Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2022-2023**
Master mathématiques et applications | Analyse Fonctionnelle 2

Éléments de correction du contrôle terminal du 25 avril 2023

<u>**Exercice 1.**</u> *Soit E, F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *Il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$ pour tout $x \in E$.*

(ii) *T est injective et son image est fermée dans F.*

Supposons la première propriété vérifiée. Si $x \in \ker(T)$ alors $\alpha\|x\| \leq \|T(x)\| = 0$, donc $\alpha\|x\| = 0$ puis $\|x\| = 0$. Par conséquent $\ker(T) = \{0\}$ et T est donc injectif. Montrons que $\mathrm{Im}(T)$ est fermé : supposons que $(T(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $y \in F$. Pour tout $n, m \in \mathbf{N}$ on a $\|x_n - x_m\| \leq \dfrac{1}{\alpha}\|T(x_n) - T(x_m)\|$, donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Puisque E est complet, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $x \in E$, et par continuité de T on conclut que $y = T(x) \in \mathrm{Im}(T)$.
Réciproquement, si T est injectif et $\mathrm{Im}(T)$ est fermé, alors $\mathrm{Im}(T)$ est complet puisque fermé dans un espace de Banach, et $T\colon E \to \mathrm{Im}(T)$ est une bijection linéaire continue. Par un corollaire du théorème de l'application ouverte, $T^{-1}\colon \mathrm{Im}(T) \to E$ est continue, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $y \in \mathrm{Im}(T)$ on ait $\|T^{-1}(y)\| \leq M\|y\|$, ce qui revient à affirmer que pour tout $x \in E$ on a $\|x\| \leq M\|T(x)\|$. On conclut en posant $\alpha = \dfrac{1}{M}$.

<u>**Exercice 2.**</u> *On note E l'espace de Banach formé par les fonctions continues et bornées de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{C}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère $T \in L(E)$ définie par $T(f)(x) = f(x+1)$ pour $x \in \boldsymbol{R}$. On note $\sigma(T)$ le spectre de T.*

1. *Démontrer que $\sigma(T) \subseteq \{z \in \boldsymbol{C}\colon |z| \leq 1\}$ (on pourra commencer par calculer $\|T\|$).*
   Pour tout $f \in E$ on a
   $$\{T(f)(x)\colon x \in \mathbf{R}\} = \{f(x+1)\colon x \in \mathbf{R}\} = \{f(y)\colon y \in \mathbf{R}\}$$
   Donc $T(f)$ et f ont la même image, ce dont il suit immédiatement que $\|T(f)\|_\infty = \|f\|$.
   T est donc de norme 1 ; puisque le rayon spectral est majoré par la norme d'opérateur, on conclut que $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbf{C}\colon |z| \leq 1\}$.
2. *Soit $\alpha \in \boldsymbol{R}$ et $f\colon x \mapsto e^{i\alpha x}$. Montrer que f est un vecteur propre de T.*
   Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a
   $$T(f)(x) = f(x+1) = e^{i\alpha(x+1)} = e^{i\alpha}e^{i\alpha x} = e^{i\alpha}f(x)$$
   De plus f n'est pas la fonction nulle ; f est donc vecteur propre pour la valeur propre $e^{i\alpha}$.
3. *Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T.*
   On vient de voir que tout nombre complexe de module 1 est valeur propre de T. Soit λ une valeur propre et f un vecteur propre associé. On a $\|T(f)\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$, et on a déjà vu que $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ pour tout f. Donc $|\lambda| = 1$.
   Finalement, $\sigma(T)$ est l'ensemble formé par les nombres complexes de module 1.
4. *Montrer que T est inversible. En utilisant l'égalité $T - \lambda I = T(I - \lambda T^{-1})$ et en calculant $\|T^{-1}\|$, déterminer $\sigma(T)$.*
   On vérifie immédiatement que T est inversible d'inverse S définie par $S(f)(x) = f(x-1)$: pour tout f on a $ST(f) = TS(f) = f$. Donc $0 \notin \sigma(T)$. Si $\lambda \neq 0$, on obtient en suivant l'indication de l'énoncé que $\lambda \in \sigma(T)$ si, et seulement si, $I - \lambda T^{-1}$ n'est pas inversible ; puisque $I - \lambda T^{-1} = -\lambda(T^{-1} - \dfrac{1}{\lambda}I)$, on obtient que $\lambda \in \sigma(T)$ si, et seulement si, $\dfrac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$. Comme $\|T^{-1}\| = 1$, on a donc $\dfrac{1}{|\lambda|} \leq 1$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)$; donc $|\lambda| \geq 1$ puis (à l'aide du résultat de la première question) $|\lambda| = 1$.
   Finalement, $\sigma(T)$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Exercice 3. *On considère l'espace $E = C([0,1], \boldsymbol{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et on fixe un sous-espace vectoriel fermé X de E. On suppose que tout $f \in X$ est continûment dérivable.*

