

Feuille d'exercices n° 7 : Distributions tempérées

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ à croissance lente et $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Montrer que $(fu)' = f'u + fu'$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on définit la *masse de Dirac* δ_x par la formule $\delta_x(f) = f(x)$ pour $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

1. Montrer que δ_x est une distribution tempérée.
2. Déterminer $\partial^\alpha \delta_x$ pour tout multi-indice α .
3. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, montrer que $f\delta_x = f(x)\delta_x$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de δ_x , ainsi que de la fonction constante égale à 1 (vue comme une distribution tempérée).

Exercice 3.

1. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Montrer que u admet une primitive dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ et décrire l'ensemble des primitives de u dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

2. Soit H la fonction de Heaviside, définie par $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calculer H' (au sens des distributions tempérées), puis déterminer toutes les primitives de δ_0 .

3. Déterminer toutes les primitives de H (on pourra s'intéresser à xH).

Exercice 4. Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on pose $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que $g' = f$ au sens des distributions tempérées.

Exercice 5. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur \mathbf{R} . Pour $x \in \mathbf{R}$ on pose $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x])$.

1. Montrer que F_μ est croissante, continue à droite en tout point, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.
2. Montrer que, au sens des distributions tempérées, on a $F'_\mu = \mu$.

Exercice 6. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = e^x \cos(e^x)$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $|f(x)| \leq |P(x)|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
2. Montrer que f définit une distribution tempérée.

Exercice 7. Calculer la transformée de Fourier, au sens des distributions tempérées, des fonctions suivantes : $x \mapsto e^{ix}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto x \sin(x)$, $x \mapsto e^{-|x|}$, $x \mapsto |x|e^{-|x|}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 8.

1. Rappeler la définition de la valeur principale sur \mathbf{R} , et pourquoi c'est une distribution tempérée. On la note $\text{vp} \frac{1}{x}$.
2. Montrer que $x \text{vp} \frac{1}{x} = 1$.
3. Calculer $(x\delta_0) \text{vp} \frac{1}{x}$ et $(x \text{vp} \frac{1}{x})\delta_0$. Qu'en pensez-vous ?
4. Soit $f: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \ln(|x|)$. Montrer que f définit une distribution tempérée et calculer f' au sens des distributions tempérées.
5. En exploitant l'égalité $x \text{vp} \frac{1}{x} = 1$, montrer que $\widehat{\text{vp} \frac{1}{x}} = -2i\pi H + C$, où H est la fonction de Heaviside définie plus haut et C est une constante à déterminer.
6. En exploitant le fait que $\text{vp} \frac{1}{x}$ est une distribution impaire, calculer C .
7. En déduire la valeur de \widehat{H} .

Exercice 9. On suppose que $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est telle que $u^{(4)} + u$ appartienne à $L^2(\mathbf{R})$.

Démontrer que u, u', u'' et $u^{(3)}$ appartiennent toutes à $L^2(\mathbf{R})$ (on commencera par donner un sens précis à l'énoncé...).

Exercice 10. Trouver toutes les solutions de l'équation $-y''(t) + y(t) = e^{-t^2}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ puis dans $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$.

Exercice 11. Soit $u: \mathcal{S}(\mathbf{R}^2) \rightarrow \mathbf{C}$ l'application linéaire définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2) \quad u(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x, -x) dx$$

1. Montrer que u est une distribution tempérée.
2. Calculer (au sens des distributions) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$.