Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2025-2026**
M1 - Mathématiques générales — UE : Analyse Fonctionnelle 1

Feuille d'exercices n° 6 : Classe de Schwartz

__Exercice 1.__ Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ non identiquement nulle et telle que l'on ait $\int_{\mathbf{R}} x^k f(x)dx = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$?

__Exercice 2.__ Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que h admette une primitive dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

__Exercice 3.__ Soit $p \in [1, +\infty]$.

1. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset L^p(\mathbf{R})$ et que cette inclusion définit une application continue de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $(L^p(\mathbf{R}), \|\cdot\|_p)$.
2. Généralisation de ce résultat à $\mathbf{R}^n$?

__Exercice 4.__ Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive. On pose $f(x) = e^{-A(x)\cdot x}$. Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

__Exercice 5.__ Soit ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact, et telle que $\rho(x) = 1$ pour tout x tel que $\|x\| \leqslant 1$. Pour $i \in \mathbf{N}^*$ on pose $\rho_i(x) = \rho\left(\frac{x}{i}\right)$.

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Montrer que $(\rho_i f)_{i\in\mathbf{N}^*}$ converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

__Exercice 6.__

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer que, quand ε tend vers 0, $x \mapsto \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ tend vers f' dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.
2. Généralisation de ce résultat à $\mathbf{R}^n$?

__Exercice 7.__ Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On souhaite montrer l'inégalité suivante :

$$\left(\int_{\mathbf{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right) \geqslant \frac{\pi}{2}(\|f\|_2)^4 \tag{H}$$

On note $I = \left(\int_{\mathbf{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)$.

1. Montrer que $I = 2\pi\left(\int_{\mathbf{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} |f'(x)|^2dx\right)$
2. En déduire que $I \geqslant 2\pi\left(\int_{\mathbf{R}} |xf(x)f'(x)|dx\right)^2$.
3. Dans cette question on note $g(x) = |f(x)|^2$.
   Montrer que $\int_{\mathbf{R}} |xf(x)f'(x)|dx \geqslant -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} xg'(x)dx$ et démontrer (H).
4. Que se passe-t-il pour $f\colon x \mapsto e^{-ax^2}$ (avec $a > 0$) ?
5. Que pensez-vous de l'inégalité (H) dans le cas où $f \in L^2(\mathbf{R})$?

Exercice 8.

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.
   (a) Montrer que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+2n\pi)$ converge normalement sur les compacts ; on note g sa limite.
   (b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une formule pour g'.
   (c) Montrer que g est 2π-périodique et déterminer sa série de Fourier.
   (d) Prouver l'égalité suivante ("formule sommatoire de Poisson"), valide pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

2. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et $t \in [0,1]$. On pose $g(x) = f(x)e^{-itx}$.
   (a) En appliquant la formule sommatoire de Poisson à g, prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+2n\pi)e^{-2in\pi t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(t+n) e^{i(t+n)x}$$

   (b) En intégrant cette égalité sur $[0,1]$ (et en justifiant soigneusement le calcul), retrouver la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$:

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

3. On suppose maintenant que $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et que le support de $\hat{f}$ est contenu dans $[-\pi,\pi]$. Montrer que pour tout réel t on a

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) \operatorname{sin_c}((t-n)\pi)$$

   On rappelle que $\operatorname{sin_c}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, convenablement prolongée en 0.
   Afin d'établir l'égalité ci-dessus, on pourra commencer par appliquer la formule sommatoire de Poisson à $\hat{f}$, et utiliser (en le justifiant) que pour tout ξ on a

$$\hat{f}(\xi) = \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi) \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(\xi+2n\pi)$$