1. *On considère $T \colon X \to E$ définie par $T(f) = f'$.*

   (a) *À l'aide du théorème du graphe fermé, montrer que T est continue.*

   L'espace $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, de même que X puisque X est fermé dans E. Comme $T \colon X \to E$ est linéaire, pour vérifier que T est continue il nous suffit de prouver que son graphe est fermé. Supposons donc que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ est telle que (f_n, f_n') converge vers $(f, g) \in X \times E$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$, et $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$. Le théorème de dérivation des suites de fonctions nous permet d'affirmer que $g = f'$, donc (f, g) appartient au graphe de T qui est par conséquent fermé.

   (b) *Montrer qu'il existe $N \in \boldsymbol{N}^*$ tel que pour tout $f \in X$ de norme 1 on ait $\|f'\|_\infty \leq N$.*

   Puisque T est linéaire et continue, on a pour tout $f \in X$ l'inégalité $\|T(f)\| \leq \|T\|\|f\|_\infty$. Choisissons $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\|T\| \leq N$. Pour tout $f \in X$ de norme 1 on a

$$\|f'\|_\infty = \|T(f)\|_\infty \leq \|T\|\|f\|_\infty \leq N$$

2. *Pour $n \in \{0, \ldots, N\}$ on pose $x_n = \dfrac{n}{N}$ et on définit $\Phi \colon X \to \boldsymbol{R}^{N+1}$ en posant*

$$\Phi(f) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N))$$

   (a) *On suppose que $\|f\|_\infty = 1$ et $\Phi(f) = 0$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, obtenir une contradiction.*

   Fixons $i \in \{0, \ldots, N-1\}$. Pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$ on a, d'après l'inégalité des accroissements finis (qui s'applique puisque f est C^1 sur $[0,1]$) :

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_i)| \leq \|f'\|_\infty |x - x_i| \leq N\|x - x_i\| < 1$$

   De plus $f(1) = 0$, et on conclut que $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme f est continue on a $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \colon x \in [0,1]\}$, donc $\|f\|_\infty < 1$, une contradiction.

   (b) *En déduire que X est de dimension finie, et $\dim(X) \leq N+1$.*

   Si $\ker(\Phi) \neq \{0\}$, alors $\ker(\Phi)$ est un espace vectoriel normé non trivial, et contient donc un élément de norme 1. Or, on vient de montrer que cela n'est pas le cas. Donc $\ker(\Phi) = \{0\}$, par conséquent Φ est injective. Donc $\Phi \colon X \to \mathbf{R}^{N+1}$ est un isomorphisme sur son image, ce qui prouve que X est de dimension finie inférieure ou égale à $\dim(\mathbf{R}^{N+1}) = N+1$.

Exercice 4. *Soit X un espace de Banach et $F \subseteq X^*$ un sous-espace vectoriel fermé. On suppose que F sépare les points de X, c'est-à-dire que pour tout $x \neq y \in X$ il existe $f \in F$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

1. *Montrer que l'adhérence de F pour $\sigma(X^*, X)$ est égale à X^*.*

   Notons G l'adhérence de F pour $\sigma(X^*, X)$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de $(X, \sigma(X^*, X))$. Si $\varphi \in X^* \setminus G$, alors le théorème de Hahn–Banach appliqué à l'espace vectoriel topologique localement convexe $(X^*, \sigma(X^*, X))$ nous garantit l'existence de $\Psi \in (X^*, \sigma(X^*, X))^*$ telle que $\psi(g) = 0$ pour tout $g \in G$ et $\Psi(\varphi) = 1$. Puisque X est le dual topologique de $(X^*, \sigma(X^*, X))$ on obtient donc qu'il existe $x \in X$ tel que $\varphi(x) = 1$ et $g(x) = 0$ pour tout $g \in G$. En particulier, $x \neq 0$ mais $f(x) = 0$ pour tout $f \in F$, contredisant le fait que F sépare les points.

