Feuille d'exercices n° 5 : compléments

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ telle que $f * g = g$ pour toute $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ (Considérer pour g la fonction caractéristique d'une boule autour de 0 bien choisie ; que nous dit l'égalité $g(0) = g * f(0)$?)

Exercice 2. On note $C_0(\mathbf{R}^d)$ l'espace des fonctions de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ qui tendent vers 0 en $+\infty$, et on le munit de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $a \in \mathbf{R}^d$ on note $\tau_a \colon L^2(\mathbf{R}^d) \to L^2(\mathbf{R}^d)$ l'opérateur de translation défini par $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$.

1. Soit $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^d)$. Montrer que $T_\varphi \colon f \mapsto f * \varphi$ est une application continue de $L^2(\mathbf{R}^d)$ dans $C_0(\mathbf{R}^d)$ et que pour tout $a \in \mathbf{R}^d$ on a $\tau_a \circ T_\varphi = T_\varphi \circ \tau_a$.
2. On souhaite établir la réciproque du résultat de la question précédente ; soit $T \colon L^2(\mathbf{R}^d) \to C_0(\mathbf{R}^d)$ un opérateur continu tel que $T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$ pour tout $a \in \mathbf{R}^d$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^d)$ telle que pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ on ait $T(f)(0) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\varphi(-x)dx$. (Indication : $f \mapsto T(f)(0)$ est linéaire et continue)
   (b) Montrer que $T(f) = f * \varphi$ pour toute $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$.

Exercice 3. Pour $A \subseteq \mathbf{R}^d$ on note χ_A la fonction caractéristique de A.

1. Soit A, B deux parties bornées de $\mathbf{R}^d$. Montrer que $\chi_A * \chi_B$ est continue et à support compact.
2. Soit A une partie mesurable de $\mathbf{R}^d$ telle que $\lambda_d(A) > 0$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$). On note $A - A = \{x \in \mathbf{R}^d \colon \exists a_1, a_2 \in A\ x = a_1 - a_2\}$.
   En considérant $\chi_A * \chi_{-A}$, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x on ait $\|x\| \le \varepsilon \Rightarrow x \in A - A$.
   (Se ramener au cas où A est compact en utilisant que $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \colon K \text{ compact } \subseteq A\}$).

Soit $d, n \in \mathbf{N}^*$. On considère $\varphi \colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n$ telle que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^d$ on ait $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. On suppose que φ est mesurable (toujours en munissant $\mathbf{R}^d$ de la mesure de Lebesgue).
Soit V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^n$.

3. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de 0 tel que $W - W \subseteq V$.
4. Montrer que $\lambda_d(\varphi^{-1}(W)) > 0$.
5. Montrer que $\varphi^{-1}(V)$ contient un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^d$.
6. Montrer que φ est continue (commencer par montrer que φ est continue en 0).
7. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^n$.

En particulier, les seules applications mesurables $\varphi \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $x, y \in \mathbf{R}$ sont de la forme $x \mapsto \alpha x$, où $\alpha \in \mathbf{R}$.