Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre printemps 2025-2026**
M1 - Mathématiques générales | UE : Analyse Fonctionnelle 2

Feuille d'exercices n° 1 : autour du théorème de Baire.

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que $x \in X$ est un *point isolé* si $\{x\}$ est ouvert dans (X, d).

1. Donner un exemple d'espace métrique non vide sans points isolés, un exemple d'espace métrique infini où tous les points sont isolés, et un exemple d'espace métrique ayant à la fois des points isolés et des points non isolés.
2. Montrer que $x \in (X, d)$ n'est pas isolé si, et seulement si, $\{x\}$ est un fermé d'intérieur vide dans (X, d).
3. Soit (X, d) un espace métrique complet sans points isolés. Montrer que X n'est pas dénombrable.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique complet, et U un ouvert non vide de X. On note $F = X \setminus U$ et on suppose que F est non vide. Pour tout $(x, y) \in U$ on pose

$$\rho(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right|.$$

1. Montrer que ρ définit une distance sur U, et que cette distance est équivalente à d.
2. Montrer que (U, ρ) est complet.

Exercice 3.

1. Soit E un ensemble dénombrable de fonctions holomorphes. On suppose que la fonction nulle n'appartient pas à E. Donner deux preuves du fait qu'il existe $x \in \mathbf{C}$ tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $f \in E$.
2. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que f est un polynôme si, et seulement si, f satisfait la propriété suivante :
$$\forall x \in \mathbf{C},\ \exists n \in \mathbf{N}\ , f^{(n)}(x) = 0.$$

Exercice 4. Soit $A \subseteq \mathbf{R}$ un ensemble comaigre. Montrer que A contient un nombre transcendant.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique complet, et $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés tels que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = X$. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Int}(F_n)$ est dense dans X.

Exercice 6.

1. Construire, pour tout $\varepsilon > 0$, un ouvert dense de $\mathbf{R}$ de mesure de Lebesgue $\leq \varepsilon$.
(**Indication :** *considérer une union d'intervalles centrés en chaque rationnel*).
2. Montrer qu'il existe une partition $\mathbf{R} = A \cup B$ avec A maigre et B de mesure nulle.
3. De telles partitions arrivent naturellement en mathématiques, en voici un exemple. On dit qu'un nombre réel x est de Liouville si, pour tout $n \geq 1$, il existe des entiers $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 1$ tels que $0 < |x - p/q| < 1/q^n$. Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est de mesure nulle et comaigre.

Exercice 7.
Dans l'espace $X = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit, on considère

$$A = \left\{ (x_n)_{n\geq 1}\ :\ \limsup_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 1 \text{ et } \liminf_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 0 \right\}.$$

1. Montrer que tout ouvert non vide de X contient une suite ayant un nombre fini de termes nuls.
2. Montrer que A est comaigre.

Exercice 8.

1. Soit X un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel d'intérieur non vide. Montrer que $F = X$.
2. Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Montrer que si $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une base de l'espace vectoriel X, alors A est non dénombrable.

Exercice 9. Soit X un espace de Banach et $T : X \to X$ une application linéaire continue telle que, pour tout $x \in X$, il existe un entier n_x tel que $T^{n_x}(x) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier n tel que $T^n = 0$.
2. Montrer que la conclusion du 1. devient fausse sans l'hypothèse de complétude.

Exercice 10. Soit $\varphi\colon \ell^\infty \to \mathbf{R}$ une application linéaire continue telle que : $\forall u \in \ell^\infty(\mathbf{N})\ \exists n \in \mathbf{N}\ \varphi(u) = u(n)$.
Montrer que : $\exists n \in \mathbf{N}\ \forall u \in \ell^\infty(\mathbf{N})\ \varphi(u) = u(n)$.

Exercice 11.
Soit (K, d) un espace métrique compact et dénombrable.
Pour $x \neq y \in K$ montrer que $\{f \in C(K, \mathbf{R}) : f(x) \neq f(y)\}$ est ouvert dense dans $C(K, \mathbf{R})$, puis que K est homéomorphe à un fermé de $\mathbf{R}$.
Remarque : l'hypothèse "métrique" est redondante dans cet exercice, tout espace compact séparé dénombrable étant métrisable. Et on peut en fait montrer qu'un tel K est homéomorphe à un fermé de $\mathbf{R}$ contenu dans $\mathbf{Q}$.

Exercice 12.

1. Montrer que $\ell_1(\mathbf{N})$ est maigre dans $\ell_2(\mathbf{N})$.
   Indication : *Montrer que l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in N}$ telles que $\sum_{n=0}^\infty |x_n| \leq 1$ est un fermé d'intérieur vide de $\ell_2(\boldsymbol{N})$.*
2. Montrer que $L^2([0, 1])$ est maigre dans $L^1([0, 1])$.

Exercice 13. Soit $E = C([0, 1], \mathbf{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

1. On fixe deux rationnels $p < q$ appartenant à $[0, 1]$, et on note
   $$U_{p,q} = \{f \in E\colon f \text{ n'est pas monotone sur } [p, q]\}$$
   Montrer que $U_{p,q}$ est ouvert dense dans E.
2. Montrer qu'il existe $f \in E$ avec la propriété suivante : pour tout intervalle $I \subseteq [0, 1]$ non réduit à un point, $f_{|I}$ n'est pas monotone.

Exercice 14. Montrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable, sa dérivée f' est de première classe.

Exercice 15. Montrer que $\mathbf{1_Q} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n'est pas une fonction de première classe, mais que c'est la limite simple d'une suite de fonctions de première classe.
Indication : considérer $f_{n,m}(x) = \cos(2\pi n!x)^{2m}$.

Exercice 16. Soit $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x, y)$ soit continue pour tout $y \in \mathbf{R}$, et $y \mapsto f(x, y)$ soit continue pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1. La fonction f est-elle nécessairement continue ?
2. On suppose f bornée. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose
   $$f_n(x, y) = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t, y)\, dt$$
   Montrer que chaque f_n est continue, puis que f est de première classe.
3. Que pensez-vous du cas où f n'est pas bornée ?