2. *On suppose maintenant que X est réflexif. Montrer que $F = X^*$.*

   Comme X est réflexif, la topologie $*$-faible $\sigma(X^*, X)$ sur X^* coïncide avec la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$. Comme une partie convexe, fermée en norme, est fermée pour la topologie faible, on conclut que F est fermé pour $\sigma(X^*, X)$. Le résultat de la question précédente nous donne alors l'égalité $F = X^*$.

Exercice 5. *Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une base orthonormale de H. On considère $A = \{e_n + ne_m : (n,m) \in \boldsymbol{N}^2 \text{ et } m \geq n\}$.*

1. *Montrer que 0 est dans l'adhérence de A pour la topologie faible.*

   Soit $x_1, \ldots, x_p \in H$ et $\varepsilon > 0$. On doit montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $|\langle x_i, a\rangle| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

   Pour cela, fixons tout d'abord n tel que $|\langle x_i, e_n\rangle| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ (cette inégalité est satisfaite pour tout n assez grand puisque $\sum_n |\langle x_i, e_n\rangle|^2$ converge).

   Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ (n est fixé) La suite $\langle x_i, ne_m\rangle$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$; donc $\langle x_i, e_n + ne_m\rangle$ tend vers $\langle x_i, e_n\rangle$. Par conséquent, pour m suffisamment grand on a comme espéré $|\langle x_i, e_n + ne_m\rangle| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

2. *Montrer qu'aucune suite d'éléments de A ne converge faiblement vers 0.*

   Soit $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge faiblement. Pour tout $i \in \mathbf{N}$ il existe $n_i, m_i \geq n_i$ tels que $a_i = e_{n_i} + n_i e_{m_i}$. En particulier, $\|a_i\| \geq n_i$; puisqu'une suite faiblement convergente est bornée, la suite (n_i) est bornée. Quitte à extraire, on peut donc supposer que n_i est constante égale à n. Mais alors $\langle e_n, a_i\rangle$ ne tend pas vers 0. Par conséquent $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ ne converge pas faiblement vers 0.

Exercice 6. *Soit E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur compact.*

1. *Soit $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers x pour $\sigma(E, E^*)$.*

   (a) *Montrer que $T(x)$ est la seule valeur d'adhérence possible de $(T(x_n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ dans $(F, \|\cdot\|)$.*

   Supposons que $(T(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers y dans $(F, \|\cdot\|)$. Alors $(T(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge aussi vers y dans $(F, \sigma(F, F^*))$.

   Comme $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers x, il en va de même de $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$; puisque T est continue de $(E, \|\cdot\|)$ vers $(F, \|\cdot\|)$, T est aussi continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ vers $(F, \sigma(F, F^*))$. Donc $(T(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers $T(x)$. Puisque $\sigma(F, F^*)$ est séparée, on a donc $y = T(x)$.

   (b) *Montrer que $(T(x_n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ converge vers $T(x)$ dans $(F, \|\cdot\|)$.*

   Comme $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement, elle est bornée ; choisissons R tel que $\|x_n\| \leq R$ pour tout n et notons $K = \overline{T(B(0_E, R))}$, qui est compact dans $(F, \|\cdot\|)$ puisque T est un opérateur compact. La suite $(T(x_n)_{n\in\mathbf{N}})$ est une suite d'élements du compact K, et on vient de montrer que la seule valeur d'adhérence possible de cette suite est $T(x)$. Une suite d'éléments d'un compact métrique qui ne converge pas a au moins deux valeurs d'adhérence, donc $(T(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x dans $(F, \|\cdot\|)$.

2. *On suppose E réflexif. Montrer la réciproque du résultat de la question précédente : si T est linéaire, continu et tel que $(T(x_n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ converge fortement vers $T(x)$ dès que $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ converge faiblement vers x, alors T est compact.*

   Supposons que T a la propriété ci-dessus ; soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E tels que $\|x_n\| \leq 1$ pour tout n. Pour montrer que T est compact, on doit prouver que $(T(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $(F, \|\cdot\|)$.

   Pour cela, notons que, puisque E est réflexif, $(B_E, \sigma(E, E^*))$ est compact, et donc séquentiellement compact d'après le théorème d'Eberlein–Šmulian. Donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ faiblement convergente (on pourrait aussi directement invoquer le résultat vu en TD selon lequel une suite bornée dans un espace réflexif admet une sous-suite faiblement convergente).

