

Feuille d'exercices n° 6 : enveloppes convexes, topologies affaiblies

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . On rappelle que $\text{co}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A (l'intersection de tous les convexes contenant A).

On considère un espace de Hilbert H séparable, de dimension infinie, avec une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H . On introduit $K = \left\{ \frac{e_n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$. Montrer que K est compact et que $\text{co}(K)$ n'est pas fermé.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \subseteq \mathbb{R}^n$. On note C l'enveloppe convexe de A , et D l'ensemble des éléments x de \mathbb{R}^n qui s'écrivent sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i$, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ positifs de somme 1 et $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$.

1. Montrer que $D \subseteq C$.

2. On souhaite maintenant établir l'inclusion réciproque ; on fixe x tel que $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ avec $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, k > n+1, \alpha_i > 0$ et $x_i \in A$ pour tout i .

(a) En appliquant un argument de dimension à $(x_i - x_1)_{i \geq 2}$, montrer qu'on peut trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$.

(b) Conclure, en exploitant le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $x = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - t \lambda_i) x_i$.

On vient d'établir le *théorème de Carathéodory*.

3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et K un compact de E . Montrer que l'enveloppe convexe de K est compacte. L'enveloppe convexe d'un fermé de E est-elle nécessairement un fermé ?

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et C un convexe de E .

1. On suppose C borné. Soit B une boule ouverte qui contient \overline{C} , et S la sphère correspondante. Montrer que l'image de S par la projection sur \overline{C} (pour une norme euclidienne) est égale à la frontière ∂C .

2. Montrer que pour tout $x \in \partial C$ il existe un *hyperplan d'appui* en x , i.e. un hyperplan fermé H tel que $x \in H$ et C est entièrement contenu dans un des deux demi-espaces fermés délimités par H . Ce résultat est-il vrai en dimension infinie ?

3. Donner une autre démonstration du résultat de la question précédente, valable en dimension infinie, en faisant l'hypothèse supplémentaire que C est d'intérieur non vide.

4. On suppose C compact. Montrer que C est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

On pourra raisonner par récurrence sur la dimension, en établissant que, si C est un convexe et H un hyperplan d'appui de C , alors $\text{Ext}(C \cap H) = \text{Ext}(C) \cap H$.

Exercice 4. Soit E, F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ une application linéaire ; on suppose que T est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \|\cdot\|)$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^*$ telles que $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(T)$.

2. Montrer que $T(E)$ est de dimension finie.

3. Que pensez-vous de la réciproque du résultat que l'on vient de démontrer ?

Exercice 5. Soit X un espace de Banach, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge faiblement vers $x \in X$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et que $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$.

Exercice 6. Soit X un espace de Banach, $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X , et $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X^* . Que pensez-vous des énoncés suivants ?

1. Si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge fortement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge fortement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.
2. Si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge fortement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.
3. Si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge fortement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge préfaiblement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.
4. Si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge préfaiblement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.

Exercice 7. Soit X un espace de Banach et K une partie de X qui est faiblement compacte. On fixe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de K .

1. Soit E l'adhérence, pour la norme de X , de $\text{Vect}\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que E est séparable, et qu'il existe une distance sur E induisant une topologie moins fine que $\sigma(E, E^*)$.
2. Montrer que $K \cap E$ est compact dans X pour la topologie $\sigma(X, X^*)$.
3. En déduire que $K \cap E$ est compact dans E pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.
4. Montrer qu'on peut extraire de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une sous-suite qui converge faiblement vers $x \in K$ (théorème d'Eberlein-Šmulian).

Exercice 8. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de ℓ_1 qui converge faiblement vers 0.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ la suite $(x_n(k))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

2. On identifie ℓ_∞ au dual de ℓ_1 ; pour $u \in \ell_\infty$ et $x \in \ell_1$ on note $\langle u, x \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i x_i$.

Soit B la boule unité fermée de ℓ_∞ , que l'on munit de la topologie préfaible $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$.

- (a) Montrer que B est un ensemble compact métrisable.
- (b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers u dans $(B, \sigma(\ell_\infty, \ell_1))$ si, et seulement si, $u_n(k)$ converge vers $u(k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On peut ainsi identifier B , muni de $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$, à un sous-ensemble de $[-1, 1]^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon > 0$ on pose $F_{n, \varepsilon} = \{u \in B : \forall k \geq n \ | \langle u, x_k \rangle | \leq \varepsilon\}$. On fixe $\varepsilon > 0$.

- (c) Montrer qu'il existe n_0 tel que $F_{n_0, \varepsilon}$ est d'intérieur non vide dans B .
- (d) Montrer qu'il existe N tel que pour tout $u \in B$ vérifiant $u(n) = 0$ pour tout $n \leq N$ on a $u \in F_{n_0, \varepsilon}$.

3. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0 dans $(\ell_1, \| \cdot \|_1)$.
4. Montrer que la topologie faible et la topologie forte de ℓ_1 ont les mêmes suites convergentes. Ces deux topologies ont-elles les mêmes ouverts ?