Feuille d'exercices numéro 5
Espaces vectoriels topologiques

On note B_X la boule unité fermée d'un espace normé X.

Exercice 1 Norme et dualité.
Soit X un espace de Banach. À l'aide du théorème de Hahn–Banach démontrer les formules suivantes, pour $x_0 \in X$ et $f_0 \in X^*$:

$$\|x_0\|_X = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x_0)|, \quad \|f_0\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |f_0(x)|.$$

Les bornes supérieures sont-elles atteintes ?

Exercice 2 Hyperplans.
Montrer que dans un espace vectoriel normé, un hyperplan est soit fermé soit dense. Montrer que si f est une forme linéaire non identiquement nulle, l'hyperplan $\ker(f)$ est fermé si et seulement si f est continue.

Exercice 3
Déterminer si les espaces suivants sont séparables :

1. $L^\infty([0,1])$.
2. $C([0,1])$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme du supremum. Plus généralement, $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, pour K un compact métrique.
3. $\mathscr{L}(\ell_2, \ell_2)$, l'espace des opérateurs continus sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, muni de la norme-opérateur.
4. Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé séparable.

Exercice 4
Montrer que, dans un espace vectoriel topologique, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5 Jauge d'un convexe
Soit X un espace vectoriel topologique et $W \subset X$ un ouvert convexe contenant 0. Pour $x \in X$, on définit

$$j_W(x) = \inf\{t > 0 \,:\, x \in tW\}.$$

Montrer que j_W est une fonction à valeurs réelles, continue, positivement homogène, sous-additive et telle que $W = \{x \in X \,:\, j_W(x) < 1\}$.

Exercice 6 Séparation en dimension finie
Soit F et K deux convexes non vides disjoints de $\mathbf{R}^n$, avec F fermé et K compact. Montrer (sans utiliser le théorème de Hahn–Banach) que l'on peut séparer F et K au sens strict par un hyperplan.

Exercice 7 Séparation, contre-exemples

1. Donner un exemple, dans $\mathbf{R}^2$, de deux convexes fermés disjoints non vides ne pouvant pas être séparés au sens strict par un hyperplan.
2. Donner un exemple, en dimension infinie, de deux convexes disjoints non vides ne pouvant pas être séparés au sens large par un hyperplan fermé. Peut-on avoir un tel exemple en dimension finie ?
3. Donner un exemple, en dimension infinie, de deux convexes disjoints non vides ne pouvant pas être séparés au sens large par un hyperplan. **Indication :** *dans l'espace vectoriel des suites réelles à support fini, soit K l'ensemble des suites dont le dernier terme non nul est positif. Montrer que K est un convexe qui ne peut pas être séparé de $\{0\}$ par un hyperplan.*

Exercice 8 L'espace vectoriel topologique $L^{1/2}$ n'est pas localement convexe.
Soit X l'espace des fonctions mesurables $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ telles que $\int_0^1 |f(t)|^{1/2}\,\mathrm{d}t < +\infty$, quotienté par la relation d'équivalence donnée par l'égalité presque partout.

1. Montrer que X est un espace vectoriel.

2. Montrer que l'on définit une distance sur X par la formule $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^{1/2}\,\mathrm{d}t$, et que la topologie associée fait de X un espace vectoriel topologique.
3. Montrer que les seuls ouverts convexes de X sont $\emptyset$ et X. (**Indication.** *Montrer que l'enveloppe convexe d'une boule ouverte* $B(x,r)$ *contient la boule ouverte* $B(x,\sqrt{2}r)$).
   En déduire que toute forme linéaire continue sur X est nulle.

Exercice 9 Unicité de la structure d'espace vectoriel topologique en dimension finie.

Soit τ une topologie munissant un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie (avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) d'une structure d'espace vectoriel topologique (séparé, comme toujours dans ce cours).

1. Soit U un ouvert de (E,τ) contenant 0. Montrer qu'il existe un ouvert $B \subseteq U$ qui est *équilibré*, c'est-à-dire $\lambda B \subseteq B$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$ (en particulier $0 \in B$).
2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On considère $\varphi\colon (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (E,\tau)$ définie par $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   (a) Montrer que φ est une bijection linéaire continue.
   (b) On note S la sphère unité de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Montrer qu'il existe un τ-ouvert équilibré U tel que $U \cap \varphi(S) = \emptyset$, puis que pour tout $x \in U$ on a $\|\varphi^{-1}(x)\| < 1$.
   (c) Montrer que φ^{-1} est continue.
3. Montrer que τ est la topologie usuelle sur E.
4. Soit (X,τ_X) un espace vectoriel topologique et Y un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que Y est fermé dans (X,τ_X).