   L'hypothèse sur T nous permet de conclure que $(T(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $(F, \|\cdot\|)$. Finalement, T est bien un opérateur compact.

3. *Cette réciproque est-elle valide pour tous les espaces de Banach E, F ?*

   Considérons $id : \ell^1 \to \ell^1$. Puisque, dans ℓ^1, toute suite faiblement convergente est fortement convergente, id a la propriété de la question précédente. Mais id n'est pas un opérateur compact : puisque ℓ^1 est un espace vectoriel normé de dimension infinie, sa boule unité fermée n'est pas compacte.

Exercice 7. *Soit E, F deux espaces de Banach et $T\colon E \to F$ un opérateur compact. On veut montrer que T est compact si, et seulement si, T^* est compact.*

1. *On suppose T compact. On considère le compact $K = \overline{T(B_E)}$ et on fixe une suite $(u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ dans B_{F^*}. On note $v_n = u_{n|K}$.*

   (a) *Montrer que $(v_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ admet une suite extraite convergente dans $(C(K), \|\cdot\|)_\infty)$.*

   Comme K est compact, on peut appliquer le théorème d'Ascoli. Puisque chaque u_n est un élément de B_{F^*}, chaque v_n est une fonction 1-lipschitzienne sur K et la famille $\{v_n \colon n \in \mathbf{N}\}$ est donc une famille équicontinue d'élements de $C(K)$. De plus, K est compact donc contenu dans $B(0_E, R)$ pour un certain R, et alors pour tout $x \in K$ on a $\{v_n(x) \colon x \in K\} \subseteq \{t \colon |t| \leq R\}$.

   Les hypothèses du théorème d'Ascoli sont donc satisfaites par $\{v_n \colon n \in \mathbf{N}\}$: c'est un sous-ensemble relativement compact de $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$. Donc $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergente $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$.

   (b) *Montrer que $(T^*(u_n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ admet une valeur d'adhérence.*

   Fixons une sous-suite convergente $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$; en particulier $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Pour tout $n, m \in \mathbf{N}$ on a

   $$\begin{aligned}
   \|T^*(u_{\varphi(n)}) - T^*(u_{\varphi(m)})\| &= \sup\{|T^*(u_{\varphi(n)})(x) - T^*(u_{\varphi(m)})(x)| \colon x \in B_E\} \\
   &= \sup\{|u_{\varphi(n}(T(x)) - u_{\varphi(m)}(T(x))| \colon x \in B_E\} \\
   &= \sup\{|u_{\varphi(n)}(y) - u_{\varphi(m)}(y)| \colon y \in T(B_E)\} \\
   &\leq \|v_{\varphi(n)} - v_{\varphi(m)}\|_\infty
   \end{aligned}$$

   Donc $(T^*(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans E^*, qui est complet : elle converge.

   (c) *Montrer que T^* est compact.*

   On vient de montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans B_{F^*} la suite $(T^*(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite convergente. Ceci prouve que $T^*(B_{F^*})$ est relativement compact dans E^*, autrement dit que T^* est un opérateur compact.

2. *Montrer que si T^* est compact alors T est compact.*

   Supposons T^* compact. Notons $i_E \colon E \to E^{**}$ et $i_F \colon F \to F^{**}$ les injections canoniques. On a $i_F \circ T = T^{**} \circ i_E$ (voir preuve plus bas). Comme T^* est compact, T^{**} l'est aussi d'après le résultat de la question précédente. On en conclut que $T^{**} \circ i_E$ est compact, autrement dit $i_F \circ T$ est compact. Donc $\overline{i_F \circ T(B_E)}$ est compact dans F^{**}. Cela revient à affirmer que $i_F \circ T(B_E)$ est précompact, et puisque i_F est une isométrie on obtient que $T(B_E)$ est précompact. Par conséquent T est un opérateur compact.

   Montrons finalement l'égalité $i_F \circ T = T^{**} \circ i_E$ (qui avait été énoncée dans un exercice de TD mais pas démontrée). Fixons $\varphi \in F^*$ et $x \in E$.

   D'une part, on a $(i_F \circ T)(x)(\varphi) = i_F(T(x)(\varphi) = \varphi(T(x))$. D'autre part, on a

   $$(T^{**} \circ i_E)(x)(\varphi) = T^{**}(i_E(x))(\varphi) = i_E(x)(T^*(\varphi)) = T^*(\varphi)(x) = \varphi(T(x))$$