Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2024-2025**
M1 - Mathématiques générales UE : Analyse Fonctionnelle 1

Feuille d'exercices n° 7 : Classe de Schwartz

__**Exercice 1.**__ Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ non identiquement nulle et telle que l'on ait $\int_{\mathbf{R}} x^k f(x)dx = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$?

__**Exercice 2.**__ Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que h admette une primitive dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

__**Exercice 3.**__ Soit $p \in [1, +\infty[$.

1. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset L^p(\mathbf{R})$ et que cette inclusion définit une application continue de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $(L^p(\mathbf{R}), \|\cdot\|_p)$.
2. Généralisation de ce résultat à $\mathbf{R}^n$?

__**Exercice 4.**__ Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive. On pose $f(x) = e^{-A(x)\cdot x}$. Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

__**Exercice 5.**__ Soit ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact, et telle que $\rho(x) = 1$ pour tout x tel que $\|x\| \leqslant 1$. Pour $i \in \mathbf{N}^*$ on pose $\rho_i(x) = \rho\left(\frac{x}{i}\right)$.

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Montrer que $(\rho_i f)_{i\in\mathbf{N}^*}$ converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

__**Exercice 6.**__

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer que, quand ε tend vers 0, $x \mapsto \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ tend vers f' dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.
2. Généralisation de ce résultat à $\mathbf{R}^n$?

__**Exercice 7.**__

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.
   (a) Montrer que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x + 2n\pi)$ converge normalement sur les compacts ; on note g sa limite.
   (b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une formule pour g'.
   (c) Montrer que g est 2π-périodique et déterminer sa série de Fourier.
   (d) Prouver l'égalité suivante ("formule sommatoire de Poisson"), valide pour tout $x \in \mathbf{R}$:
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x + 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$
2. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et $t \in [0, 1]$. On pose $g(x) = f(x)e^{-itx}$.
   (a) En appliquant la formule sommatoire de Poisson à g, prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x + 2n\pi)e^{-2in\pi t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(t + n)e^{i(t+n)x}$$
   (b) En intégrant cette égalité sur $[0, 1]$ (et en justifiant soigneusement le calcul), retrouver la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$:
$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$