En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers u .

Exercice 10. Séries de Fourier.

Dans cet exercice, toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$ et 2π -périodiques. On note :

1. $\mathcal{C}_{per}$ l'ensemble des fonctions continues ;
2. L^2_{per} l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables vérifiant $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$

On définit sur L^2_{per} le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$: pour tout $f, g \in L^2_{per}$, $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$; on note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

3. quand il existe, on note pour $x \in \mathbf{R}$, $f * g(x)$ le produit de convolution de f et g au point x :

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y) dy$$

4. pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $e_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $x \mapsto e^{inx}$; et pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}_N = \text{Vect}(e_{-N}, \dots, e_N)$, l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$;
5. pour $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ 2π -périodique, quand cela a un sens,
 - pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$;
 - pour tout $N \in \mathbf{N}$, $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$.

1. *Théorème de Fejér, convergence uniforme en moyenne de Cesàro.*

Soit $f \in \mathcal{C}_{per}$. On note pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f)$.

- (a) Montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, $S_N(f) = f * D_N$ et $\sigma_N(f) = f * K_N$, où D_N et K_N sont les noyaux de Dirichlet et de Fejér définis et étudiés à l'exercice suivant.
- (b) Montrer que $(\sigma_N(f))_{N \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f . On utilisera les propriétés de K_N montrées à l'exercice suivant.

2. *Base hilbertienne.* Montrer que la famille $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est orthonormale dans L^2_{per} .

En utilisant le théorème de Fejér, montrer ensuite que $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2_{per} .

3. Soit $f \in L^2_{per}$. Montrer que tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$, et que pour tout $N \in \mathbf{N}$, $f - S_N(f)$ et $S_N(f)$ sont orthogonaux.

4. *Projection orthogonale.* Soit $f \in L^2_{per}$, $N \in \mathbf{N}$. Montrer que $\|f - S_N(f)\|_2 = \min_{p \in \mathcal{P}_N} \|f - p\|_2$.

5. Montrer que l'application $L^2_{per} \rightarrow \ell^2(\mathbf{Z})$, $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ est une isométrie bijective. En particulier, on a l'égalité de Parseval : $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$.

Exercice 11. Les noyaux de Dirichlet et Fejér.

On définit, pour tout $N \in \mathbf{N}$, le N^e noyau de Dirichlet D_N et le N^e noyau de Fejér K_N par :

$$D_N = \sum_{n=-N}^N e_n \quad \text{et} \quad K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n$$

1. Soit $N \in \mathbf{N}$. Montrer les propriétés suivantes du noyau de Dirichlet :

(a) D_N est pair et $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x) dx = 1$;

(b) pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbf{Z} \\ 2N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbf{Z} \end{cases}$$

2. Soit $N \in \mathbf{N}$. Montrer les propriétés suivantes du noyau de Fejér :

(a) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x) dx = 1$;

(b) pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$K_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{(N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 & \text{si } x \notin 2\pi\mathbf{Z} \\ N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbf{Z} \end{cases}$$

(en particulier, K_N est positif);

(c) pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, $(K_N)_N$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$;

(d) pour tout $\alpha \in]0, \pi[$

$$\int_{\alpha \leq |x| \leq \pi} K_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$