Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre printemps 2024-2025**
M1 - Mathématiques générales — UE : Analyse Fonctionnelle 2

Feuille d'exercices n° 6 ; enveloppes convexes, topologies affaiblies

---

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On rappelle que $\mathrm{co}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A (l'intersection de tous les convexes contenant A).
On considère un espace de Hilbert H séparable, de dimension infinie, avec une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de H. On introduit $K = \left\{ \dfrac{e_n}{n+1} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{0\}$. Montrer que K est compact et que $\mathrm{co}(K)$ n'est pas fermé.

Exercice 2. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa topologie usuelle ($n \in \mathbf{N}^*$ un entier fixé) et on considère une partie $A \subseteq \mathbf{R}^n$. On note C l'enveloppe convexe de A, et D l'ensemble des éléments x de $\mathbf{R}^n$ qui s'écrivent sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i$, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ positifs de somme 1 et $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$.

1. Montrer que $D \subseteq C$.
2. On souhaite maintenant établir l'inclusion réciproque ; on fixe x tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, $k > n+1$, $\alpha_i > 0$ et $x_i \in K$ pour tout i.
   (a) En appliquant un argument de dimension à $(x_i - x_1)_{i\geq 2}$, montrer qu'on peut trouver $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$.
   (b) Conclure, en exploitant le fait que pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - t\lambda_i) x_i$.

   On vient d'établir le *théorème de Carathéodory.*
3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et K un compact de E. Montrer que l'enveloppe convexe de K est compacte. L'enveloppe convexe d'un fermé de E est-elle nécessairement un fermé ?

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et C un convexe de E.

1. On suppose C borné. Soit B une boule ouverte qui contient $\overline{C}$, et S la sphère correspondante. Montrer que l'image de S par la projection sur $\overline{C}$ (pour la norme euclidienne) est égale à la frontière ∂C.
2. Montrer que pour tout $x \in \partial C$ il existe un *hyperplan d'appui* en x, i.e. un hyperplan fermé H tel que $x \in H$ et C est entièrement contenu dans un des deux demi-espaces fermés délimités par H. Ce résultat est-il vrai en dimension infinie ?
3. Donner une autre démonstration du résultat de la question précédente, valable en dimension infinie, en faisant l'hypothèse supplémentaire que C est d'intérieur non vide.
4. On suppose C compact. Montrer que C est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.
   On pourra raisonner par récurrence sur la dimension, en établissant que, si C est un convexe et H un hyperplan d'appui de C, alors $\mathrm{Ext}(C \cap H) = \mathrm{Ext}(C) \cap H$.

Exercice 4. Soit E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire ; on suppose que T est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \|\cdot\|)$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$ telles que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(T)$.
2. Montrer que $T(E)$ est de dimension finie.
3. Que pensez-vous de la réciproque du résultat que l'on vient de démontrer ?

Exercice 5. Soit X un espace de Banach, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge faiblement vers $x \in X$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et que $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$.

Exercice 6. Soit X un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X, et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X^*. Que pensez-vous des énoncés suivants ?

1. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.
3. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge préfaiblement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.
4. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge préfaiblement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.

Exercice 7. Soit X un espace de Banach et K une partie de X qui est faiblement compacte. On fixe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de K.

1. Soit E l'adhérence, pour la norme de X, de $\mathrm{Vect}\{x_n \colon n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que E est séparable, et qu'il existe une distance sur E induisant une topologie moins fine que $\sigma(E, E^*)$.
2. Montrer que $K \cap E$ est compact dans X pour la topologie $\sigma(X, X^*)$.
3. En déduire que $K \cap E$ est compact dans E pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.
4. Montrer qu'on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite qui converge faiblement vers $x \in K$ (théorème d'Eberlein–Šmulian).

Exercice 8. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de ℓ_1 qui converge faiblement vers 0.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ la suite $(x_n(k))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. On identifie ℓ_∞ au dual de ℓ_1 ; pour $u \in \ell_\infty$ et $x \in \ell_1$ on note $\langle u, x\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i x_i$.

   Soit B la boule unité fermée de ℓ_∞, que l'on munit de la topologie préfaible $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$.

   (a) Montrer que B est un ensemble compact métrisable.

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers u dans $(B, \sigma(\ell_\infty, \ell_1))$ si, et seulement si, $u_n(k)$ converge vers $u(k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On peut ainsi identifier B, muni de $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$, à un sous-ensemble de $[-1,1]^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit.

   Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon > 0$ on pose $F_{n,\varepsilon} = \{u \in B \colon \forall k \geq n \ |\langle u, x_n\rangle| \leq \varepsilon\}$. On fixe $\varepsilon > 0$.

   (c) Montrer qu'il existe n_0 tel que $F_{n_0,\varepsilon}$ est d'intérieur non vide dans B.

   (d) Montrer qu'il existe N tel que pour tout $u \in B$ vérifiant $u(n) = 0$ pour tout $n \leq N$ on a $u \in F_{n_0,\varepsilon}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 dans $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$.
4. Montrer que la topologie faible et la topologie forte de ℓ_1 ont les mêmes suites convergentes. Ces deux topologies ont-elles les mêmes ouverts ?