Feuille d'exercices numéro 1
Espaces topologiques

Exercice 1 Compacité et topologie induite

1. Soit X un espace toplogique séparé et $F \subset X$. Montrer que si F (muni de la topologie induite) est compact, alors F est fermé dans X.
2. Soit X un espace topologique compact et $F \subset X$. Montrer que F (muni de la topologie induite) est compact si et seulement si F est fermé dans X.

Exercice 2 Image continue d'un compact

1. Soit E un espace topologique compact, F un espace topologique séparé et $f : E \to F$ une application continue. Montrer que $f(E)$ (muni de la topologie induite) est compact.
2. On suppose de plus f injective. Montrer que f est un homéomorphisme de E sur $f(E)$.

Exercice 3 Diagonale

Soit X un espace topologique séparé. Montrer que la diagonale $\Delta = \{(x, x) \,;\, x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$ muni de la topologie produit.

Exercice 4 Topologie cofinie

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini. Montrer que $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{C}$ est une topologie sur X. Quelles en sont les suites convergentes ?

Exercice 5 Topologie produit non métrisable

1. Soit I un ensemble infini non dénombrable. Montrer que la topologie produit sur $\{0, 1\}^I$, sur $[0, 1]^I$ ou sur $\mathbf{R}^I$, n'est pas métrisable.
   Indication : dans un espace topologique métrisable, tout point admet une base dénombrable de voisinages (pourquoi ?) ; montrer que cette propriété est en défaut.
2. Dans le cas où $I = [0, 1]$ montrer que $\mathbf{R}^I$, muni de la topologie produit, est séparable. Cette topologie admet-elle une base dénombrable d'ouverts ?
   Indication : Pour $n \in \mathbf{N}^*$, considérer les fonctions à valeurs dans $\mathbf{Q}$ et constantes sur chaque $[i/n, i + 1/n[$.
3. Pour $x \in [0, 1]$ on note χ_x la fonction caractéristique de $\{x\}$. Montrer que $\{\chi_x : x \in [0, 1]\}$, muni de la topologie induite par $\mathbf{R}^{[0,1]}$, est discret. Est-il séparable ? En déduire une nouvelle preuve du fait que $\mathbf{R}^{[0,1]}$ n'est pas métrisable.

Exercice 6 Fonctions continues pour la topologie produit

Soit (X, τ) un espace topologique et I un ensemble. On munit X^I de la topologie produit qu'on note τ_I. Pour tout $i \in I$ on note $\pi_i : X^I \to X$ la projection sur la i-ème coordonnée, définie par $\pi_i(f) = f(i)$.

1. Montrer que chaque $\pi_i : (X^I, \tau_I) \to (X, \tau)$ est continue.
2. Soit (Y, σ) un espace topologique et $f : Y \to X^I$. Montrer que f est continue de (Y, σ) dans (X^I, τ_I) si, et seulement si, $\pi_i \circ f$ est continue pour tout $i \in I$.

Exercice 7 Topologie induite par une famille de fonctions

Soit X un ensemble, (Y, τ_Y) un espace topologique et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions de X dans Y. On définit $\Phi : X \to Y^{\mathcal{F}}$ en posant $\Phi(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{F}}$.

On munit $\Phi(X)$ de la topologie induite par la topologie produit sur $Y^{\mathcal{F}}$; enfin on définit une topologie $\tau_{\mathcal{F}}$ sur X en convenant que O est ouvert pour $\tau_{\mathcal{F}}$ si, et seulement si, $O = \Phi^{-1}(\Phi(O))$ et $\Phi(O)$ est ouvert dans $\Phi(X)$. On appelle $\tau_{\mathcal{F}}$ la *topologie induite* par $\mathcal{F}$.

1. Montrer que $O \subseteq X$ est ouvert pour $\tau_{\mathcal{F}}$ si, et seulement si, pour tout $x \in O$ il existe un sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{F}$ fini et une famille $(U_f)_{f \in A}$ d'ouverts de Y tels que

$$x \in \{x' \in X : \forall f \in A \; f(x') \in U_f\} \subseteq O$$

(c'est avec cette définition là qu'il faut penser à la topologie induite par $\mathcal{F}$)

2. Expliquer pourquoi on peut voir les topologies produit comme un cas particulier de topologies induites par une famille de fonctions.
3. Montrer que chaque $f \in \mathcal{F}$ est continue pour $\tau_{\mathcal{F}}$, et que si σ est une autre topologie sur X avec cette propriété alors σ contient $\tau_{\mathcal{F}}$.
4. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X converge vers $x \in X$ pour $\tau_{\mathcal{F}}$ si, et seulement si, $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$ dans (Y, τ_Y) pour tout $f \in \mathcal{F}$.
5. Soit (Z, τ_Z) un espace topologique et $g\colon Z \to X$ une fonction. Montrer que g est continue de (Z, τ_Z) dans $(X, \tau_{\mathcal{F}})$ si, et seulement si, $f \circ g\colon (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ est continue pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Exercice 8 Théorème de Tychonoff pour deux espaces

Montrer que le produit de deux espaces topologiques compacts est compact.

Exercice 9 Cube de Hilbert

Soit C la partie de ℓ_2 définie par

$$C = \{(x_n) \,:\, |x_n| \leqslant 1/n\}.$$

Montrer que C est homéomorphe à l'espace $[0,1]^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit.

Exercice 10 Encore le cube de Hilbert

Soit (X, τ) un espace compact métrisable. Montrer que (X, τ) est homéomorphe à un fermé du cube de Hilbert $[0,1]^{\mathbf{N}}$.

Exercice 11 Compactifié d'Alexandroff

Soit (X, τ) un espace topologique localement compact non compact.

On considère l'ensemble $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ (où ∞ est un élément abstrait qui n'est pas dans X), et on définit une classe de parties $\widehat{\tau} \subset \mathcal{P}(\hat{X})$ comme suit : pour $A \subset \widehat{X}$,

$$A \in \widehat{\tau} \iff A \in \tau \text{ ou } \widehat{X} \setminus A \text{ est un compact de } X.$$

1. Montrer que $\widehat{\tau}$ est une topologie sur $\widehat{X}$, que la topologie induite sur X est τ, que $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ est compact et que X est dense dans $\widehat{X}$.
2. À quel espace familier $\widehat{\mathbf{R}}$ est-il homéomorphe ? Et $\widehat{\mathbf{R}^2}$?
3. Soit $f\colon X \to \mathbf{R}$ une fonction continue. À quelle condition f s'étend-elle en une fonction continue sur $\widehat{X}$?