Feuille d'exercices n° 1 : autour du théorème de Baire.

Exercice 1. Montrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable, sa dérivée f' est de première classe.

Exercice 2. Montrer que $\mathbf{1_Q} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n'est pas une fonction de première classe, mais que c'est la limite simple d'une suite de fonctions de première classe.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x,y)$ soit continue pour tout $y \in \mathbf{R}$, et $y \mapsto f(x,y)$ soit continue pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1. La fonction f est-elle nécessairement continue ?
2. On suppose f bornée. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose
$$f_n(x,y) = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t,y)\,dt$$
Montrer que chaque f_n est continue, puis que f est de première classe.
3. Que pensez-vous du cas où f n'est pas bornée ?

Exercice 4.

1. Construire, pour tout $\varepsilon > 0$, un ouvert dense de $\mathbf{R}$ de mesure de Lebesgue $\leq \varepsilon$.
(**Indication :** *considérer une union d'intervalles centrés en chaque rationnel*).
2. Montrer qu'il existe une partition $\mathbf{R} = A \cup B$ avec A maigre et B de mesure nulle.
3. De telles partitions arrivent naturellement en mathématiques, en voici un exemple. On dit qu'un nombre réel x est de Liouville si, pour tout $n \geq 1$, il existe des entiers $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 1$ tels que $0 < |x - p/q| < 1/q^n$. Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est de mesure nulle et comaigre.

Exercice 5.
Dans l'espace $X = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit, on considère
$$A = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \ : \ \limsup_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 1 \text{ et } \liminf_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 0 \right\}.$$

1. Montrer que tout ouvert non vide de X contient une suite ayant un nombre fini de termes nuls.
2. Montrer que A est comaigre.

Exercice 6. Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Montrer que si $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une base de l'espace vectoriel X, alors A est non dénombrable.

Exercice 7. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x > 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Exercice 8. Soit X un espace de Banach et $T : X \to X$ une application linéaire continue telle que, pour tout $x \in X$, il existe un entier n_x tel que $T^{n_x}(x) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier n tel que $T^n = 0$.
2. Montrer que la conclusion du 1. devient fausse sans l'hypothèse de complétude.

Exercice 9. Soit $\varphi\colon \ell^\infty \to \mathbf{R}$ une application linéaire continue telle que : $\forall u \in \ell^\infty(\mathbf{N})\ \exists n \in \mathbf{N}\ \varphi(u) = u(n)$.
Montrer que : $\exists n \in \mathbf{N}\ \forall u \in \ell^\infty(\mathbf{N})\ \varphi(u) = u(n)$.

Exercice 10.
Soit (K, d) un espace métrique compact et dénombrable.
Pour $x \neq y \in K$ montrer que $\{f \in C(K, \mathbf{R})\colon f(x) \neq f(y)\}$ est ouvert dense dans $C(K, \mathbf{R})$, puis que K est homéomorphe à un fermé de $\mathbf{R}$.
Remarque : l'hypothèse "métrique" est redondante dans cet exercice, tout espace compact séparé dénombrable étant métrisable. Et on peut en fait montrer qu'un tel K est homéomorphe à un fermé de $\mathbf{R}$ contenu dans $\mathbf{Q}$.

Exercice 11.

1. Montrer que $\ell_1(\mathbf{N})$ est maigre dans $\ell_2(\mathbf{N})$. (**Indication :** *Montrer que l'ensemble des suites* $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ *telles que* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \leq 1$ *est un fermé d'intérieur vide de* $\ell_2(\boldsymbol{N})$).
2. Montrer que $L^2([0, 1])$ est maigre dans $L^1([0, 1])$.

Exercice 12. Soit X l'espace de Banach $C([0, 1])$. Étant donnés $\varepsilon, A > 0$ on pose

$$F_{\varepsilon,A} = \{f \in X \,:\, \exists x \in [0, 1]\ |x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq A|x - y|\}\,.$$

1. Montrer que les ensembles $F_{\varepsilon,A}$ sont fermés d'intérieur vide.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions nulle part dérivables est comaigre dans X.

Exercice 13. On munit l'espace $X = C^\infty([0, 1])$ de la distance

$$d(f, g) = \sum_{n\geq 0} \min(2^{-n}, \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty)$$

1. Montrer que X est complet pour cette distance.
2. Pour $a \in\,]0, 1[$ et $B > 0$, montrer que l'ensemble

   $$F_{a,B} = \{f \in X \,:\, \forall k \in \mathbf{N},\ |f^{(k)}(a)| \leq k!B^k\}$$

   est un fermé d'intérieur vide.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions nulle part développables en série entière est comaigre dans X.

Exercice 14. Soit $E = C([0, 1], \mathbf{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

1. On fixe deux rationnels $p < q$ appartenant à $[0, 1]$, et on note

   $$U_{p,q} = \{f \in E\colon f \text{ n'est pas monotone sur } [p, q]\}$$

   Montrer que $U_{p,q}$ est ouvert dense dans E.
2. Montrer qu'il existe $f \in E$ avec la propriété suivante : pour tout intervalle $I \subseteq [0, 1]$ non réduit à un point, $f_{|I}$ n'est pas monotone.