
Feuille d'exercices n° 5 : rappels sur le produit de convolution

Pour $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbf{R}^d)$ (avec $1 \leq p, q \leq +\infty$) et $x \in \mathbf{R}^d$ on souhaite poser

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(t)g(x-t)dt$$

Notons, grâce au théorème de changement de variable, que $f * g(x)$ est défini si et seulement si $g * f(x)$ est défini, et qu'alors on a l'égalité $f * g(x) = g * f(x)$. De plus, l'inégalité de Hölder assure que $f * g$ est définie partout dès lors que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et qu'alors on a $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

On a même mieux, avec l'inégalité de Young pour la convolution : si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ alors $f * g$ est définie presque partout, appartient à $L^r(\mathbf{R}^d)$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

On va revoir rapidement comment établir quelques propriétés fondamentales de la convolution (sans présupposer de connaissance particulière à ce sujet, en particulier on n'utilisera pas l'inégalité de Young qu'on va retrouver dans les cas particuliers $p = 1, +\infty$). On ne consacrera (au mieux) qu'une séance de TD à cette feuille d'exercices, dont les résultats sont à connaître.

Exercice 1. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. On fixe $x \in \mathbf{R}^d$ et on note $f_x(t) = f(t-x)$. Montrer que $x \mapsto f_x$ est uniformément continue de $(\mathbf{R}^d, |\cdot|)$ dans $(L^p(\mathbf{R}^d), \|\cdot\|_p)$. (on commencera par traiter le cas où f est continue à support compact)

Exercice 2. Dans cet exercice on suppose que $p, q \in [1, +\infty]$ sont des exposants conjugués, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On fixe $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbf{R}^d)$.

1. À l'aide du résultat de l'exercice précédent, montrer que $f * g$ est uniformément continue.
2. Montrer que si f et g sont continues à support compact alors $f * g$ est continue à support compact.
3. On suppose que $p, q < +\infty$. Montrer que $f * g$ tend vers 0 quand $\|x\| \rightarrow +\infty$.
4. Si $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, est-il toujours vrai que $f * g(x)$ tend vers 0 quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$?

Exercice 3. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbf{R}^d)$ avec $1 \leq p < +\infty$.

1. Montrer que si $p = 1$ alors $f * g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

On suppose maintenant $1 < p < +\infty$ et on note q l'exposant conjugué de p .

2. En écrivant, pour $t \in \mathbf{R}^d$, $|f(t)| = |f(t)|^{\frac{1}{p}} |f(t)|^{\frac{1}{q}}$, montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ on a

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(t)g(x-t)|dt \leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(t)||g(x-t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_1^{\frac{1}{q}}$$

3. Montrer que $\int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(t)||g(x-t)|^p dt \right) dx = \|f\|_1 \|g\|_p^p$.
4. Conclure que $f * g$ est définie presque partout, appartient à $L^p(\mathbf{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]n, n + \frac{1}{n^3}[$ on pose $f(x) = n$; pour $n \in -\mathbf{N}^*$ et $x \in]n + \frac{1}{n^3}, n[$ on pose $f(x) = -n$; et ailleurs on pose $f(x) = 0$. Montrer que $f \in L^1(\mathbf{R})$ mais $f * f(0)$ n'est pas défini.

Pourtant $f * f$ est définie presque partout, et appartient à $L^1(\mathbf{R})$, d'après le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 5. On dit qu'une suite de fonctions intégrables $k_n: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$ est une *unité approchée* pour la convolution si :

- (i) $\forall n \in \mathbf{N} \quad \int_{\mathbf{R}^d} k_n(t) dt = 1.$
- (ii) $M = \sup \{ \|k_n\|_1 : n \in \mathbf{N} \} < +\infty.$
- (iii) Pour tout $\delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\|x\| \geq \delta} |k_n(t)| dt = 0$

1. Montrer que si $\varphi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$ est à support compact et telle que $\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(t) dt = 1$ alors la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $\varphi_n: x \mapsto n^d \varphi(nx)$ est une unité approchée pour la convolution.

On fixe $p \in [1, +\infty[$ et une unité approchée pour la convolution $(k_n)_{n \in \mathbf{N}}$. On souhaite montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ on a $f * k_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbf{R}^d)$. On note q l'exposant conjugué de p .

2. On suppose que f est continue, bornée et $f(0) = 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^d} |k_n(t) f(t)| dt = 0$.
3. En utilisant (pour $t \in \mathbf{R}^d$) l'égalité $|k_n(t)| = |k_n(t)|^{\frac{1}{p}} |k_n(t)|^{\frac{1}{q}}$, montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ et tout $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ on a

$$|f * k_n(x) - f(x)| \leq M^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p |k_n(t)| dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

4. Conclure, à l'aide du théorème de Fubini–Tonelli et du résultat du premier exercice de cette feuille.

Exercice 6. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. Soit $\varphi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 à support compact contenu dans $B_f(0, M)$.

Soit $y \in \mathbf{R}^d$; pour tout x appartenant à la boule de centre 0 et de rayon $M + \|y\| + 1$ on pose $g(x) = f(x)$, et ailleurs on pose $g(x) = 0$.

1. Montrer que $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ tel que $\|y - x\| \leq 1$ on a $g * \varphi(x) = f * \varphi(x)$.
2. Montrer que $g * \varphi$ est de classe \mathcal{C}^1 et que tout $x \in \mathbf{R}^d$ et tout $i \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$\frac{\partial(g * \varphi)}{\partial x_i}(x) = g * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

3. Montrer que $f * \varphi$ est de classe \mathcal{C}^1 que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ et tout $i \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$\frac{\partial(f * \varphi)}{\partial x_i}(x) = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

4. En utilisant l'existence d'une unité approchée pour la convolution formée de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , montrer que l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact est dense dans $L^p(\mathbf{R}^d)$.