Feuille d'exercices n° 4 : Espaces de Hilbert

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert complexe ; on le voit comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et on le munit de la forme bilinéaire $b\colon (x,y) \mapsto \mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$.

1. Montrer que $\widetilde{H} = (H,b)$ est un espace de Hilbert réel.
2. Donner une formule permettant de retrouver le produit scalaire de H à partir de b.
3. Comment produire une base orthonormée de $\widetilde{H}$ à partir d'une base orthonormée de H ?

Exercice 2. *Identité du parallélogramme et ses conséquences.*

1. Montrer l'égalité suivante, dite *identité du parallélogramme* (pourquoi ?), valable pour $x, y \in H$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{1}$$
L'identité du parallélogramme caractérise les espaces de Hilbert (pour un énoncé précis, voir la feuille d'exercices de complément sur la page de l'UE)
2. (a) Soit $x, y \in$ et $z = \frac{x+y}{2}$. Montrer que z est l'unique élément de H tel que $\|z-x\| = \|z-y\| = \frac{\|x-y\|}{2}$.
   (b) Soit $f\colon H \to H$ une isométrie telle que $f(0) = 0$. Montrer que f est linéaire.
3. Montrer que H est *strictement convexe*, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall x, y \in H \quad (\|x\| \leqslant 1 \text{ et } \|y\| \leqslant 1 \text{ et } \|x-y\| \geqslant \delta) \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \varepsilon$$
(faites un dessin pour comprendre le sens de cet énoncé !)
Donnez un exemple d'espace de Banach qui n'est pas strictement convexe.

Exercice 3. *Autour du théorème de projection sur un convexe fermé.*

1. À l'aide du résultat du premier exercice de cette feuille, expliquer comment déduire le cas complexe du théorème de projection sur un convexe fermé (dans un espace de Hilbert) à partir du cas réel.
2. Soit $a < b$ deux réels. Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1],\mathbf{R})$, on considère le sous-ensemble
$$C = \left\{f \in L^2([0,1])\colon a \leqslant f \leqslant b \text{ presque partout}\right\}.$$
Vérifier que C est convexe et fermé, et déterminer $P_C(g)$ pour $g \in H$.
3. Supposons que H admette une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et posons $F = \left\{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)e_n\colon n \in \mathbf{N}\right\}$. Montrer que F est fermé. Est-ce que 0 admet une projection sur F ?
4. Soit $E \neq H$ un sous-espace vectoriel dense de H (pouvez-vous donner un exemple ?), et $z \in H\backslash E$. On définit
$$F = \{e \in E\colon \langle e,z\rangle = 0\}$$
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de E, et que $F \neq E$.
   (b) Soit $e \in E\backslash F$. Montrer que e n'admet pas de projection orthogonale sur F.
   Indication. Commencer par montrer que F est dense dans $(\mathbf{R}z)^\perp$.

Exercice 4. Soit E, F deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert H.
Montrer que $(E+F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$ et que $(E \cap F)^\perp = \overline{E^\perp + F^\perp}$.

Exercice 5.
Soit $P\colon H \to H$ une application linéaire continue non nulle telle que $P^2 = P$, et soit E l'image de P. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. P est la projection orthogonale sur E.
2. $\|P\| = 1$.
3. $\forall x \in H \quad \langle P(x), x\rangle \leqslant \|x\|^2$.
   (pour la dernière implication, considérer $\langle P(x+ty), x+ty\rangle$ où $x \in \mathrm{Im}(P)$, $y \in \mathrm{Im}(P)^\perp$)

Exercice 6.
Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire de $L^2([0,1])$, et de la norme associée. Pour $a \in]0,1[$ on note F_a l'ensemble des éléments de E qui sont nuls sur $[0,a]$.

1. Montrer que F_a est fermé dans E et déterminer $F_a^\perp$.
2. Montrer que $F_a \oplus F_a^\perp \neq E$.
3. Expliquer.

Exercice 7. Soit H, H' deux espaces de Hilbert séparables, de dimension infinie. Montrer qu'il existe une isométrie linéaire T de H sur H'.
Indication. Exploiter le fait que H et H' admettent chacun une base hilbertienne dénombrable.

Exercice 8. *Opérateur adjoint.*
Soit H un espace de Hilbert réel et $T : H \to H$ une application linéaire continue. On rappelle que l'adjoint de T, noté T^*, est l'unique élément de $\mathcal{L}(H,H)$ tel que, pour tout $x, y \in H$, on ait $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$.

1. Montrer que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| \colon x, y \in H, \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}$.
2. Montrer que $\|T^*\| = \|T\|$ et que $(T^*)^* = T$.
3. Soit $P\colon H \to H$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}(P)$ est fermé, puis que P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(P)$ si, et seulement si, $P^* = P$ (on dit alors que P est *autoadjoint*).
4. Montrer que $\ker(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$ et $\overline{\mathrm{Im}(T)} = \ker(T^*)^\perp$.
5. On suppose que $T = T^*$. Montrer que
$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \colon x \in H, \|x\| \leqslant 1\}$$
6. On suppose à nouveau que $T^* = T$.
   (a) On dit que T est *positif* si $\langle T(x), x\rangle \geqslant 0$ pour tout x. Montrer que dans ce cas on a
   $$\forall x, y \in H \quad \langle T(x), y\rangle^2 \leqslant \langle T(x), x\rangle \langle T(y), y\rangle$$
   puis que $\ker(T) = \{x \in H \colon \langle T(x), x\rangle = 0\}$.
   (b) Montrer que s'il existe $x_0 \in H$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\langle T(x_0), x_0\rangle = \|T\|$ alors x_0 est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\|T\|$.
   Indication. Commencer par établir que $\|T\|\mathrm{Id} - T$ est autoadjoint positif.
   (c) Montrer que si H est de dimension finie alors T est diagonalisable dans une base orthonormale (on a ainsi retrouvé le théorème spectral).
7. Soit $H = L^2([0,1])$, et T défini par
$$\forall f \in H \; \forall t \in [0,1] \quad T(f)(t) = tf(t)\ .$$
   Montrer que T est continu, autodajoint et n'admet pas de valeur propre.