Feuille d'exercices n° 2 : Banach–Steinhaus, application ouverte, graphe fermé...

Exercice 1. Soit X, Y deux espaces de Banach, et $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de X vers Y. On suppose que, pour chaque $x \in X$, la limite $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe.
Montrer que T est linéaire et continue. A-t-on nécessairement $\|T_n\| \to \|T\|$?

Exercice 2. Soit $E = \mathbf{R}[X]$, muni de la norme $\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right\| = \max\{|a_k| : 0 \le k \le n\}$.
Pour $n \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose $D_n(X^k) = kX^{k-1}$ si $k \le n$, $D_n(X^k) = 0$ sinon, et on étend D_n par linéarité à $\mathbf{R}[X]$. Montrer que D_n est continue pour tout n, $\|D_n\| = n$, et que pour tout P la suite $(D_n(P))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 3.

1. Soit X un espace de Banach, et E, F deux sous-espaces tels que $X = E \oplus F$. On note p_E (resp. p_F) la projection sur E parallèlement à F (resp. sur F parallèlement à E). Montrer l'équivalence
$$p_E \text{ et } p_F \text{ sont continues} \iff E \text{ et } F \text{ sont fermés.}$$
2. Soit X un espace de Banach, et E un sous-espace vectoriel fermé. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé F tel que $X = E \oplus F$ si, et seulement si, il existe un projecteur continu $p\colon X \to X$ tel que $E = \mathrm{Im}(p)$.
3. Dans l'espace $\ell_2(\mathbf{N})$, dont on note $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la base hilbertienne usuelle, on considère $E = \overline{\mathrm{Vect}\{e_{2n} : n \in \mathbf{N}\}}$ et $F = \overline{\mathrm{Vect}\{e_{2n} + \frac{1}{2^n} e_{2n+1} : n \in \mathbf{N}\}}$. On note $X = E + F$.
   (a) Montrer que $E \cap F = \{0\}$ et que E et F sont fermés dans X.
   On note à nouveau $p_E\colon X \to E$ la projection sur E parallèlement à F.
   (b) Montrer que p_E n'est pas continue. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ une application linéaire vérifiant $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ pour tous x, y dans H. Démontrer que T est continue en utilisant le théorème du graphe fermé (à l'exercice 8, on trouvera un autre argument, utilisant le théorème de Banach–Steinhaus).

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert réel et $T : H \to H$ une application linéaire vérifiant
$$\forall x \in H,\ \langle T(x), x\rangle \ge 0.$$

1. Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de H convergeant vers 0 et telle que $(T(z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in H$.
   (a) Montrer que l'on a $\langle \ell, h\rangle + \langle T(h), h\rangle \ge 0$ pour tout $h \in H$.
   (b) En déduire que $\ell = 0$.
2. Montrer que T est continue.

Exercice 6. Soient X et Y des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Montrer l'équivalence entre

1. il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ on ait $\|T(x)\| \ge \alpha\|x\|$.
2. T est injectif et d'image fermée.

Exercice 7. Soit X un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur X. On suppose que (X, N_1) et (X, N_2) sont des espaces de Banach, et que $N_1(x) \le N_2(x)$ pour tout $x \in X$.
Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Exercice 8. Soient X, Y deux espaces de Banach, Z un espace normé et $b : X \times Y \to Z$ une application bilinéaire telle que :

1. Pour tout $x \in X$, l'application $b(x, \cdot)$ est continue sur Y,
2. Pour tout $y \in Y$, l'application $b(\cdot, y)$ est continue sur X.

Montrer que b est continue sur $X \times Y$ et qu'il existe une constante $C \ge 0$ telle que, pour $(x, y) \in X \times Y$
$$|b(x, y)| \le C\|x\|_X\|y\|_Y.$$
À l'aide du résultat de cet exercice, donner une nouvelle preuve du résultat de l'exercice 3.

Exercice 9. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre réels telle que, pour tout $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\ell_2(\mathbf{N})$, la série $\sum \alpha_n x_n$ converge. Montrer que $(\alpha_n) \in \ell_2(\mathbf{N})$. Est-ce que ce résultat se généralise à $\ell_p(\mathbf{N})$?

Exercice 10. Soit F un sous-espace fermé de $C([0,1])$ dont tous les éléments sont de classe C^1. Montrer que F est de dimension finie.
(Indication : commencer par montrer que l'application $f \mapsto f'$ est continue de F dans $C([0,1])$, puis essayer d'exploiter cela pour montrer que la boule unité fermée de F est compacte)

Exercice 11. Soit E un sous-espace fermé de $L^2([0,1])$ qui est inclus dans $L^\infty([0,1])$.

1. A l'aide du théorème du graphe fermé, montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout f dans E
$$\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^2}.$$
2. Soient $f_1, \dots, f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ dont les classes d'équivalences modulo l'égalité presque partout sont dans E et orthonormées au sens de $L^2([0,1])$. Montrer que la propriété
$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n, \ \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \leq C \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{1/2}$$
est vraie pour presque tout $t \in [0,1]$.
3. En choisissant $\alpha_i = f_i(t)$, conclure que $n \leq C^2$ et que E est de dimension finie.
4. Montrer que pour $1 \leq p < +\infty$, un sous-espace fermé de $L^p([0,1])$ qui est inclus dans $L^\infty([0,1])$ est de dimension finie.