
Feuille d'exercices n° 4

Notations et rappels.
Dans toute cette feuille d désigne un entier $\geqslant 1$.

— On note $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de x et y dans $\mathbf{R}^d$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

— Pour $f, g\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{K}$ deux fonctions mesurables, et $x \in \mathbf{R}^d$, quand il existe, on note $f * g\,(x)$ le produit de convolution de f et g au point x :

$$f * g\,(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$$

— Pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, on définit $\widehat{f}\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$, la transformée de Fourier de f par : pour tout $\xi \in \mathbf{R}^d$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

— On rappelle que pour $p \in [1, +\infty[$ les fonctions continues à support compact sur $\mathbf{R}^d$ forment un sous-ensemble dense de $L^p(\mathbf{R}^d)$.

Exercice 1.
On définit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de la façon suivante :

— pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \left]n, n + \frac{1}{n^3}\right[$, on pose $f(x) = n$;

— pour $n \in -\mathbf{N}^*$ et $x \in \left]n + \frac{1}{n^3}, n\right[$, on pose $f(x) = -n$;

— ailleurs, $f(x) = 0$.

Montrer que $f \in L^1(\mathbf{R})$ et que $f * f(0)$ n'est pas défini.

Exercice 2.

1. Soit $p \in [1, +\infty]$ et $f \in L^p(\mathbf{R})$. Soit $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact. Le but de cette question est de montrer que $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que $(f * \varphi)' = f * \varphi'$.
   Soit $M > 0$ tel que le support de φ soit inclus dans $[-M, M]$.
   (a) Soit $R > 0$ et $x \in [-R, R]$. On définit $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ par $g(y) = f(y)$ si $|y| \leqslant M + R$ et $g(y) = 0$ sinon. Montrer que $g \in L^1(\mathbf{R})$ et $f * \varphi(x) = g * \varphi(x)$.
   (b) Soit $R > 0$. Montrer que $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R, R]$ et que pour tout $x \in [-R, R]$, $(f * \varphi)'(x) = f * \varphi'(x)$.
   (c) Conclure.
2. Soit $p \in [1, +\infty]$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. Soit $\varphi\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact. En vous inspirant de la question précédente, montrer que $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ et tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ on a
$$\frac{\partial(f * \varphi)}{\partial x_i}(x) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

Exercice 3. Un exemple de suite régularisante

1. On définit $\psi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et à support compact (inclus dans $[-1, 1]$).
   Plus généralement, montrer que $\psi\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^d$, et à support compact (inclus dans $B_f(0, 1)$).

2. On note $c = \int_{\mathbf{R}^d} \psi(x)dx$ et on définit $\rho : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{c}\psi(x)$.
   On définit la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, tout $x \in \mathbf{R}^d$ $\rho_n(x) = n^d\rho(nx)$. Montrer que $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ a les propriétés suivantes : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
   — $\rho_n \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} \rho_n(x)dx = 1$;
   — ρ_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^d$ et à support compact inclus dans $B_f(0, 1/n)$.
   On dit que $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite régularisante.
3. On peut aussi définir la notion d'approximation de l'unité ; $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une approximation de l'unité si :
   — pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_n \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} \alpha_n(x)dx = 1$;
   — la suite $(\|\alpha_n\|_1)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bornée ;
   — pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_{\|x\|\geqslant\alpha} |\alpha_n(x)|dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de la question 2 est une approximation de l'unité.

Exercice 4. Densité des fonctions régulières à support compact dans les espaces L^p $(1 \leqslant p < +\infty)$
Dans la suite, on considère la suite régularisante $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie à l'exercice précédent.
Soit $1 \leqslant p < +\infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R})$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f * \rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$.
   (b) Montrer que $(f * \rho_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers f uniformément sur $\mathbf{R}$.
   (c) Montrer que $(f * \rho_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers f dans $L^p(\mathbf{R})$.
2. Soit $f \in L^p(\mathbf{R})$. Montrer que $(f * \rho_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers f dans $L^p(\mathbf{R})$.
3. En déduire que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ est dense dans $L^p(\mathbf{R})$.
4. Montrer que le résultat est encore vrai en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{R}^d$.

Exercice 5. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on pose $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
   Montrer que $f_\varepsilon \in L^1(\mathbf{R}^n)$, que pour tout ξ on a $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \hat{f}(\varepsilon\xi)$ et $|\widehat{f_\varepsilon}(\xi)| \leqslant \|f\|_1$.
2. Soit $h \in \mathbf{R}^n$. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on note $\tau_h f(x) = f(x - h)$.
   Montrer que $\tau_h f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on a $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-\imath h\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$.
3. Montrer que $\bar{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on a $\hat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$
4. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on note $\check{f}(x) = f(-x)$.
   Montrer que $\check{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on a $\hat{\check{f}}(\xi) = \check{\hat{f}}(\xi)$.

Exercice 6.

1. Soit $a > 0$. Calculer les transformées de Fourier de $\mathbf{1}_{[-a,a]}$ et de $x \mapsto e^{-a|x|}$.
   Ces transformées de Fourier sont-elles dans $L^1(\mathbf{R})$?
2. Montrer que si f et $\hat{f}$ appartiennent à $L^1(\mathbf{R})$ alors f est continue et bornée.

Exercice 7. *Transformée de Fourier des gaussiennes.*

1. On note pour $a > 0$, $g_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g_a(x) = e^{-ax^2}$. On cherche à calculer la transformée de Fourier de g_a.
   (a) Justifier que la transformée de Fourier de g_a est bien définie.
   (b) Calculer $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx$ puis $\int_{\mathbf{R}} e^{-ax^2} dx$.
   (c) Justifier que $\widehat{g_a}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et écrire une équation différentielle satisfaite par $\widehat{g_a}$.

   En déduire que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, $\widehat{g_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\xi^2/(4a)}$.
2. Soit $d \geqslant 1$. Dans la suite, on note $x \cdot y$ le produit scalaire de x et y dans $\mathbf{R}^d$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ symétrique définie positive, on note $G_A : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{-Ax \cdot x}$.
   On définit la transformée de Fourier de G_A, $\widehat{G_A} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ par : pour tout $\xi \in \mathbf{R}^d$,

$$\widehat{G_A}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} G_A(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

   Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^d$,

$$\widehat{G_A}(\xi) = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4} A^{-1} \xi \cdot \xi}$$

Exercice supplémentaire où on utilise des résultats sur les fonctions d'une variable complexe

Exercice 8. *Gaussiennes complexes.*
Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de $g_z : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $g_z(x) = e^{-zx^2}$ pour $z \in \mathbf{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$. On note $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : \mathcal{R}e(z) > 0\}$.

1. On fixe $\xi \in \mathbf{R}$ et on note $F : \Omega \to \mathbf{C}$, $z \mapsto \int_{\mathbf{R}} e^{-zx^2} e^{-ix\xi} dx$. Montrer que F est holomorphe sur Ω.
2. Que vaut $F(a)$ pour a réel strictement positif ?
3. En déduire que pour tout $z \in \Omega$, tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{g_z}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\, e^{-\xi^2/(4z)}$$

   où $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\, z}$, et Log est la détermination principale du logarithme.