Contrôle terminal du 25 avril 2023 (durée 3h)

L'emploi de documents, calculatrices, etc. n'est pas autorisé. Le sujet comporte 7 exercices indépendants. Il est recommandé de les traiter dans l'ordre du sujet ; en particulier, le dernier exercice est d'une difficulté nettement plus élevée que les autres. Lors de la correction une grande attention sera portée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Soit E, F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$ pour tout $x \in E$.

(ii) T est injective et son image est fermée dans F.

Exercice 2. On note E l'espace de Banach formé par les fonctions continues et bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère $T \in L(E)$ définie par $T(f)(x) = f(x+1)$ pour $x \in \mathbf{R}$. On note $\sigma(T)$ le spectre de T.

1. Démontrer que $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbf{C} \colon |z| \leq 1\}$ (on pourra commencer par calculer $\|T\|$).
2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $f \colon x \mapsto e^{i\alpha x}$. Montrer que f est un vecteur propre de T.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T.
4. Montrer que T est inversible. En utilisant l'égalité $T - \lambda I = T(I - \lambda T^{-1})$ et en calculant $\|T^{-1}\|$, déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 3. On considère l'espace $E = C([0,1], \mathbf{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et on fixe un sous-espace vectoriel fermé X de E. On suppose que tout $f \in X$ est continûment dérivable.

1. On considère $T \colon X \to E$ définie par $T(f) = f'$.
   (a) À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que T est continue.
   (b) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $f \in X$ de norme 1 on ait $\|f'\|_\infty \leq N$.
2. Pour $n \in \{0, \ldots, N\}$ on pose $x_n = \dfrac{n}{N}$ et on définit $\Phi \colon X \to \mathbf{R}^{N+1}$ en posant
$$\Phi(f) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N))$$
   (a) On suppose que $\|f\|_\infty = 1$ et $\Phi(f) = 0$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, obtenir une contradiction.
   (b) En déduire que X est de dimension finie, et $\dim(X) \leq N + 1$.

Exercice 4. Soit X un espace de Banach et $F \subseteq X^*$ un sous-espace vectoriel fermé. On suppose que F sépare les points de X, c'est-à-dire que pour tout $x \neq y \in X$ il existe $f \in F$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

1. Montrer que l'adhérence de F pour $\sigma(X^*, X)$ est égale à X^*.
2. On suppose maintenant que X est réflexif. Montrer que $F = X^*$.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base orthonormale de H. On considère $A = \{e_n + ne_m \colon (n,m) \in \mathbf{N}^2 \text{ et } m \geq n\}$.

1. Montrer que 0 est dans l'adhérence de A pour la topologie faible.
2. Montrer qu'aucune suite d'éléments de A ne converge faiblement vers 0.

T.S.V.P.

Exercice 6. Soit E, F deux espaces de Banach et $T \colon E \to F$ un opérateur compact.

1. Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers x pour $\sigma(E, E^*)$.
   (a) Montrer que $T(x)$ est la seule valeur d'adhérence possible de $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ dans $(F, \|\cdot\|)$.
   (b) Montrer que $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $T(x)$ dans $(F, \|\cdot\|)$.
2. On suppose E réflexif. Montrer la réciproque du résultat de la question précédente : si T est linéaire, continu et tel que $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge fortement vers $T(x)$ dès que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers x, alors T est compact.
3. Cette réciproque est-elle valide pour tous les espaces de Banach E, F ?

Exercice 7. Soit E, F deux espaces de Banach et $T \colon E \to F$ un opérateur compact. On veut montrer que T est compact si, et seulement si, T^* est compact.

1. On suppose T compact. On considère le compact $K = \overline{T(B_E)}$ et on fixe une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans B_{F^*}. On note $v_n = u_{n|K}$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une suite extraite convergente dans $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.
   (b) Montrer que $(T^*(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence.
   (c) Montrer que T^* est compact.
2. Montrer que si T^* est compact alors T est compact.