
Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1. Soit X un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge faiblement vers $x \in X$. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathrm{co}(\{x_n : n \in \mathbf{N}\})$ qui converge fortement vers x.

Exercice 2. Soit E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire ; on suppose que T est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \|\cdot\|)$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ telles que $\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(T)$.
2. Montrer que $T(E)$ est de dimension finie.
3. Que pensez-vous de la réciproque du résultat que l'on vient de démontrer ?

Exercice 3. Soit X un espace de Banach, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge faiblement vers $x \in X$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et que $\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$.

Exercice 4. Soit X un espace de Banach, et $(x_i)_{i\in I}$ un sous-ensemble dense de X. Soit B la boule unité de X^*. On considère l'application $\Phi : X^* \to X^I$ définie par $\Phi(f) = (f(x_i))_{i\in I}$.

1. Montrer que Φ est injective.
2. On note τ la topologie produit sur X^I. Montrer que Φ est continue de $(X^*, \sigma(X^*, X))$ vers (X^I, τ).
3. Soit $\varepsilon > 0$, $y_1, \ldots, y_n \in X$ et $f \in X^*$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que
$$\{g \in B : \forall k \in \{1, \ldots, n\}\ |g(x_{i_k}) - f(x_{i_k})| < \delta\} \subseteq \{g \in B : \forall k \in \{1, \ldots, n\}\ |g(y_k) - f(y_k)| < \varepsilon\}$$
4. Montrer que $\Phi : B \to X^I$ est un homéomorphisme sur son image.
5. Montrer que si X est séparable alors $(B, \sigma(X^*, X))$ est métrisable, et qu'une distance compatible est donnée par
$$d(f, g) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} |f(x_i) - g(x_i)|$$
où $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est un sous-ensemble dénombrable dense de X.
6. Montrer que $(X^*, \sigma(X^*, X))$ est métrisable si, et seulement si, X est de dimension finie (indication : considérer une base dénombrable de voisinages de 0).
7. On suppose que $(B, \sigma(X^*, X))$ est métrisable. Montrer que X est séparable.

Exercice 5. Soit X un espace de Banach.

1. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X^* qui converge pour $\sigma(X^*, X)$. Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge faiblement. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Exercice 6. Soit X un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X, et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X^*. Que pensez-vous des énoncés suivants ?

1. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.
3. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge préfaiblement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.
4. Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers $x \in X$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge préfaiblement vers $\varphi \in X^*$ alors $(\varphi_n(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.

Exercice 7. Soit X un espace de Banach et K une partie de X qui est faiblement compacte. On fixe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de K.

1. Soit E l'adhérence, pour la norme de X, de $\mathrm{Vect}\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que E est séparable, et qu'il existe une distance sur E induisant une topologie moins fine que $\sigma(E, E^*)$.
2. Montrer que $K \cap E$ est compact dans X pour la topologie $\sigma(X, X^*)$.
3. En déduire que $K \cap E$ est compact dans E pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.
4. Montrer qu'on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite qui converge faiblement vers $x \in K$ (théorème d'Eberlein–Šmulian).

Exercice 8. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de ℓ_1 qui converge faiblement vers 0.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ la suite $(x_n(k))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. On identifie ℓ_∞ au dual de ℓ_1 ; pour $u \in \ell_\infty$ et $x \in \ell_1$ on note $\langle u, x\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i x_i$.

   Soit B la boule unité fermée de ℓ_∞, que l'on munit de la topologie préfaible $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$.

   (a) Montrer que B est un ensemble compact métrisable.

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers u dans $(B, \sigma(\ell_\infty, \ell_1))$ si, et seulement si, $u_n(k)$ converge vers $u(k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On peut ainsi identifier B, muni de $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$, à un sous-ensemble de $[1, 1]^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit.

   Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon > 0$ on pose $F_{n,\varepsilon} = \{u \in B : \forall k \geq n\ |\langle u, x_n\rangle| \leq \varepsilon\}$. On fixe $\varepsilon > 0$.

   (c) Montrer qu'il existe n_0 tel que $F_{n_0,\varepsilon}$ est d'intérieur non vide dans B.

   (d) Montrer qu'il existe N tel que pour tout $u \in B$ vérifiant $u(n) = 0$ pour tout $n \leq N$ on a $u \in F_{n_0,\varepsilon}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 dans $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$.
4. Montrer que la topologie faible et la topologie forte de ℓ_1 ont les mêmes suites convergentes. Ces deux topologies ont-elles les mêmes ouverts ?